Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(6), 87-101**
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156269

一类 n 阶非线性泛函微分方程的振动性和渐近性

任　勇，郑诗巾

长沙科技学院，公共课教学部，湖南　长沙

收稿日期：2026 年 5 月 9 日；录用日期：2026 年 6 月 3 日；发布日期：2026 年 6 月 9 日

摘　要

本文聚焦于带连续分布时滞的 n 阶非线性中立型泛函微分方程，深入研究其解的振动性与渐近性行为。通过运用推广的 Riccati 变换、Philos 型积分平均方法以及 Young 不等式等数学工具，结合方程的结构特征与基本假设，推导出该类方程解的振动性判定新准则，同时得到非振动解的渐近收敛性质。所得结果推广并改进了现有针对三阶或偶数阶方程的研究结论，拓宽了高阶微分方程振动理论的适用范围。

关键词

高阶中立型微分方程，连续分布时滞，振动性，渐近性，Riccati 变换

Oscillation and Asymptotic Properties of a Class of nth-Order Nonlinear Functional Differential Equations

Yong Ren, Shijin Zheng

Department of General Education, Changsha University of Science and Engineering, Changsha Hunan

文章引用: 任勇, 郑诗巾. 一类 n 阶非线性泛函微分方程的振动性和渐近性 [J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 87-101.
DOI: 10.12677/aam.2026.156269

Received: May 9, 2026; accepted: June 3, 2026; published: June 9, 2026

Abstract

This paper focuses on the nth-order nonlinear neutral functional differential equations with continuously distributed delays, and studies the oscillation and asymptotic behavior of their solutions in depth. By using the generalized Riccati transformation, Philos-type in-tegral averaging method and Young's inequality, combined with the structural characteristics and basic assumptions of the equation, new oscillation criteria for the solutions of this class of equations are derived, and the asymptotic convergence properties of non-oscillatory solutions are obtained. The results generalize and improve the existing research conclusions only for third-order or even-order equations, and expand the application scope of the oscillation theory of higher-order functional differential equations.

Keywords

Higher-Order Neutral Differential Equation, Continuously Distributed Delay, Oscillation, Asymptotic Behavior, Riccati Transformation

1. 引言

高阶泛函微分方程的振动性与渐近性研究是微分方程理论的重要分支，其结论在控制理论、生态数学、工程系统等领域有着广泛的实际应用价值。近年来，带分布时滞的中立型泛函微分方程更贴合实际系统的时滞性，成为该领域的研究热点。本文主要研究如下 n 阶非线性中立型泛函微分方程：

$$\left(a(t)\left(z^{(n-1)}(t)\right)^{\beta}\right)' + \int_c^d q(t,\xi) f\left(x[\sigma(t,\xi)]\right) d\xi = 0, \tag{1.1}$$

其中辅助函数 $z(t)$ 的定义为：

$$z(t) = x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu. \tag{1.2}$$

为展开后续的推导与证明，对上述方程中的各级函数及参数作如下基本假设：

(H1) $a(t) \in C([t_0,\infty),(0,\infty))$ ² 并且 $\int_{t_0}^{\infty} a(s)^{-\frac{1}{\beta}}ds = \infty$;

(H2) $p(t,\mu) \in C([t_0,\infty)\times[a,b],[0,\infty))$ ² 并且 $0 \le \int_a^b p(t,\mu)d\mu \equiv p(t) \le p < 1$;

(H3) $q(t,\xi) \in C([t_0,\infty),(0,\infty))$;

(H4) $\sigma(t,\xi) \in C([t_0,\infty)\times[a,b],\mathbb{R})$ 关于 ξ 非减且满足

$$\sigma(t,\xi) \le t \quad and \lim_{t\to\infty}\min_{\xi\in[c,d]}\sigma(t,\xi) = \infty;$$

(H5) 对于 $x \ne 0$, 有 $f(x) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 及 $\frac{f(x)}{x^{\beta}} \ge \delta > 0$, 其中 $\delta > 0$ 是一个常数;

(H6) 指数 β 是两个正奇数的商, 即 β 为正的奇次分式.

针对方程 (1.1), 对其解的相关概念作如下界定：若函数 $x(t) \in C([t_0,\infty))$, 且由上述式定义的辅助函数 $z(t)$ 满足 $z(t) \in C^{n-1}([t_0,\infty))$, $r(t)z^{(n-1)}(t) \in C^1([t_0,\infty))$, 同时 $x(t)$ 在区间 $[t_0,\infty)$ 内处处满足方程 (1.1), 则称 $x(t)$ 为方程 (1.1) 的解。本文仅讨论方程 (1.1) 的非平凡解, 即对任意的 $T \ge t_0$, 均有 $\sup\{|x(t)| : t \ge T\} > 0$ 的解, 且默认方程 (1.1) 存在此类解。对解的振动性与非振动性定义如下：若函数 $x(t)$ 在区间 $[t_0,\infty)$ 上既不最终恒正, 也不最终恒负数, 则称为方程 (1.1) 的振动解；若 $x(t)$ 在区间 $[t_0,\infty)$ 上最终恒正或恒负, 则称其为方程 (1.1) 的非振动解。

