

不含 P_5 的无爪图的安全支配数

景嗣文, 张文悦, 李天昊*

辽宁师范大学, 数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年6月15日; 录用日期: 2026年7月9日; 发布日期: 2026年7月16日

摘要

安全支配集是图论中重要的研究内容, 被广泛应用于网络安全, 资源优化配置等领域. 设集合 S 为图 G 的一个支配集, 若对于 $V(G) - S$ 中任意点 u , 其在 S 中存在一邻点 v , 使得 $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ 是 G 的支配集, 则称 S 是 G 的一个安全支配集. 将 G 所有安全支配集中基数最小的安全支配集称作 G 的最小安全支配集, 其基数称为 G 的安全支配数, 记作 $\gamma_s(G)$. 本文研究不含 P_5 的无爪图的安全支配数上界问题, 证明了独立数至少为3的不含 P_5 的无爪图 G 的安全支配数的上界为图 G 的独立数, 并且用例图说明结论中的界是最佳的. 本文结果扩展了安全支配数的相关研究, 丰富了禁用子图条件下的安全支配数界.

关键词

安全支配数, 独立数, 禁用子图

The Secure Domination Number of $\{P_5, K_{1,3}\}$ -Free Graphs

Siwen Jing, Wenyue Zhang, Tianhao Li *

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: June 15, 2026; accepted: July 9, 2026; published: July 16, 2026

* 通讯作者。

Abstract

Secure dominating set is an important topic in graph theory, which is widely applied in the network security, resource allocation and other areas. Let S be a dominating set of a graph G . If for any vertex $u \in V(G) - S$, there exists a neighbor v of u in S such that $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ is also a dominating set of G , then S is said to be a secure dominating set of G . The cardinality of a minimum secure dominating set of G is defined as the secure domination number of G , denoted by $\gamma_s(G)$. This paper investigates the upper bound problem of the secure domination number in $\{P_5, K_{1,3}\}$ -free graphs. It is proved that if G is a $\{P_5, K_{1,3}\}$ -free graph with independence number at least 3, then the upper bound of secure domination number is the independence number of G ; a figure is given to show that the bound in the conclusion is best possible. This result extends relevant research on the secure domination number and enriches its bounds under forbidden subgraph conditions.

Keywords

Secure Domination Number, Independence Number, Forbidden Subgraph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文只研究简单图. 对于文中未定义的符号与术语, 若无特别说明, 请参照文献 [1]. 令 G 为简单图且 $S \subseteq V(G)$. 设 $G - S$ 和 $G[S]$ 分别表示 G 的由顶点集 $V(G) - S$ 和 S 导出的子图. 令 $N_S(v) = \{u \in S \mid uv \in E(G)\}$; 当 $S = V(G)$ 时, $N_G(v)$ 可简写为 $N(v)$. 若 $v \in S$, $u \in V(G) - S$, 且 $N_S(u) = \{v\}$, 则称 u 是 v 关于 S 的一个外部私有邻点; 令 $epn(v, S)$ 表示 v 关于 S 的所有外部私有邻点的集合. 若 $V(G) - S$ 中的每个点都至少和 S 中一点相邻, 则称 S 是 G 的一个支配集. 在 G 的所有支配集中, 基数最小的支配集称为 G 的最小支配集, 其基数称为 G 的支配数, 记作 $\gamma(G)$. 设 S 是 G 的一个支配集, 若对于 $V(G) - S$ 中任意一点 u , 其在 S 中均存在邻点 v , 使得 $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ 是 G 的支配集, 则称 S 是 G 的一个安全支配集. 在 G 的所有安全支配集中, 基数最小的安全支配集称为 G 的最小安全支配集, 其基

数称为 G 的安全支配数, 记作 $\gamma_s(G)$. 由安全支配集和外部私有邻点的定义可知, 支配集 S 为图 G 的安全支配集当且仅当对于任意一点 $u \in V(G) - S$, u 在 S 中均存在邻点 v 使得 $epn(v, S) \subseteq N[u]$.

