

空间伽利略共形代数的导子代数和泛中心扩张

王国泰, 申冉*

东华大学, 数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026年6月13日; 录用日期: 2026年7月6日; 发布日期: 2026年7月15日

摘要

$(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数是一类重要的无限维李代数。本文将该代数在 $d=3$ 时的情形定义并命名为空间伽利略共形代数。基于上调方法, 系统研究了空间伽利略共形代数的导子代数与泛中心扩张。

关键词

空间伽利略共形代数, 导子代数, 中心扩张

Derivations and Universal Central Extensions of the Spatial Galilean Conformal Algebra

Guotai Wang, Ran Shen *

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: June 13, 2026; accepted: July 6, 2026; published: July 15, 2026

* 通信作者

Abstract

The Galilean conformal algebra in $(d+1)$ -dimensional spacetime is an important class of infinite-dimensional Lie algebras. In this paper, the case of this algebra with $d=3$ is defined and named the spatial Galilean conformal algebra. Using cohomological methods, we systematically study the derivation algebra and the universal central extension of the spatial Galilean conformal algebra.

Keywords

Spatial Galilean Conformal Algebra, Derivation, Central Extension

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

$(d+1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数最初是由Bagchi 和Gopakumar 在 [1]中引入的, 目的是构建AdS/CFT猜想的系统性非相对论极限 [2]。一些物理学家认为, 通过探索这些代数可以更好地理解AdS/CFT对应关系 [3,4], 此外, 这些代数还出现在伽利略电动力学的背景下 [5,6], 这无疑显示了无限维伽利略共形代数在数学和物理学方面的重要性。

自伽利略共形代数产生以来, 其相关性质已被许多国内外学者所研究, 其中 $(1+1)$ 维时空的无限维伽利略共形代数是我們所熟知的无中心的 W -代数 $W(2,2)$, 其有一组基 $\{L_m, I_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ 。高等人在文献 [7]中给出了其导子代数与泛中心扩张: $\text{Der}(W) = \mathbb{C}D \oplus \text{ad}(W)$, 其中 D 是一个外导子, 定义如下: 对任意 $m \in \mathbb{Z}$,

$$D(L_m) = 0, \quad D(I_m) = I_m. \quad (1.1)$$

泛中心扩张后的李代数 $\tilde{W} = W \oplus \mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\beta$, 其中 α, β 定义如下:

$$\begin{aligned} \alpha(L_m, L_n) &= \delta_{m+n,0} \frac{m^3 - m}{12}, \quad \alpha(L_m, I_n) = \alpha(I_m, I_n) = 0, \\ \beta(L_m, I_n) &= \delta_{m+n,0} \frac{m^3 - m}{12}, \quad \beta(L_m, L_n) = \beta(I_m, I_n) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

(2+1)维时空中的无限维伽利略共形代数是由Aizawa于2013年在 [8]中命名的平面伽利略共形代数 $\mathfrak{g}$, 有一组基 $\{L_m, H_m, I_m, J_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. 其结构和表示已有较多研究 [9]- [11]. 特别地, 在文献 [11]中, 作者确定了其导子代数和泛中心扩张的结构: $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}D \oplus \text{ad}(\mathfrak{g})$, 其中 D 是一个外导子, 定义如下: 对任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$D(L_n) = D(H_n) = 0, \quad D(I_n) = I_n, \quad D(J_n) = J_n. \quad (1.3)$$

泛中心扩张后的李代数 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}c_1 \oplus \mathbb{C}c_2$, 其中 c, c_1 和 c_2 定义如下:

$$c(L_m, L_n) = m^3 \delta_{m+n,0}, \quad c_1(H_m, H_n) = m \delta_{m+n,0}, \quad c_2(L_m, H_n) = m^2 \delta_{m+n,0}, \quad (1.4)$$

$m, n \in \mathbb{Z}$, 其余情况的取值均为零。

(3+1)维时空中的无限维伽利略共形代数目前还没有学者进行深入地研究。在文献 [1]中, Bagchi 等人提出的猜想指出: (3+1) 维边界伽利略共形代数可对偶于5 维AdS 时空的牛顿- 嘉当引力。这无疑表明该代数在物理领域的重要性。本文将以 $d = 3$ 时的情形为研究对象, 系统的研究其导子代数和泛中心扩张, 通过此研究不仅有助于丰富伽利略共形代数的结构理论, 也有利于推动伽利略共形代数在物理领域的应用与高维时空中的研究。