近年来, 关于非线性中立型时滞微分方程简单振动性问题已有大量研究成果等。其中，二阶、三阶和四阶微分方程的振动准则研究成果尤为丰富 (见 [1–6] 等)。而高阶非线性中立型时滞微分方程的解的振动性问题研究主要集中在变时滞或非中立型方程的研究，而带有分布时滞高阶中立型微分方程解的渐近性问题研究相对较少。Zafer 在 [7] 中研究了如下变时滞高阶微分方程：

$$(x(t) + p(t)x[\tau(t)])^{(n)} + f(t, x(t), x(\sigma(t))) = 0,$$

的解的振动性问题，建立了相应的振动准则其中 $0 \le p(t) \le 1$. Zhang 等在 [8] 中考虑了如下偶阶非线性中立型时滞微分方程的振动性：

$$(x(t) + p(t)x[\tau(t)])^{(n)} + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0,$$

这里 n 是偶数，$0 \le p(t) \le 1$ 及 $\tau(t) \le t$. Qin 等人 [9] 考虑了如下形式的三阶拟线性微分方程的渐近行为：

$$\left(a(t)\left[\left(\left(x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu\right)''\right]^{\beta}\right)' + \int_c^d q(t,\xi)f(x[\sigma(t,\xi)])d\xi = 0.$$

其中β 是正奇数之比，$0 \le p(t) \le 1, \tau(t,\mu) \le t, \sigma(t,\xi) \le t$ 且 $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{\beta}}(s)} dt = \infty$. 作者通过使用广义 Riccati 变换、Philos 型积分平均技巧和 Young 不等式，获得了该方程非振动解的振动性或某种渐近行为的新准则。

特别是 2025, Zhang 等在 [10] 中研究了如下高阶半线性时滞微分方程的振动性:

$$\left[r(t)(u^{(n-1)}(t))^{\alpha}\right]' + q(t)u^{\beta}(\eta(t)) = 0,$$

这里 $\alpha \neq \beta$, $\eta(t) \le t, \eta'(t) \ge 0, \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ 及 $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} dt < \infty$. 作者得到了若干充分条件, 证明了方程的所有解要么振动, 要么趋于零。2013 年,Zhang 等在 [10] 中在文献 [8] 的基础上得到了新的振动结果, 改进了已有的结论。Li 等在 [11] 中结合文献 [12,13] 研究了类似的高阶拟线性中立型微分方程解的渐近行为。综合现有研究成果, 我们发现目前尚未有关于方程 (1.1) 解的振动性的研究。因此, 本文旨在讨论该问题, 给出方程 (1.1) 的 Philos-型振动准则。通过运用广义 Riccati 变换、Philos-型积分平均技巧和杨不等式等方法, 得到方程解的振动性或非振动解的特定渐近行为的新准则。值得注意的是, 本文中 $n \ge 3$ 为任意正整数, 而非文献 [9] 中仅考虑的 $n = 3$。

2. 预备知识与基本假设

本文首先对方程 (1.1) 的非振动解进行分类。假设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的最终正解，并且称相应于 $x(t)$ 由 (1.2) 定义的函数 $z(t)$ 是 l 阶的，如果有

$$\begin{aligned} z^{(i)}(t) > 0, \quad for \quad 0 \le i \le l; \\ (-1)^{i+l} z^{(i)}(t) > 0, \quad for \quad l \le i \le n-1; \\ \left(a(t)[z^{(n-1)}(t)]^{\beta}\right)' < 0 \end{aligned}$$

为了方便引用，记 N_l 表示所有 l 阶函数 $z(t)$ 的集合，以下引理可参见文献 [14].

引理 2.1. 设 $z(t)$ 是区间$\lim_{t\to\infty} z(t) \neq 0$ 上的一个正的 n 次可微函数, 其 n 阶导数$z^{(n)}((t))$ 在$[T,\infty)$ 上非正, 并且在任何形如 $[T',\infty), T' > T$ 的区间上不恒为零。那么存在一个整数$0 \le l \le n-1$, 其中$n+l$ 为奇数, 使得对于某个足够大的$T^\star \ge T'$, 对所有 $t \ge T^\star$ 成立, 有

$$z^{(i)}(t) > 0, \quad 对于 \quad i = 1, 2, \ldots, l-1, 当l > 1时;$$

$$(-1)^{j+l} z^{(j)}(t) > 0, \quad 对于 \quad j = l, l+1, \ldots, n-1;$$

引理 2.2. 设 $z(t)$ 如引理 2.1 所述。如果 $\lim_{t\to\infty} z(t) \neq 0$，那么对于每个$\lambda$，$0 < \lambda < 1$，存在一个$t_\lambda \ge t_0$，使得对所有$t \ge t_\lambda$ 有

$$z(t) \ge \frac{\lambda}{(n-1)!} t^{n-1} |z^{(n-1)}(t)|$$

引理 2.3. 设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的正解，$z(t)$ 如 (1.2) 所定义。那么 $z(t)$ 也具有以下结构：

