Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 102-113
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156270

一类生成森林的反拉姆齐数

徐泓坚，潘林舒*

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期：2026 年 5 月 9 日；录用日期：2026 年 6 月 3 日；发布日期：2026 年 6 月 9 日

摘 要

给定边染色图 G, 若 G 任意两条边的颜色均不同, 则称 G 为彩虹图. 给定图 G 及其子图 H, H 在 G 中的反拉姆齐数, 记作 $AR(G,H)$, 表示最大颜色数 k, 使得存在图 G 的 k-边染色, G 中不包含彩虹子图 H. 本文将给出 K_{2t+7} 中, P_3, P_4 与匹配的并图所构成的短线性森林的反拉姆齐数精确值。

关键词

反拉姆齐数，线性森林，彩虹图

Anti-Ramsey Numbers of a Class of Spanning Forests

Hongjian Xu, Linshu Pan*

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: May 9, 2026; accepted: June 3, 2026; published: June 9, 2026

Abstract

Given an edge-colored graph G, if every two edges of G have distinct colors, then G

* 通讯作者。

文章引用: 徐泓坚, 潘林舒. 一类生成森林的反拉姆齐数 [J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 102-113.
DOI: 10.12677/aam.2026.156270

is said to be a rainbow graph. For a graph G and its subgraph H , the anti-Ramsey number of H in G , denoted by $AR(G,H)$, is defined as the maximum integer k such that there exists a k-edge-coloring of G containing no rainbow subgraph isomorphic to H. In this paper, we determine the exact anti-Ramsey number for short linear forests consisting of the union of P_3, P_4 and matchings in K_{2t+7}.

Keywords

Anti-Ramsey Number, Linear Forests, Rainbow Graph

1. 引言

Erdős 等 [1] 首次引入了反拉姆齐数的概念. 迄今研究者对不同母图中各类子图的反拉姆齐数已取得了丰硕成果. 近年来研究者研究由匹配与若干小分支的图的并图构成的线性森林.

设 G 是一个简单图, 图 G 的边染色对于函数 $c: E(G) \to \mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 是颜色集合. 边染色图 G 称为彩虹图，若 G 中所有边的颜色各不相同. 给定图 G 的边染色 c, $c(G)$ 表示 G 中所有边的颜色构成的集合, $c(e)$ 表示边 $e \in E(G)$ 的颜色. 对边子集 $F \subset E(G)$, 记 $c(F)$ 为 F 中所有边的颜色构成的集合. 设 X 和 Y 为 $V(G)$ 的两个不相交的顶点子集, 则记 $[X,Y]_G$ 为 G 中所有连接 X 与 Y 中顶点的边的集合. 若 $G = K_n$, 则简记为 $[X,Y]$. 若 $X = \{v\}$, 则简记为 $[v,Y]_G$. 给定边染色图 K_n，令 $X \subset V(K_n)$, 记 $l(X) = c(K_n) \backslash c(K_n - X)$. 当 $X = \{v\}$ 时, 简记为 $l(v)$. 称 $|l(v)|$ 为顶点 v 在 K_n 中的饱和度. 顶点 w 饱和顶点 v 当且仅当 $c(wv) \in l(v)$. 此时, 称 w 为 v 的饱和点.

Gilboa 与 Roditty 在 [2] 研究了当 n 充分大时, 完全图 K_n 中 $L \cup tP_2$ 与 $L \cup kP_3$ 的反拉姆齐数，给出了若干特殊的图 L 的具体结果, 包括 P_3, P_4, C_3 等. 随后, Xie 等 [8] 给出当 n 充分大时, 至少含一个偶路分支的线性森林的反拉姆齐数精确值. 文献 [3–7] 研究了完全图 K_n 中匹配和一类短路组成的线性森林的反拉姆齐数. 目前, 研究者们大多给出完全图 K_n 中两类连通分支所构成的线性森林的反拉姆齐数, 本文将研究对象推广到含有三类连通分支所构成的线性森林. 本文研究 $P_3 \cup P_4$ 与匹配的并图构成的短线性森林, 给出当 $n = 2t + 7$ 且 $t \geq 2$ 时, $AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2)$ 的精确值.