设 I 是 $V(G)$ 的非空子集. 若 I 中任意两个顶点在 G 中均不相邻, 则称 I 为 G 的独立集. 在 G 的所有独立集中, 基数最大的独立集称为 G 的最大独立集, 其基数称为 G 的独立数, 记作 $\alpha(G)$.

如果图 G 的顶点集可以被划分为两个非空子集 X 和 Y , 使得每条边都有一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 则称 G 为偶图(或二部图); 这样的一种分类称为 G 的一个二分类, 记作 $G(X, Y)$. 完全二部图是具有二分类 (X, Y) 的简单二部图, 其中 X 的每个顶点都与 Y 中的每个顶点相连; 设 $|X| = m$, $|Y| = n$, 则将此二部图记作 $K_{m,n}$. 例如, $K_{1,3}$ 为一个完全二部图, 其中 $|X| = 1$, $|Y| = 3$. 对于同构于完全二部图 $K_{1,3}$ 的图, 即一个中心点连接三个互不相邻的点的图, 称之为爪. 无爪图即不含同构于 $K_{1,3}$ 的图. P_k 表示含有 k 个顶点的路, P_5 即为一含有5个顶点的路. 设 $\mathcal{F} = \{H_1, \dots, H_t\}$, 其中 $H_1, \dots, H_t$ 为一个图序列, 若对于任意 i , $1 \leq i \leq t$, G 中均不含同构于 H_i 的导出子图, 则称 G 为不含 $\mathcal{F}$ 的图. 设 $\mathcal{F} = \{P_5, K_{1,3}\}$, 若 G 为不含 $\mathcal{F}$ 的图, 则称 G 为不含 P_5 的无爪图. 在含 m 个顶点的简单图 G 中, 若任意一对顶点之间都有连边, 则称 G 为一个 m 阶完全图, 记作 K_m .

图的安全支配数的研究具有重要的科学价值, 构成了量化网络安全鲁棒性的理论基础. 安全鲁棒性是指网络在遭受攻击后仍能维持正常功能的能力. 研究人员通过安全支配数, 可以衡量网络中最少需要保护多少关键节点. 这个界限可以帮助我们确定最小的防护成本, 并且能在保证安全的前提下尽量节约防护资源. 这项工作不仅适用于传统计算机网络, 也适用于物联网, 通信网等多种系统. 安全支配数界限的研究将网络安全问题转化为图论中的数学问题. 这种转化使得严谨的推导与证明成为可能. 相关结论不仅适用于计算机网络, 也适用于通信网与物联网等系统. 安全支配集的引入推动了图论支配集相关理论的发展, 为后续算法设计, 特殊图类刻画提供了基础.

安全支配集的早期研究, 主要集中在根据各类图结构建立安全支配数的相应数值界限中. Cockayne等人 [2]对安全支配数的下界进行了一些估计, 若图 G 是 n 阶无三角形图, 其最大度为 Δ , 则有 $\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta-1)}{\Delta^2+2\Delta-1}$, 对于 n 阶最大度为 Δ 的无 K_4 图, 则有 $\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta-3)}{\Delta^2+2\Delta-5}$, 同时也给出了路, 圈, 完全多部图等图类的安全支配数精确值: 完全图 K_n 的安全支配数值为1, 对于完全二部图 $K_{p,q}$, $p \leq q$,

$$\text{有 } \gamma_s(K_{p,q}) = \begin{cases} q, & p = 1 \\ 2, & p = 2 \\ 3, & p = 3 \\ 4, & p \geq 4 \end{cases}, \text{ 而对于完全多部图 } K_{p_1, p_2, \dots, p_n}, p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n, n \geq 3, \text{ 也给出了相}$$

应安全支配数值, $\gamma_s = \begin{cases} 2, & p_1 = 1, p_2 \leq 2 \text{ 或 } p_1 = 2 \\ 3, & \text{其他情况} \end{cases}$, 另外还有一些图满足 $\gamma_s(P_n) = \gamma_s(C_n)$, 这些