(1) 存在一个阶数 l $(2 \le l \le n-2)$，使得 $n+l$ 为奇数, 并且最终有

$$z^{(i)}(t) > 0, \quad 对于 \quad 0 \le i \le l-1;$$

$$(-1)^{i+l} z^{(i)}(t) > 0, \quad 对于 \quad l \le i \le n-2;$$

$$z^{(n-1)}(t) > 0, \quad \left(a(t)[z^{(n-1)}(t)]^{\beta}\right)' < 0;$$

(2) 当 n 为奇数时, 并且对于所有$0 \le i \le n-1$，$z(t)$ 满足

$$(-1)^{i} z^{(i)}(t) > 0, \quad \left(a(t)[z^{(n-1)}(t)]^{\beta}\right)' < 0;$$

(3) 对于所有 $0 \le i \le n-1$，$z(t)$ 满足

$$z^{(i)}(t) > 0, \quad \left(a(t)[z^{(n-1)}(t)]^{\beta}\right)' < 0,$$

最终成立。

证明. 设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的最终正解 (最终负解可令 $x(t) = -y(t)$ 转化), 由方程 (1.1) 得

$$\left(a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta}\right)' < 0,$$

即 $a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta}$ 严格递减。若 $a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta} < 0$, 则存在 $M > 0$, 使得

$$z^{(n-1)}(t) \le -M^{\frac{1}{\beta}} a^{-\frac{1}{\beta}}(t),$$

积分得 $z^{(n-2)}(t) \to -\infty$, 由泰勒展开式得 $z^{(n-3)}(t) < 0$, 依次推得 $z(t) < 0$, 这与 $z(t) > 0$ 矛盾, 故 $z^{(n-1)}(t) > 0$。于是 $z^{(n-2)}(t)$ 是单调增加的，可推得 $z(t)$ 满足上述三种结构之一。 □

推论 2.1. 设 $x(t)$ 是 (1.1) 的正解，$z(t)$ 如 (1.2) 所定义。那么 $z(t)$ 具有以下结构: (I) 如果 n 是奇数 $N = N_0 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_{n-1}$; (II) 如果 n 是偶数 $N = N_1 \cup N_3 \cup \cdots \cup N_{n-1}$。

定理 2.1. 设$x(t)$ 是 (1.1) 的解，且相应的 $z(t)$ 具有性质 (1)。假设存在常数$0 < \lambda_0 < 1$，使得如下一阶时滞微分方程

$$y' + \left(\frac{\lambda_0}{(n-1)!}\right)^{\beta} \int_c^d q(t,\xi) \frac{\sigma^{\beta(n-1)}(t,\xi)}{a[\sigma(t,\xi)]} y[\sigma(t,\xi)] d\xi = 0 \tag{2.1}$$

是振动的。那么方程 (1.1) 的每个解$x(t)$ 要么是振动的。

证明. 设$x(t)$ 是方程 (1.1) 的正解。由于$z(t)$ 满足性质 (1)，那么 $z'(t) > 0$, 这意味着存在常数 $l > 0$, 使得$z(t) \ge l$ 且

$$\lim_{t\to\infty} z(t) \neq 0.$$

因此, 对于足够大的 t 有以下不等式成立

$$x(t) \geq (1-p)z(t). \tag{2.2}$$

事实上, 因为当 t 足够大时, 有$x(t) < z(t)$ 及 $z[\tau(t,\mu)] < z(t)$, 则有

$$\begin{aligned} x(t) = z(t) - \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu \ &> z(t) - \int_a^b p(t,\mu)z[\tau(t,\mu)]d\mu \\ &\geq z(t) - p(t)z[\tau(t,b) \geq z(t) - pz(t) = (1-p)z(t). \end{aligned}$$

由引理2.2, 如下不等式成立

$$z[\sigma(t,\xi)] \geq \frac{\lambda}{(n-1)!}\sigma^{n-1}(t,\xi)z^{(n-1)}[\sigma(t,\xi)]. \tag{2.3}$$

进一步根据假设 $(H2) \sim (H5)$, 有

$$\begin{aligned} &\left(a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta}\right)' = -\int_c^d q(t,\xi)f\left(x[\sigma(t,\xi)]\right)d\xi \\ &\leq -\delta\int_c^d q(t,\xi)x^{\beta}[\sigma(t,\xi)]d\xi \\ &\leq -\delta\int_c^d q(t,\xi)z^{\beta}[\sigma(t,\xi)]d\xi \\ &\leq -\delta\left(\frac{\lambda}{(n-1)!}\right)^{\beta}\int_c^d q(t,\xi)\left(\sigma^{n-1}(t,\xi)z^{(n-1)}[\sigma(t,\xi)]\right)^{\beta}d\xi \end{aligned} \tag{2.4}$$

结合 (2.4) 和引理2.3, 有 $y(t) = a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta} > 0$ 是下面方程的正解

$$y' + \left(\frac{\lambda_0}{(n-1)!}\right)^{\beta}\int_c^d q(t,\xi)\frac{\sigma^{\beta(n-1)}(t,\xi)}{a[\sigma(t,\xi)]}y[\sigma(t,\xi)]d\xi \leq 0. \tag{2.5}$$