2. 主要结论

定理 2.1. [3] 令 $n_1(t)=\frac{5t+11}{2}+\frac{3}{t}$. 对任意整数 $t\geq 2$ 且 $n\geq 2t+7$, 有

$$AR(K_n,2P_3\cup tP_2)=\begin{cases}(t+1)(2t+3)+1, & 若\ 2t+7\leq n\leq \lfloor n_1(t)\rfloor,\\ t(n-\frac{t+1}{2})+1, & 若\ n\geq \lceil n_1(t)\rceil.\end{cases}$$

定理 2.2. 对任意的整数 $t\geq 2$ 且 $n=2t+7$, 有

$$AR(K_n,P_3\cup P_4\cup tP_2)=(t+2)(2t+5)+1.$$

证明. 首先证明 $AR(K_n,P_3\cup P_4\cup tP_2)$ 的下界. 构造 K_n 边染色如下. 取完全图 K_n 的子图 $G=K_{2t+5}$, 将 G 的所有边染不同的颜色, $K_n-E(G)$ 中的所有边染同一种新的颜色. 这样得到了 K_n 的 $((t+2)(2t+5)+1)$-边染色, 且 K_n 中不存在同构于 $P_3\cup P_4\cup tP_2$ 的彩虹子图. 由此可得 $AR(K_n,P_3\cup P_4\cup tP_2)\geq (t+2)(2t+5)+1$.

现证明 $AR(K_n,P_3\cup P_4\cup tP_2)$ 的上界. 根据定理2.1, 有 $AR(K_n,2P_3\cup tP_2)=(t+1)(2t+3)+1$. 令 c 为 K_n 的任意 $((t+2)(2t+5)+2)$-边染色. 由 $|c(K_n)|>AR(K_n,2P_3\cup tP_2)$, 可知 K_n 中存在一个同构于 $2P_3\cup tP_2$ 的彩虹子图, 记为 H, 其中 $H=H_1\cup H_2$. 令 $H_1=tP_2$ 且 $E(H_1)=\{e_i|e_i=x_iy_i,1\leq i\leq t\}$. 令 $H_2=2P_3$, 其中 $P_3^1=v_1v_2v_3$ 且 $P_3^2=v_4v_5v_6$.

取 G 为 K_n 的一个边数为 $|c(K_n)|$ 的彩虹生成子图, 且满足 $H\subseteq G$. 令 $D=V(K_n)-V(H)=\{v\}$. 我们须证明 K_n 中存在同构于 $P_3\cup P_4\cup tP_2$ 的彩虹子图. 利用反证法, 假设 K_n 中不存在同构于 $P_3\cup P_4\cup tP_2$ 的彩虹子图. 进而有 $[v,\{v_1,v_3,v_4,v_6\}]_G=\emptyset$, 此外, $c([v,\{v_1,v_3,v_4,v_6\}]_G)\subseteq c(H)$. 从而可得 $|[v,V(H)]_G|\leq 2t+2$.

断言 1. $[V(H_1),V(H_2)]_G\neq\emptyset$.

断言 *1* 证明: 假设 $[V(H_1),V(H_2)]_G=\emptyset$, 则

$$\begin{aligned}|E(G)|=&|E(G[V(H_1)])|+|E(G[V(H_2)])|+|[V(H_1),V(H_2)]_G|+|[v,V(H)]_G|\\ \leq&15+\binom{2t}{2}+2t+2=2t^2+t+17\\ <&2t^2+9t+12=|c(K_n)|\end{aligned}$$

对任意 $t\geq 2$ 均成立, 这与 $|E(G)|=|c(K_n)|$ 矛盾. 因此 $|[V(H_1),V(H_2)]_G|\geq 1$. ■

根据子图 H 的对称性, 我们只需对 $[V(H_1),V(H_2)]_G$ 分以下两种情况讨论.

情形 1 $v_6y_1\in E(G)$.

断言 2. $[v, V(H)]_G \neq \emptyset$.

断言 2 证明： 假设 $[v, V(H)]_G = \emptyset$. 显然有 $c(vv_3) \in c(H)$ 成立.

假设 $c(vv_3) \in c(H_2)$. 若 $c(vv_3) = c(v_5v_6)$, 则 $v_1v_2v_3v, x_1y_1v_6$ 与 $H_1 - V(e_1) + v_4v_5$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $c(vv_3) \neq c(v_5v_6)$.

不妨假设 $c(vv_3) = c(v_1v_2)$. 若 $[v_1, \{v_4, v_6\}]_G \neq \emptyset$, 则 $G[V(H_2) \cup \{v\}]$ 包含同构于 $P_3 \cup P_4$ 的彩虹子图, 即 $vv_3v_2 \cup v_1v_4v_5v_6$, 或 $vv_3v_2 \cup v_1v_6v_5v_4$, 该彩虹子图与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $[v_1, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 若 $v_2v_6, v_1v_5 \in E(G)$, 则 $vv_3v_2v_6, v_1v_5v_4$ 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|\{v_2v_6, v_1v_5\} \cap E(G)| \leq 1$. 从而 $|[\{v_1, v_2\}, V(P_3^2)]_G| \leq 3$.