结果为后续研究提供了思路与方向. 还有一些学者给出了关于安全支配数的上界. 例如, Burger 等人 [3]指出若图 G 是 n 阶连通图, $G \neq C_5$ 且 $\delta(G) \geq 2$, 则 $\gamma_s(G) \leq \frac{n}{2}$; Araki和Yumoto [4]证明了如果图 G 是一个 n 阶极大外平面图, 那么 G 存在一个安全支配集, 其大小至多为 $\lceil \frac{3n}{7} \rceil$; 如果极大外平面图 G 没有内部三角形, 则它存在一个安全支配集, 其大小至多为 $\lceil \frac{n}{3} \rceil$, 此外, 其任何安全支配集的大小都大于 $\frac{n}{4}$.

在理论基础确立后, 学者们将有关安全支配数的研究重点转向了探究安全支配数与独立数, 支配数, 独立支配数等参数的深层关联方面. Cockayne等人 [5]证明了: 若图 G 是不含

同构于 C_5 的无爪图, 则 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$; 2015年Merouane和Chellali [6] 研究了安全支配数与其它图参数支配数, 独立支配数, 独立数的关系, 将安全支配数与经典支配数建立起联系, 并给出了一些一般性的界: 他们证明出对于任意一个 n 阶图 G , 其安全支配数至多等于其支配数与独立数之和减1, 即 $\gamma_s(G) \leq \gamma(G) + \alpha(G) - 1$, 这个上界在完全图图族上是紧的; 对于围长至少为6的图 G 有 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$ 成立; 对于不含三角形的图 G , 则有 $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\alpha(G)$; 此外, 对于树这一图族, 其安全支配数大于等于独立支配数, 即 $\gamma_s(T) \geq i(T)$, 同时这个下界是紧的. Degawa与Saito [7]得出若 G 为不含 C_5 的图, 则有 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$. Chen等人 [8] 进一步得出若 G 为不含 $2K_2$ 的图, 则 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G) + 1$.

受上述研究结果启发, 本文得到主要结果如下:

定理1. 若图 G 是不含 P_5 的无爪图, 且 $\alpha(G) \geq 3$, 则 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$.

2. 定理1的证明

证明: 一个非连通图的独立集为各分支独立集的并集, 同样一个非连通图的安全支配集也为各分支安全支配集的并集. 因此不妨假设图 G 为一个连通的不含 P_5 的无爪图. 若 G 中存在最大独立集 S 使得 S 也是 G 的安全支配集, 则显然结论成立. 因此, 假设 G 的任意最大独立集均不是 G 的安全支配集. 设集合 S 为图 G 的一个最大独立集. 可知 S 是 G 的支配集, 但根据前述假设, S 不是 G 的安全支配集. 因此假设 $G - S$ 中存在点 u , 使得对于 u 在 S 中的任意邻点 v , 均满足 $epn(v, S)$ 中含有不与 u 相邻的点.

由于 S 是独立集且图 G 是无爪图, 所以易得如下结论:

论断1. 若 $w \in V(G) - S$, 则 $1 \leq |N_S(w)| \leq 2$.

论断2. $|N_S(u)| = 2$.

证明: 假设 $|N_S(u)| = 1$. 令 $N_S(u) = \{v\}$, $w_1 \in epn(v, S) - \{u\}$ 使得 $w_1u \notin E(G)$. 设 $S_1 = (S - \{v\}) \cup \{u, w_1\}$. 因为 $u, w_1 \in epn(v, S)$, 所以 S_1 为独立集且 $|S_1| > |S|$, 与集合 S 为图 G 的最大独立集矛盾. 因此结合论断1, 可得 $|N_S(u)| = 2$. $\square$