显然这与 (2.1) 矛盾。 □

推论 2.2. 设$x(t)$ 是 (1.1) 的解, 且相应的 $z(t)$ 满足性质 (2)。假设

$$\liminf_{t\to\infty}\left[\frac{\sigma_1^{n-1}(t)}{n!}\right]^{\beta}a^{-1}(t)\int_t^{\infty}\int_c^d q(s,\xi)d\xi ds > \frac{1}{e^{\beta}}. \tag{2.6}$$

那么方程 (1.1) 的每个解$x(t)$ 都是振动的。

定理 2.2. 设$x(t)$ 是 (1.1) 的正解, 且相应的$z(t)$ 满足性质 (2)。假设

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{v_{n-2}}^{\infty}\cdots\int_{v_1}^{\infty}\left[\frac{1}{a(u)}\int_u^{\infty}\int_c^d q(s,\xi)d\xi ds\right]^{\frac{1}{\beta}}du\cdots dv_{n-2} = \infty. \tag{2.7}$$

则

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

证明. 设$x(t)$ 是方程 (1.1) 的正解。由于$z(t)$ 满足性质 (2) , 那么存在常数 l, 使得

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = l.$$

接下来, 我们证明$l=0$。由于$z(t)$ 满足性质 (2) , 则$z(t)\geq 0$, 于是 $l\geq 0$。如果 $l>0$, 那么对于所有 $\epsilon>0$ 和足够大的 t, 有$l<z(t)<l+\epsilon$。选择$\epsilon<l(1-p)/p$, 则有

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) - \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu \ > l - \int_a^b p(t,\mu)z[\tau(t,\mu)]d\mu \\ &\geq l - p(t)z[\tau(t,a) \geq l - p(l+\varepsilon) = K(l+\varepsilon) > Kz(t), \end{aligned} \tag{2.8}$$

这里 $K=\frac{l-p(l+\varepsilon)}{l+\varepsilon}>0$. 利用假设 $(H6)$ 和 (2.8), 由方程 (1.1) 可得

$$\begin{aligned} \left(a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta}\right)' &\leq -\delta K^{\beta}\int_c^d q(t,\xi)z^{\beta}[\sigma(t,\xi)]d\xi \\ &\leq -\delta K^{\beta}z^{\beta}[\sigma(t,d)]\int_c^d q(t,\xi)d\xi \leq -\delta K^{\beta}z^{\beta}[\sigma_0(t)]q_1(t), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $q_1(t)=\int_c^d q(t,\xi)d\xi$，$\sigma_0(t)=\sigma(t,d)$. 对 (2.9) 在 $[t,\infty)$ 上积分, 有

$$a(t)\left[z^{(n-1)}(t)\right]^{\beta} \geq \delta K^{\beta}\int_t^{\infty} q_1(s)z^{\beta}[\sigma_0(s)]ds.$$

注意到 $z(\sigma_0(s))>l$, 则有

$$\begin{aligned} z^{(n-1)}(t) &\geq \delta Kl\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{\infty} q_1(s)ds\right) \\ &\geq \delta^{\frac{1}{\beta}}Kl\left(\frac{1}{a(t)}\int_t^{\infty}\int_c^d q(s,\xi)d\xi ds\right)^{\frac{1}{\beta}}; \\ -z^{(n-2)}(t) &\geq \delta^{\frac{1}{\beta}}Kl\int_t^{\infty}\left[\frac{1}{a(u)}\int_u^{\infty}\int_c^d q(s,\xi)d\xi ds\right]^{\frac{1}{\beta}}du; \\ z^{(n-3)}(t) &\geq \delta^{\frac{1}{\beta}}Kl\int_t^{\infty}\int_{v_1}^{\infty}\left[\frac{1}{a(u)}\int_u^{\infty}\int_c^d q(s,\xi)d\xi ds\right]^{\frac{1}{\beta}}dudv_1; \end{aligned}$$

由于 n 是奇数，所以有

$$-z^{'}(t) \geq \delta^{\frac{1}{\beta}} Kl \int_{t}^{\infty} \int_{v_{n-3}}^{\infty} \cdots \int_{v_1}^{\infty} \left[\frac{1}{a(u)} \int_{u}^{\infty} \int_{c}^{d} q(s,\xi) d\xi ds \right]^{\frac{1}{\beta}} du \cdots dv_{n-3};$$

$$z(t_1) \geq \delta^{\frac{1}{\beta}} Kl \int_{t_1}^{\infty} \int_{v_{n-2}}^{\infty} \cdots \int_{v_1}^{\infty} \left[\frac{1}{a(u)} \int_{u}^{\infty} \int_{c}^{d} q(s,\xi) d\xi ds \right]^{\frac{1}{\beta}} du \cdots dv_{n-2}. \tag{2.10}$$

与 (2.7) 的矛盾。因此，$l = 0$, 即 $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$, 于是有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