$(d + 1)$ 维时空中的无限维伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 具有一组基 $\{J_{ij}^{(n)}, L^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$, 满足如下李括号关系:

$$\begin{aligned} [L^{(m)}, L^{(n)}] &= (m - n)L^{(m+n)}, \quad [L^{(m)}, J_{ij}^{(n)}] = -nJ_{ij}^{(m+n)}, \quad [L^{(m)}, M_i^{(n)}] = (m - n)M_i^{(m+n)}, \\ [J_{ij}^{(n)}, J_{rs}^{(m)}] &= \delta_{ir}J_{js}^{(m+n)} + \delta_{is}J_{rj}^{(m+n)} + \delta_{jr}J_{si}^{(m+n)} + \delta_{js}J_{ir}^{(m+n)}, \\ [J_{ij}^{(n)}, M_k^{(m)}] &= -(M_i^{(m+n)}\delta_{jk} - M_j^{(m+n)}\delta_{ik}), \\ [M_i^{(m)}, M_j^{(n)}] &= 0, \end{aligned}$$

其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ 。

当 $d = 3$ 时, 我们称(3 + 1)维时空中的无限维伽利略共形代数为空间伽利略共形代数, 用 $\mathcal{G}$ 表示, 则有

$$\mathcal{G} = \text{span} \left\{ J_{12}^{(n)}, J_{13}^{(n)}, J_{23}^{(n)}, L^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

为了后面的证明方便, 我们做如下的记号简化:

$$L_n = L^{(n)}, \quad H_n = J_{12}^{(n)}, \quad C_n = J_{13}^{(n)}, \quad D_n = J_{23}^{(n)}, \quad I_n = M_1^{(n)}, \quad J_n = M_2^{(n)}, \quad K_n = M_3^{(n)}.$$

则 $\mathcal{G}$ 有基 $\{L_n, H_n, C_n, D_n, I_n, J_n, K_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 满足如下李括号关系:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n}, \\ [L_m, H_n] &= -nH_{m+n}, \quad [L_m, C_n] = -nC_{m+n}, \quad [L_m, D_n] = -nD_{m+n}, \end{aligned}$$

$$[L_m, I_n] = (m - n)I_{m+n}, \quad [L_m, J_n] = (m - n)J_{m+n}, \quad [L_m, K_n] = (m - n)K_{m+n},$$

$$[H_m, C_n] = D_{m+n}, \quad [C_m, D_n] = H_{m+n}, \quad [D_m, H_n] = C_{m+n},$$

$$[H_m, I_n] = J_{m+n}, \quad [H_m, J_n] = -I_{m+n},$$

$$[C_m, I_n] = K_{m+n}, \quad [C_m, K_n] = -I_{m+n},$$

$$[D_m, J_n] = K_{m+n}, \quad [D_m, K_n] = -J_{m+n},$$

$$[H_m, H_n] = [C_m, C_n] = [D_m, D_n] = [H_m, K_n] = [C_m, J_n] = [D_m, I_n] = 0,$$

$$[I_m, I_n] = [I_m, J_n] = [I_m, K_n] = [J_m, J_n] = [J_m, K_n] = [K_m, K_n] = 0,$$

对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$.

在本文中, 我们分别用 $\mathbb{Z}, \mathbb{C}$ 表示整数集和复数集。

2. 导子

在本节中, 我们通过计算 $\mathcal{G}$ 的一阶上同调群确定其导子代数。

令 L 是一个李代数, V 是一个 L -模, 一个线性映射 $D \in \text{Hom}(L, V)$ 被称为系数在 V 中的导子, 如果 D 满足:

$$D([x, y]) = x.(Dy) - y.(Dx), \quad x, y \in L.$$

我们用 $\text{Der}(L, V)$ 表示 L 的系数在 V 内的导子空间。一个系数在 V 内的导子被称为内导子, 如果存在一个固定的 $\nu \in V$ 使得对 $x \in L$ 成立 $D(x) = x.\nu$ 。我们用 $\text{Inn}(L, V)$ 表示 L 的系数在 L 内的内导子空间。 L 的系数在 V 内的第一上同调群是商空间

$$H^1(L, V) := \text{Der}(L, V) / \text{Inn}(L, V).$$

左端也称为外导子空间。

令 L 是一个李代数, V 是一个 L -模, 形成如下半直积短正合列:

$$0 \rightarrow V \rightarrow L \ltimes V \rightarrow L \rightarrow 0,$$

则由 Hochschild-Serre 低阶项谱序列 [12] 可得如下正合列:

$$0 \rightarrow H^1(L, (L \ltimes V)^V) \rightarrow H^1(L \ltimes V, L \ltimes V) \rightarrow \text{Hom}_L(V, L \ltimes V), \quad (2.1)$$