根据论断2, 设 $N_S(u) = \{v_1, v_2\}$, $x_i \in epn(v_i, S)$, $i \in \{1, 2\}$ 使得 $ux_1, ux_2 \notin E(G)$. 显然 $v_1x_2, x_1v_2 \notin E(G)$. 又因为 $G[\{x_1, v_1, u, v_2, x_2\}] \neq P_5$, 所以 $x_1x_2 \in E(G)$. 因为 $\alpha(G) \geq 3$, 所以 $|S| \geq 3$. 令 $v_3 \in S - \{v_1, v_2\}$. 由于 $x_i \in epn(v_i, S)$, 所以 $x_iv_3 \notin E(G)$, $i \in \{1, 2\}$. 根据论断2, $uv_3 \notin E(G)$. 由于 G 是连通图, 所以 G 中存在分别连接 v_3 与 x_1, x_2 的路. 假设 P 为所有连接 v_3 与 x_1, x_2 的路中长度最小的路, 且不妨假设 P 的两个端点为 v_3, x_2 . 由于 $x_2v_3 \notin E(G)$, 故 $|P| \geq 3$; 又因为 G 是不含 P_5 的图, 因此 $|P| = 3$ 或 $|P| = 4$.

以下将分别针对 $|P| = 3$ 及 $|P| = 4$ 两种情况对该定理进行证明.

情况1. $|P| = 3$.

设 $P = x_2x_3v_3$. 由于 $x_2 \in epn(v_2, S)$ 且 S 是一个独立集, 所以 $x_3 \in V(G) - S$. 由于 $ux_2, v_3x_1 \notin E(G)$ 且 $x_2x_3, x_3v_3 \in E(G)$, 可得 $x_3 \notin \{u, x_1\}$ (见图 1). 由于 $G[\{v_1, x_1, x_2, x_3, v_3\}] \neq P_5$

以及 $v_1x_2, v_1v_3, x_1v_3, x_2v_3 \notin E(G)$, 可得 $v_1x_3 \in E(G)$ 或者 $x_1x_3 \in E(G)$. 若 $v_1x_3 \in E(G)$, 则 $G[\{x_3, x_2, v_3, v_1\}] = K_{1,3}$, 矛盾. 因此 $v_1x_3 \notin E(G)$, $x_1x_3 \in E(G)$. 可知 $ux_3 \notin E(G)$, 否则 $G[\{x_3, u, x_2, v_3\}] = K_{1,3}$. 综上可得 $G[\{u, v_1, x_1, x_3, v_3\}] = P_5$, 矛盾. 因此情况1不成立.

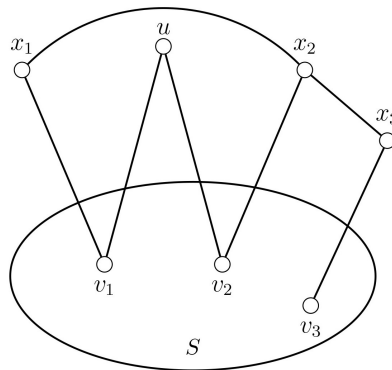


Figure 1. The diagram of Case 1

图 1. 情况1的示意图

情况2. $|P| = 4$.

设 $P = x_2x_3x_4v_3$. 显然 $x_2x_4, x_3v_3 \notin E(G)$. 因为 $v_3x_4 \in E(G)$ 且集合 S 是独立集, 所以 $x_4 \in V(G) - S$; 又因为 $x_1v_3, uv_3 \notin E(G)$, 所以 $x_4 \notin \{u, x_1\}$.

论断3. $x_1x_4 \notin E(G)$.