□

引理 2.4. 假设当 $t \in [t_0, \infty)$ 时，$u(t) > 0, \cdots, u^{(n-2)}(t) > 0, u^{(n-1)}(t) > 0, u^{(n)}(t) < 0$。则存在正常数 $\nu \in (0,1)$ 及 $T_\nu \geq t_0$ 使得对一切的 $t \geq T_\nu$ 有

$$u(t) \geq \nu \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} u^{(n-2)}(t)$$

证明. 由泰勒公式，存在 $\xi \in (t_0, t)$ 及 $0 < \chi < 1$, 满足 $\xi = (1-\chi)t_0 + \chi t$ 使得

$$u(t) \geq \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} u^{(n-2)}(\xi) \tag{2.11}$$

成立。

选择 $T_\nu \geq 2t_0$, 则当 $t \geq T_\nu$ 时有

$$t - t_0 \geq \frac{1}{2} t. \tag{2.12}$$

由于对一切的 $t \geq T_\nu$，有 $u^{(n)}(t) < 0$, 则 $u^{(n-2)}(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上是一个凸函数, 故

$$\begin{aligned} u^{(n-2)}(\xi) &= u^{(n-2)}((1-\chi)t_0 + \chi t) \\ &\geq (1-\chi) u^{(n-2)}(t_0) + \chi u^{(n-2)}(t) \\ &\geq \chi u^{(n-2)}(t). \end{aligned} \tag{2.13}$$

由 (2.12), (2.13 和 (2.11)，我们有

$$u(t) \geq \nu \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} u^{(n-2)}(t),$$

其中 $\nu = \frac{\chi}{2^{n-2}}$。 □

引理 2.5. [2] 假设当 $t \in [t_0, \infty)$ 时，$u(t) > 0, u'(t) > 0, u''(t) < 0$. 那么对于每个 $\alpha \in (0,1)$ 均存

在 $T_\alpha \geq t_0$ 使得对一切的 $t \geq T_\alpha$ 有
$$\frac{u(\sigma(t))}{\sigma(t)} \geq \alpha \frac{u(t)}{t}$$

3. 方程振动性的判定准则

为简单起见, 引入以下记号:

$$D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}; \qquad D_0 = \{(t,s) : t > s \geq t_0\}.$$

$$q_1(t) = \int_c^d q(s,\xi)d\xi, \qquad \sigma_1(t) = \min_{\xi \in [c,d]} \sigma(t,\xi)$$

记 $\mathcal{X}$ 为 Philos 型积分平均函数类, 一个函数 $H \in C^1(D,\mathbb{R})$ 被称为属于 $\mathcal{X}$ 类 (记为 $H \in \mathcal{X}$) 如果它满足

(i) $H(t,t) = 0, t \geq t_0; H(t,s) > 0, (t,s) \in D_0$;

(ii) $\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} < 0$, 存在 $\rho \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 及 $h \in C(D_0,\mathbb{R})$ 使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} H(t,s) = -h(t,s) H^{\frac{\beta}{1+\beta}}(t,s).$$

定理 3.1. 设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的一个解，$z(t) = x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x(\tau(t,\mu))d\mu$ 满足基本假设 $(H1)-(H6)$，且推论 2.2的条件 (2.6)、引理2.2 的条件 (2.7) 均成立。若存在函数 $\rho \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 及积分平均函数 $H \in \mathcal{X}$，使得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t,s)Q(s) - \frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}} \right] ds = \infty, \tag{3.1}$$

$$Q(s) = \delta(1-p)^\beta \rho(s) \left(\frac{\alpha_1\alpha_2\sigma_1^{n-1}(s)}{(n-2)!s} \right)^\beta q_1(s).$$

且 $a(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上单调递增 (即 $a'(t) > 0$)。那么方程 (1.1) 的任意非平凡解 $x(t)$ 要么在 $[t_0,+\infty)$ 上振动，要么满足

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

证明. 假设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 有一个非振动的非平凡解。不妨取其为最终正解 (最终负解的证明可通过令 $x(t) = -y(t)$ 转化为正解情形, 结合 $f(x)$ 的齐次性 $(H5)$ 可证, 此处略), 即存在 $t_1 \geq t_0$ 使得当 $t \geq t_1$ 时,$x(t) > 0$, 且对任意 $(\mu,\xi) \in [a,b] \times [c,d]$。

由 $z(t)$ 的中立型定义 (1.2), 结合 $x(t)$ 的最终正性与假设 $(H2)$ 中 $0 \leq p(t) \leq p < 1$, 对任意 $t \geq t_1$, 有

$$z(t) = x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x(\tau(t,\mu))d\mu > 0.$$

进一步对 $z(t)$ 做反向估计, 将定义式变形为

$$x(t)=z(t)-\int_a^b p(t,\mu)x(\tau(t,\mu))d\mu>0.$$

由于 $\tau(t,\mu)\le t$ 及 $z(t)$ 的单调性 (引理2.3), 有 $x(\tau(t,\mu))<z(\tau(t,\mu))<z(t)$, 代入上式我们有

$$\begin{aligned}x(t)=z(t)-\int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu\ &>z(t)-\int_a^b p(t,\mu)z[\tau(t,\mu)]d\mu\\ &\ge z(t)-z(t)\int_a^b p(t,\mu)d\mu\ge(1-p)z(t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