其中 $(L \ltimes V)^V = \{x \in L \ltimes V \mid [x, v] = 0, \forall v \in V\}$ 。令

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} L_n, \quad \mathfrak{b} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} H_n \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} C_n \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} D_n, \quad \mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} I_n \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} J_n \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} K_n.$$

则由半直积定义可知, 空间伽利略共形代数 $\mathcal{G}$ 可被写成一个半直积的形式:

$$\mathcal{G} = (\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}) \ltimes \mathfrak{c}$$

记 $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$, 则 $\mathcal{G} = \mathfrak{d} \ltimes \mathfrak{c}$. 现对 $\alpha \in \mathbb{C}$, 考虑 $\mathfrak{a}$ -模的1参数族 $\mathcal{F}_\alpha = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} f_n^{(\alpha)}$, 由下式所定义:

$$L_m \cdot f_n^{(\alpha)} = -(n + \alpha m) f_{m+n}^{(\alpha)}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

引理2.1. 作为 $\mathfrak{a}$ -模, 有 $\mathfrak{a} \cong \mathcal{F}_{-1}$, $\mathfrak{b} \cong \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_0$, $\mathfrak{c} \cong \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_1$.

证明: 参见 [11]. □

引理2.2. $\text{Hom}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = 0$.

证明: 由引理2.1知

$$\text{Hom}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_1),$$

再由 [11]的引理3知右边为0. 引理得证. □

引理2.3. $H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}) = 0$.

证明: 因为 $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{d}$ -模, 所以可得如下正合列:

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}),$$

其中 $H^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}}) = H^1(\mathfrak{a}, 0) = 0$, 再有引理2.2可得 $H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}) = 0$. 引理得证. □

引理2.4. $\text{Hom}_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{c}, \mathcal{G}) = \mathbb{C}\varphi$, 其中 φ 定义如下:

$$\varphi(I_n) = I_n, \quad \varphi(J_n) = J_n, \quad \varphi(K_n) = K(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

证明: 对任意的 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{c}, \mathcal{G})$, 假设

$$\varphi(I_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k L_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k H_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k C_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k D_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k I_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_k J_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k K_k,$$

其中 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k, \eta_k, \mu_k, \tau_k \in \mathbb{C}$. 由 $\varphi[L_0, I_n] = [L_0, \varphi(I_n)]$ 及 $\text{ad} L_0$ 在 $\mathcal{G}$ 上的作用可得

$$\varphi(I_n) = \alpha_n L_n + \beta_n H_n + \gamma_n C_n + \delta_n D_n + \eta_n I_n + \mu_n J_n + \tau_n K_n.$$

另由

$$\begin{aligned} \varphi[H_0, I_n] &= [H_0, \varphi(I_n)], & \varphi[H_0, J_n] &= [H_0, \varphi(J_n)], & \varphi[C_0, I_n] &= [C_0, \varphi(I_n)], \\ \varphi[C_0, K_n] &= [C_0, \varphi(K_n)], & \varphi[D_0, J_n] &= [D_0, \varphi(J_n)], & \varphi[D_0, K_n] &= [D_0, \varphi(K_n)], \end{aligned}$$

整理后可得

$$\varphi(I_n) = \eta_n I_n + \delta_n D_n, \quad \varphi(J_n) = \eta_n J_n - \delta_n C_n, \quad \varphi(K_n) = \eta_n K_n + \delta_n H_n,$$

再由 $\varphi[L_m, I_n] = [L_m, \varphi(I_n)]$, 得 $\eta_{m+n} = \eta_n, (m-n)\delta_{m+n} = -n\delta_n, (m \neq n)$ 。由任意性知 $\delta_{m+n} = \delta_n = 0, \eta_n = \eta_0, (n \in \mathbb{Z})$ 。得证。 $\square$

命题2.5. 令 D 是 $\mathcal{G}$ 上的一个线性变换, 满足

$$D(L_n) = D(H_n) = D(C_n) = D(D_n) = 0, D(I_n) = I_n, D(J_n) = J_n, D(K_n) = K_n.$$