若 $|[\{v_1, v_2\}, V(P_3^2)]_G| \leq 2$, 则 $|E(G[V(H_2)])| \leq 11$. 若 $|[\{v_1, v_2\}, V(P_3^2)]_G| = 3$，如果 $v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6 \in E(G)$. 那么 $v_1v_3v, v_4v_2v_6v_5$ 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|\{v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6\} \cap E(G)| \leq 2$, 进而 $|E(G[V(H_2)])| \leq 11$.

观察 1. 对任意 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[\{v_1, v_2\}, V(e_i)]_G| \leq 2$.

观察 1 证明： 假设存在 $1 \leq i \leq t$, 使得 $|[\{v_1, v_2\}, V(e_i)]_G| \geq 3$. 根据 e_i 中 x_i, y_i 的对称性, 不妨令 $x_iv_1, x_iv_2, y_iv_1 \in E(G)$, 那么 $y_ix_iv_1v_2, v_3v$ 与 P_3^2, $H_1 - V(e_i)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此对任意的 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[\{v_1, v_2\}, V(e_i)]_G| \leq 2$, 从而可得对任意的 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]| \leq 10$. □

因此 $|[V(H_1), V(H_2)]| \leq 10t$, 有

$$
\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& 11 + \binom{2t}{2} + 10t = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}
$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾.

假设 $c(vv_3) = c(v_2v_3)$. 显然 $v_1v_3 \notin E(G)$.

观察 2. $|[\{v_2, v_3\}, V(P_3^2)]_G| \leq 3$.

观察 2 证明： 显然 $v_3v_4 \notin E(G)$, 否则 $v_6v_5y_1x_1, vv_3v_4$ 和 $H_1 - V(e_1) + v_1v_2$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾.

假设 $v_2v_4, v_3v_5 \in E(G)$. 此时 $vv_3v_5v_6, v_1v_2v_4$ 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_2v_4, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 1$. 假设 $v_2v_5, v_3v_6 \in E(G)$. 此时, $v_1v_2v_5v_4, vv_3v_6$ 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|\{v_2v_5, v_3v_6\} \cap E(G)| \leq 1$, 进而 $|[\{v_2, v_3\}, V(P_3^2)]_G| \leq 3$. □

由此可得 $|E(G[V(H_2)])| \leq 11$. 此外, 对所有的 $1 \leq i \leq t$, 有 $[V(P_3^1), V(e_i)]_G = \emptyset$. 否则, 根据

e_i 中 x_i, y_i 的对称性, 不妨令 $v_1x_i \in E(G)$, 那么 $vv_3, v_2v_1x_iy_i$ 与 P_3^2, $H_1 - V(e_i)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \le 6t$, 进而

$$\begin{aligned}|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\ \le& 11 + \binom{2t}{2} + 6t = 2t^2 + 5t + 11 \\ <& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对任意 $t \ge 2$ 均成立, 矛盾.

假设 $c(vv_3) = c(v_4v_5)$. 显然有 $v_4v_6 \notin E(G)$. 与观察1的推导类似可得, 对任意 $1 \le i \le t$, 有 $|[\{v_4, v_5\}, V(e_i)]_G| \le 2$, 进而 $|[V(H_1), V(H_2)]| \le 10t$. 与观察2的推导类似可得, $|[\{v_4, v_5\}, V(P_3^1)]_G| \le 3$, 因此 $|E(G[V(H_2)])| \le 11$, 进而

$$\begin{aligned}|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\ \le& 11 + \binom{2t}{2} + 10t = 2t^2 + 9t + 11 \\ <& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对任意 $t \ge 2$ 均成立, 矛盾.

因此 $c(vv_3) \in c(H_1)$. 假设 $c(vv_3) = c(e_1)$. 若 $[x_1, V(H_2)]_G \ne \emptyset$, 则 $G[V(H_2 \cup e_1) \cup \{v\}]$ 包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 $H_1 - V(e_1)$ 形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $[x_1, V(H_2)]_G \ne \emptyset$. 若存在 $2 \le i \le t$, 使得 $|[V(e_1), V(e_i)]_G| \ge 2$, 则 $G[V(\{e_1, e_i\})] - e_1$ 包含同构于 P_4 的彩虹子图, 该子图与 P_3^2, $H_1 - V(\{e_1, e_i\}) + v_1v_2 + v_3v$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得, 对所有的 $2 \le i \le t$, 有 $|[V(e_1), V(e_i)]_G| \le 2$. 从而 $|E(G[V(H_1)])| \le \binom{2t}{2} - 2(t-1) = 2t^2 - 3t + 2$. 进而

$$\begin{aligned}|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\ \le& 15 + (2t^2 - 3t + 2) + (12t - 6) = 2t^2 + 9t + 11 \\ <& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对任意 $t \ge 2$ 均成立, 矛盾.