上式 (3.2) 为核心正性估计, 后面放缩均基于此式。

利用假设 $(H5)$, 对任意 $x\ne 0$ 有 $f(x)\ge\delta x^\beta$。将其代入方程 (1.1), 结合 $x(t)$ 的最终正性, 得

$$\left(a(t)\left(z^{(n-1)}(t)\right)^\beta\right)'=-\int_c^d q(t,\xi)f\left(x[\sigma(t,\xi)]\right)d\xi\le-\delta\int_c^d q(t,\xi)x^\beta[\sigma(t,\xi)]d\xi,\tag{3.3}$$

将 (3.2) 应用于时滞项 $x[\sigma(t,\xi)]$，即 $x[\sigma(t,\xi)]\ge(1-p)z[\sigma(t,\xi)]$, 代入上式得

$$\left(a(t)[z^{(n-1)}(t)]^\beta\right)'\le-\delta(1-p)^\beta\left(z[\sigma_1(t)]\right)^\beta q_1(t).\tag{3.4}$$

接下来构造带权变形的 Riccati 变换, 记

$$w(t)=\rho(t)\cdot a(t)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\cdot\left(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z^{(n-2)}(t)}\right)^\beta,\quad t\ge t_1.\tag{3.5}$$

对 (3.5) 两边关于 t 求导, 由乘积求导法则与复合函数求导法则, 得

$$\begin{aligned}w'(t)=&\rho'(t)\cdot a(t)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\cdot\left(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z^{(n-2)}(t)}\right)^\beta+\rho(t)\frac{\beta+1}{\beta}a'(t)a(t)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\left(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z^{(n-2)}(t)}\right)^\beta\\ &+\rho(t)\cdot a(t)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\cdot\beta\left(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z^{(n-2)}(t)}\right)^{\beta-1}\frac{z^{(n)}(t)z^{(n-2)}(t)-(z^{(n-1)}(t))^2}{(z^{(n-2)})^2},\end{aligned}\tag{3.6}$$

由方程 (1.1) 可推得 $z^{(n)}(t)$ 的表达式，结合 $a'(t)>0$ 与引理 2.3中 $z^{(n-1)}(t)>0, z^{(n-2)}(t)>0$，化简上式得变形后的 Riccati 导数不等式

$$\begin{aligned}&w'(t)-\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)\\ \le&-\delta(1-p)^\beta\rho(t)q_1(t)\left(\frac{z[\sigma_1(t)]}{z^{(n-2)}(t)}\right)^\beta-\beta\left(\frac{1}{\rho(t)a(t)}\right)^{\frac{1}{\beta}}w(t)^{\frac{\beta+1}{\beta}}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

下面我们结合引理2.4与2.5 做双重估计，由此确定 $z[\sigma_1(t)]$ 与 $z^{n-2}(t)$ 的关系。

利用引理 2.4并选择 $n=l+1$ 及 $u(t)=z(t)$, 则存在正常数 $\alpha_1\in[0,1]$, 使得对任意 $t\ge T_\alpha\ge t_1$，

有

$$z(t) \geq \alpha_1 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} z^{(n-2)}(t). \tag{3.8}$$

由引理2.5, 令 $u(t) = z^{(n-2)}(t)>0$，满足 $u'(t) > 0, u''(t) < 0$，代入引理 2.2, 故存在常数 $\alpha_2 \in [0,1]$，使得对任意 $t \geq T_\alpha$，有

$$z^{(n-2)}(\sigma_1(t)) \geq \alpha_2 \frac{\sigma_1(t)}{t} z^{(n-2)}(t), \tag{3.9}$$

在3.8式中 t 用 $\sigma_1(t)$ 代替，结合3.9式，于是有时滞项 $z[\sigma_1(t)]$ 有如下估计

$$z[\sigma_1(t)] \geq \alpha_1 \frac{\sigma_1^{n-2}(t)}{(n-2)!} z^{(n-2)}(\sigma_1(t)) \geq \alpha_1\alpha_2 \frac{\sigma_1^{n-1}(t)}{(n-2)!t} z^{(n-2)}(t), \tag{3.10}$$

两边取 β 次幂，得

$$\left(\frac{z[\sigma_1(t)]}{z^{(n-2)}(t)}\right)^\beta \geq \left(\frac{\alpha_1\alpha_2\sigma_1^{n-1}(t)}{(n-2)!t}\right)^\beta. \tag{3.11}$$

将 (3.11) 代入变形后的 Riccati 导数不等式 (3.7)，得

$$w'(t) \leq -Q(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \beta \left(\frac{1}{a(t)\rho(t)}\right)^{\frac{1}{\beta}} w^{\frac{\beta+1}{\beta}}(t), \tag{3.12}$$

