

Spin(n) ($n \leq 5$)的矩阵表示

葛志健*, 曹文胜

五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门

收稿日期: 2026年7月25日; 录用日期: 2026年8月17日; 发布日期: 2026年8月28日

摘 要

本文基于四元数, 对低维自旋群Spin(n) ($n=2,3,4,5$)给出了实与复矩阵表示的显式构造。我们从Clifford 代数出发, 系统地导出了这些群的矩阵表示, 并利用经典群表示直接给出了相应的旋量表示。整个过程清楚地展示了例外同构

$$\text{Spin}(2) \cong \text{U}(1), \quad \text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2), \quad \text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2), \quad \text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2),$$

并建立了矩阵表示与上述同构之间的具体对应。这些结果可直接应用于几何、物理和计算机图形学等领域。

关键词

自旋群, Clifford 代数, 矩阵表示, 旋量表示, 四元数

The Matrix Representations of Spin(n) for $n \leq 5$

Zhijian Ge*, Wensheng Cao

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: July 25, 2026; accepted: August 17, 2026; published: August 28, 2026

* 通讯作者。

Abstract

Based on quaternions, this paper presents explicit constructions of real and complex matrix representations for the spin groups $\text{Spin}(n)$ for $n = 2, 3, 4, 5$. Starting from the Clifford algebra formalism, we compute both the matrix representations and the spinor representations of $\text{Spin}(n)$, with the spinor representations being directly obtained from those of the classical groups. The treatment highlights the well-known exceptional isomorphisms

$$\text{Spin}(2) \cong \text{U}(1), \quad \text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2), \quad \text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2), \quad \text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2),$$

and characterizes the concrete connection between the matrix representations and these isomorphisms. These results can be directly applied to geometry, physics, and computer graphics.

Keywords

Spin Group, Clifford Algebra, Matrix Representation, Spinor Representation, Quaternion

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自旋群 $\text{Spin}(n)$ 是特殊正交群 $\text{SO}(n)$ 的二重覆叠, 在微分几何、表示论和量子力学中具有基础性地位。Clifford 代数为三维和四维空间中旋转的经典四元数表示提供了统一的推广框架。

在低维情形下, 自旋群具有如下与经典矩阵群相联系的例外同构:

$$\text{Spin}(2) \cong \text{U}(1), \quad \text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2), \quad \text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2), \quad \text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2),$$

其细节可参见经典文献 [1] [2]。关于 Clifford 代数的一般理论与 Clifford 模的经典结果, 可进一步参阅 [3–5]。本文基于四元数, 对低维自旋群 $\text{Spin}(n)$ ($n = 2, 3, 4, 5$) 给出了实与复矩阵表示的显式构

造。我们从Clifford 代数出发, 系统地导出了这些群的矩阵表示, 并同时给出了相应的旋量表示。整个处理过程清晰展示了上述例外同构与矩阵表示之间的具体联系。这些结果可直接应用于几何、物理和计算机图形学等领域。

本文的结构如下: 第 2 节回顾Clifford 代数及其对合映射的基本结构; 第 3 节定义Clifford 群与扭伴随表示, 并严格证明范数在Clifford 群上取实值, 证明中避免了循环论证; 第 4 节将 $\text{Spin}(n)$ 构造为范数为1 的子群; 最后, 在第 5.1–5.4小节中, 通过直接计算基向量的扭伴随作用, 逐一导出作用在 $\mathbb{R}^n$ 上的显式矩阵公式, 并给出相应的旋量表示。

2. Clifford 代数及其对合映射

令 $\text{Cl}_{0,n}$ 是由 $e_1, \dots, e_n$ 生成的实Clifford 代数, 满足

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j).$$

对于任意子集 $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, 将其元素按升序排列为 $J = \{j_1 < \dots < j_m\}$, 并定义 $e_J = e_{j_1} \cdots e_{j_m}$, 其中 $e_\emptyset = 1$ 。集族 $\{e_J\}$ 构成 $\text{Cl}_{0,n}$ 的一组实基, 故 $\dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,n} = 2^n$ 。因此元素 $x \in \text{Cl}_{0,n}$ 可唯一展开为

$$x = \sum_J x_J e_J, \quad x_J \in \mathbb{R}.$$

该代数有三种标准对合映射:

1. 阶化对合 α (或记作 x') 由生成元上的作用 $\alpha(e_i) = -e_i$ 所定义, 即

$$\alpha(x) = \sum_J x_J (-1)^{|J|} e_J,$$

且满足 $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ 。

2. 反序映射 x^* 将每个基元素中生成元的顺序反转:

$$(e_{j_1} \cdots e_{j_m})^* = e_{j_m} \cdots e_{j_1} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e_{j_1} \cdots e_{j_m},$$