不失一般性, 令 $c(vv_3) = c(e_2)$. 与 $c(vv_3) = c(e_1)$ 情形中的推导类似可得, 对所有的 $1 \le i \le t$ 且 $t \ne 2$, 有 $|[V(e_2), V(e_i)]_G| \le 2$, 从而 $|E(G[V(H_1)])| \le \binom{2t}{2} - 2(t-1) = 2t^2 - 3t + 2$. 假设 $|[V(P_3^2), V(e_2)]_G| \ge 4$. 此时, $[V(P_3^2), V(e_2)]_G$ 包含两条顶点不相交的独立边, $G[V(P_3^1 \cup e_2)]$ 中有同构于 $P_3 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该彩虹子图与 $v_1v_2v_3v$, $H_1 - V(e_2)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的

彩虹子图, 矛盾. 从而推得 $|[V(P_3^2), V(e_2)]_G| \leq 3$ 且 $|[V(e_2), V(H_2)]_G| \leq 6$. 进而

$$\begin{aligned}|E(G)| =&|E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G|\\ \leq&15 + (2t^2 - 3t + 2) + (12t - 6) = 2t^2 + 9t + 11\\ <&2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 由此可知 $[v, V(H)]_G \neq \emptyset$. ■

根据断言 2, 有 $[v, V(H)]_G \neq \emptyset$. 现给出如下断言.

断言 3. $[v, V(H_1)]_G = \emptyset$.

断言 *3* 证明: 假设 $[v, V(H_1)]_G \neq \emptyset$, 那么存在 $1 \leq i \leq t$, 使得 $[v, V(e_i)]_G \neq \emptyset$. 此时, $G[V(e_i) \cup \{v\}]$ 包含同构于 P_3 的彩虹子图.

观察 3. $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$.

观察 *3* 证明: 显然 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 若 $|\{v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6\} \cap E(G)| \geq 3$, 则 $G[V(H_2)]$ 包含同构于 $P_4 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 x_iy_iv, $H_1 - V(e_i)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6\} \cap E(G)| \leq 2$. 根据 H_2 中 P_3^1 与 P_3^2 的对称性, 同理可得 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 2$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$. □

显然 $vx_1 \notin E(G)$, 否则 $v_4v_5v_6y_1, P_3^1$ 与 $H_1 - V(e_1) + x_1v$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|[v, V(H)]_G| \leq 2t + 2 - 1 = 2t + 1$.

假设 $vy_1 \in E(G)$. 显然 $[x_1, \{v_1, v_3, v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 若不然, $G[V(H_2 \cup e_1) \cup \{v\}]$ 包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 $H_1 - V(e_1)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|[V(H_2), V(e_1)]_G| \leq 8$.

观察 4. 对任意 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(H_2), V(e_i)]_G| \leq 8$.

观察 *4* 证明: 假设存在 $2 \leq i \leq t$, 使得 $|[V(H_2), V(e_i)]_G| \geq 9$. 由假设可知 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \geq 3$ 或 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \geq 3$. 由 e_i 中 x_i 和 y_i 的对称性, 不妨令 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \geq 3$, 记 $v_1x_i, v_3x_i, v_4x_i \in E(G)$. 此外, 有 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \geq 1$, 记 $v_1y_i \in E(G)$. 此时, $y_iv_1v_2v_3$, x_1y_1v 与 $H_1 - V(\{e_2, e_i\}) + v_5v_6 + v_4x_i$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此对任意的 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \leq 8$. □

因此对所有的 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[V(H_2), V(e_i)]_G| \leq 8$, 进而 $|[V(H_1), V(H_2)]_G \leq 8t$. 此时

$$\begin{aligned}|E(G)| =&|E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G|\\ \leq&9 + \binom{2t}{2} + 8t + 2t + 1 = 2t^2 + 9t + 10\\ <&2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 由此可得 $vy_1 \notin E(G)$. 从而 $[v, V(e_1)]_G = \emptyset$.