则 D 是 $\mathcal{G}$ 的一个外导子, 即 $D \in H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ 。

证明: 由定义易验证 D 是一个导子。下面证明 D 不是内导子: 假设存在 $z \in \mathcal{G}$, 使得对任意 $x \in \mathcal{G}$, 有 $D(x) = [x, z]$ 。设

$$z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k L_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k H_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k C_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k D_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k I_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_k J_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k K_k,$$

其中 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k, \eta_k, \mu_k, \tau_k \in \mathbb{C}$ 。一方面, $D(L_n) = 0$, 即 $[L_n, z] = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ 。由李括号关系易知, z 的系数全为 0。即 $z = 0$ 。另一方面, 若 $z = 0$, 则与 $D(I_n) = I_n \neq 0$ 矛盾。故 $D \in H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ 。 $\square$

定理2.6. $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = \mathbb{C}D$, 其中 D 如命题2.5 中所定义。

证明: 由定义, $\mathfrak{c}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个理想, 且 $\mathcal{G}/\mathfrak{c} \cong \mathfrak{d}$, 故得短正合列:

$$0 \rightarrow \mathfrak{c} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{d} \rightarrow 0,$$

据(2.1) 式可得如下正合列:

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{d}, \mathcal{G}^{\mathfrak{c}}) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{c}, \mathcal{G}),$$

其中 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}} = \{x \in \mathcal{G} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{c}\} = \mathfrak{c}$ 。由引理2.3知 $H^1(\mathfrak{d}, \mathcal{G}^{\mathfrak{c}}) = H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}) = 0$ 。而引理2.4表明 $\dim(\text{Hom}_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{c}, \mathcal{G})) = 1$ 。故 $\dim(H^1(\mathcal{G}, \mathcal{G})) = 1$ 。定理得证。 $\square$

3. 中心扩张

在本节中, 我们将给出 $\mathcal{G}$ 的泛中心扩张。众所周知, 一个李代数 L 的中心扩张可看成是一个 $\text{pair}(\tilde{L}, \pi)$, 其中 $\pi: \tilde{L} \rightarrow L$ 是满同态, 且满足核在 $\tilde{L}$ 的中心内。如果对 L 的每一个中心扩张 $\text{pair}(\tilde{L}', \rho)$, 都存在唯一的同态 $\psi: \tilde{L} \rightarrow \tilde{L}'$, 使得 $\rho \circ \psi = \pi$, 则称 L 的 $\text{pair}(\tilde{L}, \pi)$ 是一个泛中心扩张。即下图可交换:

$$\tilde{L} \xrightarrow{\pi} L \xrightarrow{\rho} L'$$

如果李代数 L 满足 $[L, L] = L$, 则称 L 是完备李代数。关于完备李代数的中心扩张有如下命题。

命题3.1. [13] 一个李代数 L 存在泛中心扩张当且仅当 L 是完备李代数; 泛中心扩张在李代数的同构意义下是唯一的。

注: 确定了 $H^2(L, \mathbb{C})$ 等同于分类 L 的所有一维中心扩张的等价类。

命题3.2. [11] 令 L 是李代数, V 是 L -模, 则半直积李代数 $L \ltimes V$ 的第二上同调群有如下分解:

$$H^2(L \ltimes V, \mathbb{C}) = H^2(L, \mathbb{C}) \oplus H^1(L, V^*) \oplus B_L(V),$$

其中 V^* 是 V 的对偶模, $B_L(V)$ 是 V 上反对称 L -不变双线性型空间, 即 $\sigma \in \text{Hom}(V \times V, \mathbb{C})$, 满足

$$\sigma(u, v) = -\sigma(v, u), \quad \sigma(x.u, v) + \sigma(u, x.v) = 0, \quad \forall x \in L \quad u, v \in V.$$