从而

$$x^* = \sum_J x_J (-1)^{\frac{|J|(|J|-1)}{2}} e_J,$$

且满足 $(xy)^* = y^* x^*$ 。

3. Clifford 共轭 $\bar{x}$ 定义为 $\bar{x} = \alpha(x)^* = (x^*)'$, 于是

$$\bar{x} = \sum_J x_J (-1)^{\frac{|J|(|J|+1)}{2}} e_J,$$

且满足 $\overline{\overline{xy}} = \bar{y} \bar{x}$ 。

定义2.1. Clifford 范数定义为 $N(x) = x\bar{x}$ 。

记 $x = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}} x_J e_J$, 其中 $x_J \in \mathbb{R}$ 。令

$$\epsilon_J = (-1)^{\frac{|J|(|J|+1)}{2}},$$

则有 $\bar{x} = \sum_J x_J e_J$ 。故有

$$N(x) = x\bar{x} = \left(\sum_J x_J e_J \right) \left(\sum_K x_K \epsilon_K e_K \right).$$

按Clifford 乘法规则, 展开可得

$$N(x) = \sum_{J, K \subseteq \{1, \dots, n\}} x_J x_K \epsilon_K e_J e_K.$$

一般地, 该和式包含所有阶次的项, 因此对 $\text{Cl}_{0,n}$ 中的一般元素 x , $N(x)$ 并不一定是标量, 且 $N(x) \neq N(\bar{x})$ 。例如, 取 $x = e_1 + e_2 e_3 e_4$, 则

$$N(x) = x\bar{x} = 2 + 2e_1 e_2 e_3 e_4, \quad N(\bar{x}) = \bar{x}x = 2 - 2e_1 e_2 e_3 e_4.$$

3. Clifford 群及其性质

记 $\text{Cl}_{0,n}^*$ 为可逆元的乘法群。任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 被视为 $\text{Cl}_{0,n}$ 中形如

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

的元素, 其中 $v_i \in \mathbb{R}$, 并记 $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 。向量模为常规的欧氏模 $\|v\|^2 := \|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$ 。

定义3.1. Clifford 群 Γ_n 是如下集合:

$$\Gamma_n = \{ x \in \text{Cl}_{0,n}^* \mid \alpha(x) v x^{-1} \in \mathbb{R}^n \ \forall v \in \mathbb{R}^n \}.$$

定义3.2. $x \in \Gamma_n$ 在 $v \in \mathbb{R}^n$ 上的扭伴随作用定义为

$$\rho_x(v) = \alpha(x) v x^{-1}.$$

现在证明 Γ_n 构成群, 且范数是实值的。

引理3.1. Γ_n 是 $\text{Cl}_{0,n}^*$ 的子群。此外, 若 $x \in \Gamma_n$, 则 $\bar{x} \in \Gamma_n$ 。

证明 若 $x, y \in \Gamma_n$, 则对任意 $v \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\rho_{xy}(v) = \alpha(xy) v (xy)^{-1} = \alpha(x) \alpha(y) v y^{-1} x^{-1} = \rho_x(\rho_y(v)) \in \mathbb{R}^n,$$

故 $xy \in \Gamma_n$ 。又 $\rho_{x^{-1}}(v) = \alpha(x)^{-1} v x$, 因为 ρ_x 是 $\mathbb{R}^n$ 的双射, 其逆为 $\rho_{x^{-1}}$, 所以 $\rho_{x^{-1}}(v)$ 也是向量。

从而 $x^{-1} \in \Gamma_n$ 。因此 Γ_n 是群。

为证 $\bar{x} \in \Gamma_n$, 注意到 $x^{-1} \in \Gamma_n$ 给出 $\alpha(x)^{-1}vx \in \mathbb{R}^n$ 对所有 v 成立。取反序映射, 得

$$(x^*v^*(\alpha(x)^{-1})^*) = x^*v\bar{x}^{-1} \in \mathbb{R}^n,$$

故 $x^*v\bar{x}^{-1}$ 是向量。但 $\alpha(\bar{x}) = x^*$, 因此 $\alpha(\bar{x})v\bar{x}^{-1} = x^*v\bar{x}^{-1} \in \mathbb{R}^n$, 这便证明了 $\bar{x} \in \Gamma_n$ 。□

命题3.1. 对任意 $x \in \Gamma_n$, $N(x) = x\bar{x}$ 是非零实数, 且 $N(x) = \bar{x}x$ 。此外, $N: \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}^*$ 是群同态, 且对任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 有 $N(v) = \|v\|^2$ 。