这里 $Q(t) = \delta(1-p)^\beta \rho(t) \left(\frac{\alpha_1\alpha_2\sigma_1^{n-1}(s)}{(n-2)!t}\right)^\beta q_1(t)$。对 (3.12) 两边同乘 Philos 积分平均函数 $H(t,s) > 0$，并在区间 $[t_2, t](t_2 \geq T_\alpha)$ 上积分，得

$$\int_{t_2}^t H(t,s)Q(s)ds \leq \int_{t_2}^t H(t,s) \left[-w'(s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s) - \beta \left(\frac{1}{\rho(s)a(s)}\right)^{\frac{1}{\beta}} w^{\frac{\beta+1}{\beta}}(s)\right] ds.$$

对右侧积分做分部积分 (利用 $H(t,t) = 0$ 与 $\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = -h(t,s)H^{\frac{\beta}{\beta+1}}(t,s)$)，化简得

$$\int_{t_2}^t H(t,s)Q(s)ds \leq H(t,t_2)w(t_2) - \int_{t_2}^t \left[h(t,s)F(t,s) + \beta \left(\frac{1}{\rho(s)a(s)}\right)^{\frac{1}{\beta}} F^{\frac{\beta+1}{\beta}}(t,s)\right] ds, \tag{3.13}$$

其中 $F(t,s) = w(s)H^{\frac{\beta}{\beta+1}}(t,s)$ 为辅助函数。

取 $p = \beta+1$, $q = \frac{\beta+1}{\beta}$, 利用 $Young$ 不等式，得

$$\begin{aligned} |h(t,s)|F(t,s) &= \left[F(t,s)\left(\frac{1}{\rho(s)a(s)}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} (\beta+1)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right] \left[|h(t,s)| \left(\rho(s)a(s)\right)^{\frac{1}{\beta+1}} (\beta+1)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}\right] \\ &\leq \beta \left(\frac{1}{\rho(s)a(s)}\right)^{\frac{1}{\beta}} F(t,s) + \frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

于是有

$$\beta\left(\frac{1}{\rho(s)a(s)}\right)^{\frac{1}{\beta}} F^{\frac{\beta+1}{\beta}}(t,s) \geq |h(t,s)|F(t,s) - \frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}}. \tag{3.15}$$

将 (3.15) 应用于不等式 (3.13) 由此导出

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)Q(s)ds \leq H(t,t_2)w(t_2) + \int_{t_2}^{t} \frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}}ds$$

$$-\int_{t_2}^{t} [h(t,s)+|h(t,s)|]F(t,s)ds, \tag{3.16}$$

那么这变成

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_2}^{t}\left[H(t,s)Q(s)ds - \frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}}\right]ds \leq \frac{H(t,t_2)}{H(t,t_0)}w(t_2). \tag{3.17}$$

由 $\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} < 0$ 可知 $H(t,s)$ 关于 s 单调减少，得 $\frac{H(t,t_2)}{H(t,t_0)} < 1$ 且 $w(t_2)$ 为有限常数，故上式右侧为有界量。由条件 (3.1) 知, 左侧为无穷大量，与右侧的有界性产生矛盾。因此，原反证法的假设不成立，即方程 (1.1) 不存在非振动的非平凡解。再结合推论 2.2的条件 (2.6) 与引理2.2的条件 (2.7)，可得: 方程 (1.1) 的任意非平凡解要么在 $[t_0,\infty)$ 上振动，要么满足

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

□

定理 3.2. 假设除条件 (3.1) 外, 定理 3.1的其他条件都满足。进一步, 对于每个 T，设

$$0 < \inf_{s\geq T}\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,T)} \leq \infty, \tag{3.18}$$

及

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{T}^{t}\frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{H(t,T)}ds < \infty \tag{3.19}$$

成立。如果存在 $\psi \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{T}^{t}\left[\frac{\psi_+^{\beta+1}(s)}{\rho(s)a(s)}\right]^{1/\beta} ds = \infty \tag{3.20}$$

其中 $\psi_+(s) = \max\{\psi(s), 0\}$, 并满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[H(t,s)Q(s) - \frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}}\right]ds \geq \psi(T). \tag{3.21}$$

那么方程 (1.1) 的每个解 $x(t)$ 要么是振动的, 要么趋于零。

证明. 类似定理 3.1的证明, 有 (3.9)。由此可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}(H(t,s)Q(s)-G(t,s))\,ds\le w(t_2)-$$
$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[h(t,s)F(t,s)+B(s)(F(t,s))^{\frac{\beta+1}{\beta}}+G(t,s)\right]ds,$$

其中 $G(t,s)=\frac{a(s)\rho(s)h^{\beta+1}(t,s)}{(\beta+1)^{\beta+1}}$.