证明: 假设 $x_1x_4 \in E(G)$. 则 $P_1 = x_1x_4v_3$ 是连接 x_1 与 v_3 且比 P 长度小的路, 与 P 的选取相矛盾. $\square$

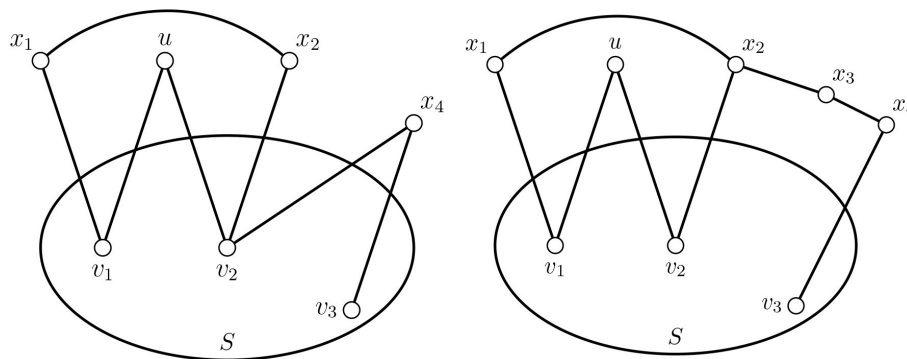


Figure 2. The diagram of the proof of Claim 4

图 2. 论断4证明中的示意图

论断4. $x_3 \in V(G) - (S \cup \{u, x_1\})$.

证明: 首先证明 $x_3 \notin S$. 假设 $x_3 \in S$. 因为 $x_2x_3 \in E(G)$ 且 $x_2 \in \text{epn}(v_2, S)$, 所以 $x_3 = v_2$, 即 $P = x_2v_2x_4v_3$ (见图 2(a)). 由 $G[\{v_2, u, x_2, x_4\}] \neq K_{1,3}$ 以及 $ux_2, x_2x_4 \notin E(G)$, 可得 $ux_4 \in E(G)$. 因为 $v_2, v_3 \in N_S(x_4)$, 所以根据论断1, 可得 $v_1x_4 \notin E(G)$; 又由于 $G[\{x_1, v_1, u, x_4, v_3\}] \neq P_5$ 以及 $x_1v_3, uv_3, v_1v_3 \notin E(G)$, 可得 $x_1x_4 \in E(G)$, 与论断3矛盾. 因此 $x_3 \in V(G) - S$. 因为 $ux_2 \notin$

$E(G)$ 且 $x_2x_3 \in E(G)$, 所以 $x_3 \neq u$. 若 $x_3 = x_1$, 则 $x_1x_4 \in E(G)$, 与论断3矛盾. 综上可得 $x_3 \in V(G) - (S \cup \{u, x_1\})$ (见图 2(b)). $\square$

论断5. $v_2x_4, v_1x_4, ux_4 \notin E(G)$.

证明: 假设 $v_2x_4 \in E(G)$. 则 $P_1 = x_2v_2x_4v_3$ 为连接 x_2 与 v_3 的路, 根据论断4中假设 $x_3 = v_2$ 的证明可得矛盾, 因此 $v_2x_4 \notin E(G)$.

假设 $v_1x_4 \in E(G)$. 则 $P_1 = x_1v_1x_4v_3$ 为连接 v_1 与 v_3 的路. 利用 v_1 和 v_2 的对称性以及 x_1 和 x_2 的对称性, 对 P_1 应用论断4中证明 $x_3 \neq v_2$ 的类似证明, 可得矛盾, 因此 $v_1x_4 \notin E(G)$.

假设 $ux_4 \in E(G)$. 则根据 $v_1v_3, x_1v_3, x_1x_4, x_1u, uv_3, v_1x_4 \notin E(G)$, 可得 $G[\{x_1, v_1, u, x_4, v_3\}] = x_1v_1ux_4v_3 = P_5$, 矛盾. 因此 $ux_4 \notin E(G)$. $\square$

现完成该定理的证明. 若 $ux_3 \in E(G)$, 则根据 $G[\{x_3, x_2, x_4, u\}] \neq K_{1,3}$ 以及 $x_2x_4, ux_2 \notin E(G)$, 可得 $ux_4 \in E(G)$, 与论断5矛盾. 因此 $ux_3 \notin E(G)$; 再结合 $G[\{u, v_2, x_2, x_3, x_4\}] \neq P_5$ 以及 $ux_4, v_2x_4, x_2x_4 \notin E(G)$, 可得 $v_2x_3 \in E(G)$. 综上可得 $G[\{u, v_2, x_3, x_4, v_3\}] = P_5$, 矛盾. 因此定理1成立. $\square$