由 $[v, V(H_1)]_G \neq \emptyset$ 且 $[v, V(e_1)]_G = \emptyset$ 可知, $|[v, V(H)]_G| \leq 2(t-1) + 2 = 2t$ 且存在 $2 \leq$

$i \le t$, 使得 $[v, V(e_i)]_G \ne \emptyset$. 不失一般性, 令 $[v, V(e_2)]_G \ne \emptyset$, 记 $vy_2 \in E(G)$. 根据观察3可知, $|E(G[V(H_2)])| \le 9$.

由 $v_6y_1 \in E(G)$ 可知, $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_1]_G = \emptyset$. 若不然, $G[V(H_2 \cup e_1)]$ 包含同构于 $P_4 \cup 2P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 x_2y_2v, $H_1 - V(\{e_1, e_2\})$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|[V(e_1), V(H_2)]_G| \le 8$.

假设 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_2]_G \ne \emptyset$. 根据 H_2 的对称性, 不妨令 $v_1x_2 \in E(G)$. 此时, $vy_2x_2v_1$, P_3^2 与 $H_1 - V(e_2) + v_2v_3$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_2]_G = \emptyset$, 进而 $|[V(e_2), V(H_2)]_G| \le 8$.

假设存在 $3 \le i \le t$, 使得 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \ge 9$, 由假设可知 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \ge 3$ 或 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \ge 3$. 根据 e_i 中 x_i 和 y_i 的对称性, 不妨令 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \ge 3$, 记 $v_1x_i, v_3x_i, v_4x_i \in E(G)$. 此外, 有 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \ge 1$, 记 $v_1y_i \in E(G)$. 此时, $y_iv_1v_2v_3$, vy_2x_2 与 $H_1 - V(\{e_2, e_i\}) + v_5v_6 + v_4x_i$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得, 对所有的 $3 \le i \le t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \le 8$. 因此 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \le 8t$, 进而

$$
\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\le& \binom{2t}{2} + 9 + 8t + 2t = 2t^2 + 9t + 9 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}
$$

对所有 $t \ge 2$ 均成立, 矛盾. 由此可得, 对 $2 \le i \le t$, 有 $[v, V(e_i)]_G = \emptyset$. 又由 $[v, V(e_1)]_G = \emptyset$ 可得, $[v, V(H_1)]_G = \emptyset$, 矛盾. ■

由 $[v, V(H)]_G \ne \emptyset$ 且 $[v, V(H_1)]_G = \emptyset$ 可知, $1 \le |[v, V(H_2)]_G| \le 2$. 根据 H_2 中 P_3^1 和 P_3^2 的对称性, 不妨令 $vv_2 \in E(G)$, 则 $v_1v_3 \notin E(G)$ 且 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 若 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| = 3$, 则 $vv_2v_1, v_4v_6v_5v_3$ 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \le 2$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| \le 9$.

假设存在 $1 \le i \le t$, 使得 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \ge 9$, 由假设可知 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \ge 3$ 或 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \ge 3$. 根据 e_i 中 x_i 和 y_i 的对称性, 不妨令 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \ge 3$, 记 $v_1x_i, v_3x_i, v_4x_i \in E(G)$. 此外, 有 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \ge 1$, 记 $v_1y_i \in E(G)$. 此时, $x_iv_4v_5v_6$, vv_2v_3 与 $H_1 - V(e_i) + v_1y_i$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此对所有 $1 \le i \le t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \le 8$, 进而 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \le 8t$. 此时

$$
\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\le& \binom{2t}{2} + 9 + 8t + 2 = 2t^2 + 7t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}
$$

对任意 $t \ge 2$ 均成立, 矛盾.

情形 2 $v_5y_1 \in E(G)$.

断言 4. $[v, V(H)]_G \neq \emptyset$.

断言 4 证明： 假设 $[v, V(H)]_G = \emptyset$. 显然, $c(vv_6) \in c(H)$.

假设 $c(vv_6) \in c(H_2)$. 若 $c(vv_6) = c(v_5v_6)$, 则 $P_4 = v_4v_5y_1x_1$, P_3^1 与 $H_1 - V(e_1) + vv_6$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $c(vv_6) \neq c(v_5v_6)$. 根据 v_1v_2 与 v_2v_3 的对称性, 只需考虑 $c(vv_6) \in c(v_1v_2, v_4v_5)$.

假设 $c(vv_6) = c(v_1v_2)$. 显然 $v_1v_3 \notin E(G)$.

观察 5. $|[\{v_1, v_2\}, V(P_3^2)]_G| \leq 3$.