由 (3.23), 有

$$\psi(t_2)\le w(t_2)-\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[h(t,s)F(t,s)+B(s)(F(t,s))^{\frac{\beta+1}{\beta}}+G(t,s)\right]ds$$

成立。因此

$$\begin{aligned}0\le&\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[h(t,s)F(t,s)+B(s)(F(t,s))^{\frac{\beta+1}{\beta}}+G(t,s)\right]ds\\ \le&w(t_2)-\psi(t_2)<\infty.\end{aligned}\tag{3.22}$$

设

$$\alpha(t)=\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}h(t,s)F(t,s)ds.$$
$$\beta(t)=\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}B(s)(F(t,s))^{\frac{\beta+1}{\beta}}ds.$$

那么, 由 (3.19) 和 (3.22) 可得

$$\liminf_{t\to\infty}[\alpha(t)+\beta(t)]<\infty.$$

这个定理余下部分的证明完全相似于文献 [15,16] 中定理的证明, 因此省略。由于 (2.6) 及 (2.7) 成立, 故由推论2.2及引理2.2, 可以证明方程 (1.1) 的每个解 $x(t)$ 要么是振动的, 要么趋于零。 □

定理 3.3. 若除了条件 (3.19) 外, 定理3.2的所有假设都成立, 另外假设下面条件成立

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)Q(s)ds<\infty.\tag{3.23}$$

方程 (1.1) 的每个解 $x(t)$ 要么是振动的, 要么趋于零。

定理3.3的证明与定理3.2类似, 因此省略。

注 3.1. 当 $\beta=1,n=3$ 时, 带有条件 (3.19) 的定理 3.1-3.3分别对应文献 Zhang [10] 中定理3.1-3.3. 当 $n=3$ 时, 带有条件 (3.19) 的定理3.1-3.3 分别对应文献 Qin [9] 中定理 3.1-3.3。

基金项目

本论文由湖南省哲学社会科学成果评审委员会课题 (项目编号：XSP26YBC118) 资助。

参考文献

[1] Alrashdi, H.S., Albalawi, W., Muhib, A., Moaaz, O. and Elabbasy, E.M. (2024) Kamenev-Type Criteria for Testing the Asymptotic Behavior of Solutions of Third-Order Quasi-Linear Neutral Differential Equations. *Mathematics*, **12**, Article 1734. https://doi.org/10.3390/math12111734

[2] Batiha, B., Alshammari, N., Aldosari, F., Masood, F. and Bazighifan, O. (2025) Asymptotic and Oscillatory Properties for Even-Order Nonlinear Neutral Differential Equations with Damping Term. *Symmetry*, **17**, Article 87. https://doi.org/10.3390/sym17010087

[3] Chatzarakis, G.E., Grace, S.R. and Jadlovská, I. (2021) On the Sharp Oscillation Criteria for Half-Linear Second-Order Differential Equations with Several Delay Arguments. *Applied Mathematics and Computation*, **397**, Article ID: 125915. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125915

[4] Jadlovská, I., Chatzarakis, G.E., Džurina, J. and Grace, S.R. (2021) On Sharp Oscillation Criteria for General Third-Order Delay Differential Equations. *Mathematics*, **9**, Article 1675. https://doi.org/10.3390/math9141675

[5] Jadlovská, I., Džurina, J., Graef, J.R. and Grace, S.R. (2022) Sharp Oscillation Theorem for Fourth-Order Linear Delay Differential Equations. *Journal of Inequalities and Applications*, **2022**, Article No. 122. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02859-0

[6] Wang, Y., Meng, F. and Gu, J. (2021) Oscillation Criteria of Third-Order Neutral Differential Equations with Damping and Distributed Deviating Arguments. *Advances in Difference Equations*, **2021**, Article No. 515. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03661-w

[7] Zafer, A. (1998) Oscillation Criteria for Even Order Neutral Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **11**, 21-25. https://doi.org/10.1016/s0893-9659(98)00028-7

[8] Zhang, Q., Yan, J. and Gao, L. (2010) Oscillation Behavior of Even-Order Nonlinear Neutral Differential Equations with Variable Coefficients. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 426-430. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.027

[9] Qin, G., Huang, C., Xie, Y. and Wen, F. (2013) Asymptotic Behavior for Third-Order Quasi-Linear Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **2013**, Article No. 305. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-305

[10] Zhang, Q., Gao, L. and Yu, Y. (2012) Oscillation Criteria for Third-Order Neutral Differential Equations with Continuously Distributed Delay. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1514-1519. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.01.007

[11] 李文娟, 汤获, 俞元洪, 等. 偶阶非线性中立型时滞微分方程的振动性 [J]. 应用数学学报, 2019, 42(2): 229-241.

[12] Moaaz, O., Cesarano, C. and Almarri, B. (2023) An Improved Relationship between the Solution and Its Corresponding Function in Fourth-Order Neutral Differential Equations and Its Applications. *Mathematics*, **11**, Article 1708. https://doi.org/10.3390/math11071708

[13] 林文贤. 一类具阻尼项的三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2016, 55(6): 52-56.

[14] Agarwal, R.P., Grace, S.R. and O'Regan, D. (2013) Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Springer.

[15] Tiryaki, A. and Aktaş, M.F. (2007) Oscillation Criteria of a Certain Class of Third Order Nonlinear Delay Differential Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **325**, 54-68. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.001

[16] 曾云辉, 罗李平, 汪志红, 等. 一类具阻尼项的三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性和渐近性 [J]. 振动与冲击, 2021, 40(8): 19-27.