注: 关于此命题的详细内容见 [11]。为了后续方便, 记 $S_n = \{H_n, C_n, D_n\}, n \in \mathbb{Z}$ 。

引理3.3. $B_a(\mathfrak{b}) \cong \mathbb{C}c_2$, 其中 c_2 定义如下

$$c_2(X_m, Y_n) = m\delta_{m+n,0} \quad X_m \in S_m, Y_n \in S_n$$

$m, n \in \mathbb{Z}$ 。

证明: 对任意的 $\varphi \in B_a(\mathfrak{b})$, 首先, 我们考虑 $\varphi(H_m, H_n), \varphi(C_m, C_n), \varphi(D_m, D_n)$ 。由

$$\varphi([L_m, H_n], H_k) + \varphi(H_n, [L_m, H_k]) = 0,$$

得

$$n\varphi(H_{m+n}, H_k) + k\varphi(H_n, H_{m+k}) = 0, \quad (3.1)$$

在(3.1)式中取 $m = 0$, 则

$$(n+k)\varphi(H_n, H_k) = 0,$$

故当 $n+k \neq 0$ 时, $\varphi(H_n, H_k) = 0$; 当 $n+k = 0$ (即 $n = -k$) 时, $\varphi(H_n, H_k) = \varphi(H_n, H_{-n}) = -\varphi(H_{-n}, H_n)$ 。因此有

$$\varphi(H_m, H_n) = \delta_{m+n,0}f_m, \quad (3.2)$$

其中 $\{f_m \in \mathbb{C} | m \in \mathbb{Z}\}$, 且 $f_{-m} = -f_m$ 。在(3.1)式中再取 $m = 1, k = -n-1$, 则

$$n\varphi(H_{1+n}, H_{-1-n}) - (n+1)\varphi(H_n, H_{-n}) = 0,$$

据(3.2)式可得

$$nf_{n+1} - (n+1)f_n = 0,$$

由线性递归关系易知解集是一维的, 且 $f_n = n$ 是一解, 因此有

$$\varphi(H_m, H_n) = \mathbb{C}m\delta_{m+n,0},$$

由李括积关系可知, 同理可证

$$\varphi(C_m, C_n) = \mathbb{C}m\delta_{m+n,0}, \quad \varphi(D_m, D_n) = \mathbb{C}m\delta_{m+n,0}.$$

然后, 我们考虑 $\varphi(H_m, C_n), \varphi(C_m, D_n), \varphi(H_m, D_n)$ 。由

$$\varphi([L_m, H_n], C_k) + \varphi(H_n, [L_m, C_k]) = 0,$$

得

$$n\varphi(H_{m+n}, C_k) + k\varphi(H_n, C_{m+k}) = 0, \quad (3.3)$$

在(3.3)式中取 $m = 0$, 则

$$(n+k)\varphi(H_n, C_k) = 0,$$

故当 $n+k \neq 0$ 时, $\varphi(H_n, C_k) = 0$; 当 $n+k = 0$ (即 $n = -k$) 时, $\varphi(H_n, C_k) = \varphi(H_n, C_{-n})$ 。在(3.3)式中再取 $m = -k - n$, 则

$$n\varphi(H_{-k}, C_k) + k\varphi(H_n, C_{-n}) = 0,$$

由线性递归关系易知解集是一维的, 且 $\varphi(H_n, C_{-n}) = n$ 是一解, 因此有

$$\varphi(H_m, C_n) = \mathbb{C}m\delta_{m+n,0}.$$

由李括积关系可知, 对于 $\varphi(C_m, D_n), \varphi(H_m, D_n)$ 同样满足上述关系。引理得证。 $\square$

命题3.4. $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^3$, 其生成元是三个独立的上循环 c_1, c_2 和 c_3 , 定义如下:

$$c_1(L_m, L_n) = m^3\delta_{m+n,0}, \quad c_2(X_m, Y_n) = m\delta_{m+n,0} \quad c_3(L_m, P_n) = m^2\delta_{m+n,0},$$

$X_m \in S_m, Y_n \in S_n, P_n \in S_n, m, n \in \mathbb{Z}$, 其余情况都是0。

证明: 因为 $\mathcal{G} = \mathfrak{d} \ltimes \mathfrak{c}$, 所以由命题3.2有

$$H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C}) = H^2(\mathfrak{d} \ltimes \mathfrak{c}, \mathbb{C}) = H^2(\mathfrak{d}, \mathbb{C}) \oplus H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}^*) \oplus B_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{c})$$

其中 $B_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{c}) = 0$ (1001[11]), 所以只需确定 $H^2(\mathfrak{d}, \mathbb{C})$ 和 $H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}^*)$ 即可。

$$(i). H^2(\mathfrak{d}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}c_1 \oplus \mathbb{C}c_2 \oplus \mathbb{C}c_3$$

因为 $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$, 所以由命题3.2得

$$H^2(\mathfrak{d}, \mathbb{C}) = H^2(\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}, \mathbb{C}) = H^2(\mathfrak{a}, \mathbb{C}) \oplus H^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^*) \oplus B_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}).$$