观察 5 证明： 若 $v_1v_6 \notin E(G)$, 则 $v_4v_5y_1x_1, v_1v_6v$ 和 $H_1 - V(e_1) + v_2v_3$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $v_1v_6 \notin E(G)$.

若 $v_1v_4, v_2v_4 \in E(G)$, 则 $v_1v_4v_2v_3, v_5v_6v$ 和 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_1v_4, v_2v_4\} \cap E(G)| \leq 1$. 若 $v_1v_5, v_2v_6 \in E(G)$, 则 $v_3v_2v_6v, v_1v_5v_4$ 和 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|\{v_1v_5, v_2v_6\} \cap E(G)| \leq 1$, 进而 $|[\{v_1, v_2\}, V(P_3^2)]_G| \leq 3$.
□

由 $v_1v_3 \notin E(G)$ 和观察5可知, $|E(G[V(H_2)])| \leq 11$.

观察 6. 对任意 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[\{v_1, v_2\}, V(e_i)]_G| \leq 2$.

观察 6 证明： 假设存在 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[\{v_1, v_2\}, V(e_i)]_G| \geq 3$. 由假设可知 $[\{v_1, v_2\}, V(e_i)]_G$ 中包含两条顶点不交的独立边, 不妨记为 $v_1x_i, v_2y_i \in E(G)$. 此时, $v_1x_i, v_3v_2y_i, v_4v_5v_6v$ 与 $H_1 - V(e_i)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. □

由此可得, 对任意 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \leq 10$, 因此 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 10t$, 进而

$$
\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& \binom{2t}{2} + 11 + 10t = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}
$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. □

因此 $c(vv_6) = c(v_4v_5)$. 与观察5的推导类似可得, $|[\{v_4, v_5\}, V(P_3^1)]_G| \leq 3$. 与观察6的推导类似可得, 对任意 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[\{v_4, v_5\}, V(e_i)]_G| \leq 2$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| \leq 11$. 由 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 10t$ 可知,

$$
\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& \binom{2t}{2} + 11 + 10t = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}
$$

对所有 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 由此可得 $c(vv_6) \neq c(H_2)$.

因此 $c(vv_6) \in c(H_1)$. 假设 $c(vv_6) = c(e_1)$. 若存在 $2 \leq i \leq t$, 使得 $|[V(e_1), V(e_i)]_G| \geq 3$, 根据 e_i 中 x_i, y_i 的对称性, 不妨令 $x_ix_1, x_iy_1, y_ix_1 \in E(G)$, 那么 $x_1y_ix_iy_1, P_3^1$ 与 $H_1 - V(\{e_1, e_i\}) + v_4v_5 + v_6v$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得, 对任意 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_1), V(e_i)]_G| \leq 2$. 因此

$$|E(G[V(H_1)])| \leq \binom{2t}{2} - 2(t-1) = 2t^2 - 3t + 2.$$

观察 7. $|[V(e_1), V(H_2)]_G| \leq 6$.

观察 7 证明： 注意到 $[\{v_1, v_3, v_4\}, x_1]_G = \emptyset$. 假设 $[y_1, \{v_1, v_3\}]_G \neq \emptyset$. 那么 $[\{v_2, v_5, v_6\}, x_1]_G = \emptyset$, 否则 $G[V(H_2 \cup e_1) \cup \{v\}]$ 中包含一个同构于 $P_3 \cup P_4 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 $H_1 - V(e_1)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|[V(e_1), V(H_2)]_G| \leq 6$.

假设 $[y_1, \{v_1, v_3\}]_G = \emptyset$. 若 $v_4y_1, v_5x_1 \in E(G)$, 那么 $y_1v_4v_5x_1, P_3^1$ 与 $H_1 - V(e_1) + vv_6$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_4y_1, v_3x_1\} \cap E(G)| \leq 1$, 进而 $|[V(e_1), V(H_2)]_G| \leq 6$. □

根据观察7可得, $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 12t - 6$. 从而

$$\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& 15 + 2t^2 - 3t + 2 + 12t - 6 = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 由此可得 $c(vv_6) \neq c(e_1)$.

不失一般性, 不妨令 $c(vv_6) = c(e_2)$. 假设 $|[V(e_2), V(P_3^1)]_G| \geq 4$. 那么 $[V(e_2), V(P_3^1)]_G$ 中包含两条顶点不交的独立边. 此时, $G[V(H_2 \cup e_2) \cup \{v\}]$ 中存在同构于 $P_3 \cup P_4 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 $H_1 - V(e_2)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|[V(e_2), V(P_3^1)]_G| \leq 3$.