令 G 为由 G_1, G_2, G_3 三个均同构于 K_m , $m \geq 4$, 的图构成的图, 其中 $V(G_1) \cap V(G_3) = \{v_1\}$, $V(G_2) \cap V(G_3) = \{v_2\}$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ (见图 3). 则 G 为一个 $\alpha(G) = 3$ 且 $\gamma_s(G) = 3$ 的不含 P_5 的无爪图. 例图3说明定理1中的界是紧的.

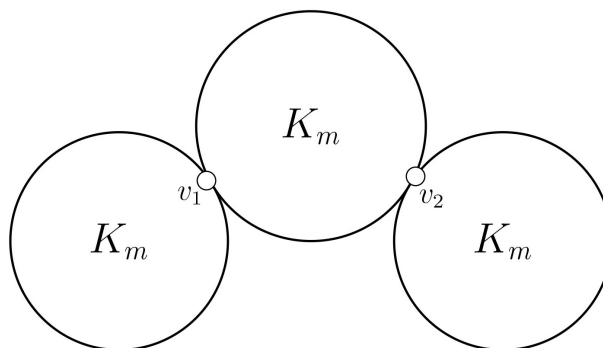


Figure 3. A $\{P_5, K_{1,3}\}$ -free graph G with $\alpha(G) = 3$ and $\gamma_s(G) = 3$

图 3. 满足 $\alpha(G) = 3$ 且 $\gamma_s(G) = 3$ 的不含 P_5 的无爪图 G

3. 结论

本文针对不含 P_5 的无爪图研究安全支配数, 证明当 $\alpha(G) \geq 3$ 时, $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$, 并构造一例不含 P_5 的无爪图 G , 满足 $\alpha(G) = \gamma_s(G) = 3$, 由此说明所得上界是紧的. 从理论层面来看, 本文补充了禁用子图约束下安全支配数的界理论, 进一步充实了无爪图安全支配问题的研究内容.

后续研究可沿两条思路展开: 其一, 保持无爪条件不变, 额外增添一类新禁用子图, 探究多重禁用约束下不含 P_5 图的安全支配数上界变化; 其二, 针对不含 P_5 的无爪图, 可以围绕安全全支配, 连通安全支配等衍生支配参数, 探究该类参数与独立数之间的关联.

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Elsevier.
- [2] Cockayne, E.J., Grobler, P.J.P., Gründlingh, W.R., Munganga, J. and van Vuuren, J.H. (2005) Protection of a Graph. *Utilitas Mathematica*, **67**, 19-32.
- [3] Burger, A.P., Henning, M.A. and van Vuuren, J.H. (2008) Vertex Covers and Secure Domination in Graphs. *Quaestiones Mathematicae*, **31**, 163-171.
<https://doi.org/10.2989/qm.2008.31.2.5.477>
- [4] Araki, T. and Yumoto, I. (2018) On the Secure Domination Numbers of Maximal Outerplanar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **236**, 23-29. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.10.020>
- [5] Cockayne, E.J., Favaron, O. and Mynhardt, C.M. (2003) Secure Domination, Weak Roman Domination and Forbidden Subgraphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, **39**, 87-100.
- [6] Boumediene Merouane, H. and Chellali, M. (2015) On Secure Domination in Graphs. *Information Processing Letters*, **115**, 786-790. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2015.05.006>
- [7] Degawa, S. and Saito, A. (2023) A Note on Secure Domination in C_5 -Free Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **333**, 82-83. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.03.016>
- [8] Chen, X., Li, T. and Zhang, J. (2025) A Note on Secure Domination Number in $2K_2$ -Free Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **368**, 162-164.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.02.019>