关于 $c_1(L_m, L_n) = m^3\delta_{m+n,0}$ 的详细证明见 [13]命题1.1.1。 $B_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})$ 由引理3.3给出。 $H^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^*)$ 参见 [11]。

(ii). $H^1(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}^*) = 0$

参见 [11]。

□

下面给出 $\mathcal{G}$ 的中心扩张。记 $T_n = \{I_n, J_n, K_n\}, n \in \mathbb{Z}$ 。令

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C}c_1 \oplus \mathbb{C}c_2 \oplus \mathbb{C}c_3,$$

定义李积关系如下:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + m^3\delta_{m+n,0}c_1,$$

$$[L_m, X_n] = -nX_{m+n} + m^2\delta_{m+n,0}c_3,$$

$$[P_m, Q_n] = R_{m+n} + m\delta_{m+n,0}c_2,$$

$$[L_m, Y_n] = (m - n)Y_{m+n},$$

$$[X_m, X_n] = m\delta_{m+n,0}c_2,$$

$$[H_m, I_n] = J_{m+n},$$

$$[H_m, J_n] = -I_{m+n},$$

$$[C_m, I_n] = K_{m+n},$$

$$[C_m, K_n] = -I_{m+n},$$

$$[D_m, J_n] = K_{m+n},$$

$$[D_m, K_n] = -J_{m+n},$$

$$[Y_m, Y_n] = 0.$$

$m, n \in \mathbb{Z}$. 其中 $X_n \in S_n, Y_n \in T_n$ 。 (P_m, Q_n, R_{m+n})是以下三种情形之一: $(H_m, C_n, D_{m+n}), (D_m, H_n, C_{m+n})$ 和 (C_m, D_n, H_{m+n}) 。显然 $(\tilde{\mathcal{G}}, [,])$ 是一个李代数, c_1, c_2, c_3 是其中心元。

定理3.5. 令 $\pi: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ 是一个投影, 则 $\text{pair}(\tilde{\mathcal{G}}, \pi)$ 是 $\mathcal{G}$ 的泛中心扩张。

证明: 因为 $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, 所以 $\mathcal{G}$ 是一个完备李代数。因此, 由命题3.1知, $\mathcal{G}$ 存在泛中心扩张, 另有

$$\text{Ker}\pi \cong H_2(\mathcal{G}, \mathbb{C}) \cong H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C})^* \cong \mathbb{C}^3$$

其中 $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C})^*$ 是 $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C})$ 的对偶空间。定理得证。

□

4. 结论与展望

在本节中, 我们将分析 $(d+1)$ 维时空中的伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 在 $d=1, d=2$ 和 $d=3$ 三种情形下的导子代数和中心扩张的结构差异。并归纳性地给出 $\mathfrak{G}$ 在所有时空维度下的导子代数和中心扩张的

结构。

首先, 导子代数方面, 三种情形下的一阶上同调群均是一维的, 且导子的作用可从基元素在不同情形下出现的情况进行分析总结。当 $d = 1$ 时, $\{J_{ij}^{(n)}, L^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$ 中 $J_{ij}^{(n)}$ 分量未出现, 即该情形下的代数缺少 $J_{ij}^{(n)}$ 这类基元素, 仅有 $L^{(n)}$ 和 $M_1^{(n)}, n \in \mathbb{Z}$, 其导子作用即(1.1) 式; 当 $d = 2$ 时, $\{J_{ij}^{(n)}, L^{(n)}, M_i^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d\}$ 中 $J_{ij}^{(n)}$ 分量开始出现, 此时基元素为 $L^{(n)}, J_{12}^{(n)}, M_1^{(n)}, M_2^{(n)}, n \in \mathbb{Z}$, 其导子作用即(1.3)式; 再结合定理2.6, 则我们可归纳性地给出下面关于 $\mathfrak{G}$ 在所有时空维度下的导子代数。