假设存在 $1 \leq i \leq t$ 且 $i \neq 2$, 有 $|[V(e_2), V(e_i)]_G| \geq 3$. 根据 e_i 和 e_1 的对称性, 不妨令 $x_ix_2, x_iy_2, y_ix_2 \in E(G)$, 那么 $x_2y_ix_iy_2$ 与 P_3^1, $H_1 - V(\{e_2, e_i\}) + v_4v_5 + v_6v$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得, 对所有的 $1 \leq i \leq t$ 且 $i \neq 2$, 有 $|[V(e_2), V(e_i)]_G| \leq 2$.

因此 $|[V(e_2), V(H_2)]_G| \leq 6$. 结合 $|E(G[V(H_1)])| \leq \binom{2t}{2} - 2(t-1) = 2t^2 - 3t + 2$, 可得

$$\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& 15 + 2t^2 - 3t + 2 + 12t - 6 = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 根据上述分析可得, $c(vv_6) \notin c(H)$. 这与 $c(vv_6) \in c(H)$ 的假设矛盾. 因此 $|[v, V(H)]_G| \geq 1$. ■

断言 5. $[v, V(H_1)]_G = \emptyset$.

断言 *5* 证明： 假设 $[v, V(H_1)]_G \neq \emptyset$. 因此存在 $1 \leq i \leq t$, 使得 $|[v, V(e_i)]_G| \geq 1$. 此时, $G[V(e_i) \cup \{v\}]$ 中包含同构于 P_3 的彩虹子图, 记为 Q.

观察 8. $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$.

观察 *8* 证明： 注意到 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 若 $v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6 \in E(G)$, 则 $v_1v_3v_2v_4$, Q 与 $H_1 - V(e_i) + v_5v_6$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|\{v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6\} \cap E(G)| \leq 2$. 根据 H_2 中 P_3^1 和 P_3^2 的对称性, 同理可得 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 2$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$. □

不妨令 $i = 1$. $vx_1 \in E(G)$. 有下述观察成立.

观察 9. 对任意 $1 \leq j \leq t$, 有 $|[V(e_j), V(H_2)]_G| \leq 8$.

观察 *9* 证明： 由于 K_n 不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_1]_G = \emptyset$. 因此 $|[V(e_1), V(H_2)]_G| \leq 8$.

不失一般性, 不妨假设 $|[V(e_2), V(H_2)]_G| \geq 9$. 由假设可知, $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_2]_G| \geq 3$ 或 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_2]_G| \geq 3$. 根据 e_2 中 x_2 和 y_2 的对称性, 不妨令 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_2]_G| \geq 3$, 记 $x_2v_1, x_2v_3, x_2v_4 \in E(G)$. 此外, 有 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_2]_G| \geq 1$, 记 $y_2v_1 \in E(G)$. 此时, $y_2v_1v_2v_3$, x_2y_2v 与 $H_1 - V(\{e_1, e_2\}) + v_4x_2 + v_5v_6$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|[V(e_2), V(H_2)]_G| \leq 8$. 因此对所有的 $1 \leq j \leq t$, 有 $|[V(e_j), V(H_2)]_G| \leq 8$. □

进而 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 8t$, 有

$$\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& \binom{2t}{2} + 9 + 8t + 2t + 2 = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}$$

对所有 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 因此 $vx_1 \notin E(G)$.

因此 $vy_1 \in E(G)$. 显然 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_1]_G = \emptyset$. 对任意 $2 \leq j \leq t$, 有 $[x_j, \{v_1, v_3\}]_G = \emptyset$ 或 $[y_j, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 否则 $G[V(H_2 \cup e_j)]$ 中包含同构于 $P_4 \cup 2P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 x_1y_1v, $H_1 - V(\{e_1, e_j\})$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 根据 H_1 的对称性, 对所有的 $2 \leq j \leq t$, 有 $[x_j, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$ 或 $[y_j, \{v_1, v_3\}]_G = \emptyset$. 由此可得, 对所有的 $1 \leq j \leq t$, 有 $|[V(e_j), V(H_2)]_G| \leq 8$. 因此 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 8t$. 进而有

$$\begin{aligned}
|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\
\leq& \binom{2t}{2} + 9 + 8t + 2t + 2 = 2t^2 + 9t + 11 \\
<& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 由此可得 $i \neq 1$.

因此 $2 \leq i \leq t$. 不失一般性, 不妨令 $i = 2$ 且 $vx_2 \in E(G)$. 注意到 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_2]_G = \emptyset$. 与观察9的推导类似可得, 对所有的 $1 \leq j \leq t$ 且 $j \neq 2$, 有 $|[V(e_j), V(H_2)]_G| \leq 8$. 因此 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 8t$. 进而有

$$\begin{aligned}|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\ \leq& \binom{2t}{2} + 9 + 8t + 2t + 2 = 2t^2 + 9t + 11 \\ <& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对所有 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 因此 $[v, V(H_1)]_G = \emptyset$. ■

显然 $[v, \{v_1, v_3, v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 由 $[v, V(H)]_G \neq \emptyset$ 和 $[v, V(H_1)]_G = \emptyset$ 可得, $1 \leq |[v, V(H_2)]_G| \leq 2$.

假设 $vv_2 \in E(G)$. 显然 $v_1v_3 \notin E(G)$ 且 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 若 $v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5 \in E(G)$, 则 $v_4v_5v_6v_1$, vv_2v_3 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 2$, 进而 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$. 假设 $vv_5 \in E(G)$. 显然 $v_4v_6 \notin E(G)$ 且 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 与 $vv_2 \in E(G)$ 情形中的推导类似可得, $|\{v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6\} \cap E(G)| \leq 2$. 由此可知 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$. 根据 $[v, V(H_2)]_G \neq \emptyset$ 且 $[v, \{v_1, v_3, v_4, v_6\}]_G = \emptyset$ 可知, $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$.

假设存在 $1 \leq i \leq t$, 使得 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \geq 9$. 由假设可知 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_i]_G| \geq 3$ 或 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \geq 3$. 根据 e_i 中 x_i 和 y_i 的对称性, 不妨令 $\{v_1x_i, v_3x_i, v_4x_i\} \in E(G)$. 此外, 有 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_i]_G| \geq 1$, 记 $v_4y_i \in E(G)$. 此时, $v_1x_iy_iv_4$, vv_2v_3 与 $H_1 - V(e_i) + v_5v_6$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此对任意 $1 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \leq 8$, 进而 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 8t$. 那么

$$\begin{aligned}|E(G)| =& |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| + |[v, V(H)]_G| \\ \leq& \binom{2t}{2} + 9 + 8t + 2t + 2 = 2t^2 + 7t + 11 \\ <& 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|\end{aligned}$$

对所有 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 证毕. ■

3. 总结与展望

本文研究完全图 K_n 中由 $P_3 \cup P_4$ 与匹配的并图构成的短线性森林的反拉姆数, 给出当 $n = 2t + 7$ 且 $t \geq 2$ 时, $AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2)$ 的精确值, 是对 $L \cup tP_2$ 类子图的扩充. 本文限制完全图为 K_{2t+7}, 后续可以考虑当 $n \geq 2t + 8$ 时, 完全图 K_n 中 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的反拉姆数精确值. 此外, 还可以继续研究包含 P_5 的连通分支与匹配所构成的线性森林的反拉姆数.

参考文献

[1] Erdös, P., Simonovits, M. and Sós, V.T. (1975) Anti-Ramsey Theorems, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Vol. 10. North-Holland Publishing Co., 633-643.

[2] Gilboa, S. and Roditty, Y. (2015) Anti-Ramsey Numbers of Graphs with Small Connected Components. *Graphs and Combinatorics*, **32**, 649-662. https://doi.org/10.1007/s00373-015-1581-y

[3] He, M. and Jin, Z. (2025) Rainbow Short Linear Forests in Edge-Colored Complete Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **361**, 523-536. https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.11.002

[4] Jie, Q., He, M. and Jin, Z. (2025) Rainbow Forest Consisting of Short Paths in K_n. *Discrete Applied Mathematics*, **376**, 260-269. https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.06.041

[5] Jie, Q. and Jin, Z. (2025) Anti-Ramsey Number of Union of 5-Path and Matching. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **45**, 1185-1210. https://doi.org/10.7151/dmgt.2579

[6] Jie, Q. and Jin, Z. (2026) Rainbow-Free Colorings for Spanning Linear Forest Consisting of Short Paths. *Discrete Applied Mathematics*, **386**, 30-57. https://doi.org/10.1016/j.dam.2026.01.016

[7] Jin, Z., Jie, Q. and Cao, Z. (2024) Rainbow Disjoint Union of P_4 and a Matching in Complete Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **474**, Article ID: 128679. https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128679

[8] Xie, T. and Yuan, L. (2020) On the Anti-Ramsey Numbers of Linear Forests. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 112130. https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112130