定理4.1. $\text{Der}(\mathfrak{G}) = \mathbb{C}D \oplus \text{ad}(\mathfrak{G})$, 其中 D 是一个外导子, 定义如下:

$$D(J_{ij}^{(n)}) = D(L^{(n)}) = 0, \quad D(M_i^{(n)}) = M_i^{(n)}.$$

其中 $n \in \mathbb{Z}, i, j = 1, 2, \dots, d$ 。

其次, 在泛中心扩张方面, 由(1.2)式、(1.4)式和命题3.4可知, 三种情形下中心元的个数及作用是有差异的。当 $d = 2$ 和 $d = 3$ 时, 也即 $J_{ij}^{(n)}$ 分量开始出现后, 中心元的个数保持不变。实际上作用也是一致的, 这点可从基元素的分量方面看出, 即如下的归纳结果 ($d \geq 2$):

定理4.2. $H^2(\mathfrak{G}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^3$, 其生成元是三个独立的上循环 c_1, c_2 和 c_3 , 定义如下:

$$c_1(L^{(m)}, L^{(n)}) = m^3 \delta_{m+n, 0}, \quad c_2(J_{ij}^{(m)}, J_{rs}^{(n)}) = m \delta_{m+n, 0}, \quad c_3(L^{(m)}, J_{ij}^{(n)}) = m^2 \delta_{m+n, 0},$$

其余情况都是0, $m, n \in \mathbb{Z}$ 。

定理4.1和定理4.2指明了一般情形下伽利略共形代数的导子代数和中心扩张的完整结构框架, 为后续的严格证明提供了明确的研究方向与核心思路。验证该结果, 将对完善伽利略共形代数 $\mathfrak{G}$ 的导子代数和中心扩张的结构理论具有重要意义。

参考文献

- [1] Bagchi, A. and Gopakumar, R. (2009) Galilean Conformal Algebras and AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics*, **2009**, Article 37. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/07/037>
- [2] Maldacena, J. (1999) The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *AIP Conference Proceedings*, **484**, 51-63. <https://doi.org/10.1063/1.59653>
- [3] Bagchi, A., Gopakumar, R., Mandal, I. and Miwa, A. (2010) GCA in 2d. *Journal of High Energy Physics*, **2010**, Article No. 4. [https://doi.org/10.1007/jhep08\(2010\)004](https://doi.org/10.1007/jhep08(2010)004)
- [4] Martelli, D. and Tachikawa, Y. (2010) Comments on Galilean Conformal Field Theories and Their Geometric Realization. *Journal of High Energy Physics*, **2010**, Article No. 91. [https://doi.org/10.1007/jhep05\(2010\)091](https://doi.org/10.1007/jhep05(2010)091)
- [5] Bagchi, A., Basu, R. and Mehra, A. (2014) Galilean Conformal Electrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, **2014**, Article No. 61. [https://doi.org/10.1007/jhep11\(2014\)061](https://doi.org/10.1007/jhep11(2014)061)

- [6] Festuccia, G., Hansen, D., Hartong, J. and Obers, N.A. (2016) Symmetries and Couplings of Non-Relativistic Electrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, **2016**, Article No. 37.
[https://doi.org/10.1007/jhep11\(2016\)037](https://doi.org/10.1007/jhep11(2016)037)
- [7] Gao, S.L., Jiang, C.P. and Pei, Y.F. (2009) The Derivations, Central Extensions and Automorphism Group of the Lie Algebra. *Acta Mathematica Sinica*, **52**, 281-288. (In Chinese)
- [8] Aizawa, N. (2013) Some Properties of Planar Galilean Conformal Algebras. In: Dobrev, V., Ed., *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer, 301-309.
https://doi.org/10.1007/978-4-431-54270-4_21
- [9] Gao, D.F. and Gao, Y. (2022) Representations of the Planar Galilean Conformal Algebra. *Communications in Mathematical Physics*, **391**, 199-221.
<https://doi.org/10.1007/s00220-021-04302-9>
- [10] Chen, Q.F. and He, Y. (2023) 2-Local Derivations on the Planar Galilean Conformal Algebra. *International Journal of Mathematics*, **34**, Article ID: 2350023.
<https://doi.org/10.1142/s0129167x23500234>
- [11] Gao, S.L., Liu, D. and Pei, Y.F. (2016) Structure of the Planar Galilean Conformal Algebra. *Reports on Mathematical Physics*, **78**, 107-122.
[https://doi.org/10.1016/s0034-4877\(16\)30052-0](https://doi.org/10.1016/s0034-4877(16)30052-0)
- [12] Weibel, C.A. (1994) An Introduction to Homological Algebra. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/cbo9781139644136>
- [13] Iohara, K. and Koga, Y. (2011) Representation Theory of the Virasoro Algebra. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-0-85729-160-8>