证明 对向量 v , 有 $\bar{v} = -v$, 故 $N(v) = v\bar{v} = -v^2 = \|v\|^2$ 。

现设 $x \in \Gamma_n$ 。对任意 $v \in \mathbb{R}^n$, 令 $w = \alpha(x)vx^{-1} \in \mathbb{R}^n$ 。因 w 是向量, 其反序满足 $w^* = w$ 。直接计算 w^* 得

$$w^* = (\alpha(x)vx^{-1})^* = (x^{-1})^*v^*\alpha(x)^* = (x^*)^{-1}v\bar{x},$$

其中用到 $v^* = v$ 以及 $\alpha(x)^* = \bar{x}$ 。将 w^* 的两个表达式相等, 得到

$$(x^*)^{-1}v\bar{x} = \alpha(x)vx^{-1}.$$

左乘 x^* 并右乘 x , 得

$$v\bar{x}x = x^*\alpha(x)v. \quad (1)$$

记 $C = \bar{x}x$, 并注意到 $C^* = x^*\alpha(x)$ 。于是(1)变为

$$vC = C^*v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

对(2)两边作用 Clifford 共轭 $\bar{\cdot}$ 。因 $\bar{v} = -v$ 且

$$\overline{C} = \overline{\bar{x}x} = \bar{x}\bar{\bar{x}} = \bar{x}x = C,$$

而 $\overline{C^*} = (\overline{C})^* = C^*$, 我们得到

$$\overline{vC} = \overline{C} \bar{v} = C(-v) = -Cv, \quad \overline{C^*v} = \bar{v} \overline{C^*} = -vC^* = -C^*v.$$

故 $-Cv = -C^*v$, 即

$$Cv = C^*v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

比较(2)与(3)给出 $vC = Cv$ 对所有向量 v 成立。因此 C 与每个生成元可交换, 从而与整个代数可交换: C 落在 $\text{Cl}_{0,n}$ 的中心里。

注意到 x 与 $\bar{x}$ 具有相同的 $\mathbb{Z}_2$ 阶次, 均为偶次或均为奇次, 故其乘积 $C = \bar{x}x$ 是偶元素。对于 $\text{Cl}_{0,n}$, 唯一的偶中心元是实标量(当 n 为偶数时, 中心为 $\mathbb{R}$; 当 n 为奇数时, 中心为 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\omega$, 其中 $\omega = e_1 \cdots e_n$, 且 ω 是奇次的, 故中心的偶部分为 $\mathbb{R}$)。因此 $C \in \mathbb{R}^*$ 。

由于 C 是非零实数, 它与一切元素可交换; 特别地,

$$N(x) = x\bar{x} = xCx^{-1} = C.$$

于是 $N(x)$ 是非零实数, 且 $N(x) = C = \bar{x}x$ 。

对 $x, y \in \Gamma_n$,

$$N(xy) = xy\overline{xy} = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = N(y)x\bar{x} = N(y)N(x),$$

因为 $N(y) \in \mathbb{R}$ 与一切元素可交换。故 $N: \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}^*$ 是群同态。□

命题3.2. 定义映射 $\rho: \Gamma_n \rightarrow O(n)$ 为

$$\rho_x(v) = \alpha(x)vx^{-1}.$$

则 ρ 是良定义的群同态, 且其像落在正交群中。

证明 同态性质已在引理 3.1 的证明中给出。为证正交性, 注意到对 $v \in \mathbb{R}^n$,

$$N(\rho_x(v)) = N(\alpha(x)vx^{-1}) = N(\alpha(x))N(v)N(x^{-1}).$$

因为 $N(\alpha(x)) = \alpha(x)\overline{\alpha(x)} = \alpha(x)\alpha(\bar{x}) = \alpha(x\bar{x}) = \alpha(N(x)) = N(x)$ (因 $N(x) \in \mathbb{R}$ 在 α 下不变), 且 $N(x^{-1}) = N(x)^{-1}$, 所以 $N(\rho_x(v)) = N(v)$ 。而对向量 w , $N(w) = \|w\|^2$, 故 $\|\rho_x(v)\| = \|v\|$ 。显然 $\rho_x(\lambda v + \mu w) = \lambda\rho_x(v) + \mu\rho_x(w)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 。因此 $\rho_x \in O(n)$ 。□

命题3.3. Γ_n 由非零向量连同非零实标量生成:

$$\Gamma_n = \mathbb{R}^* \cdot \langle \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rangle.$$

证明 任一非零向量 u 属于 Γ_n , 因为 $u^{-1} = -u/\|u\|^2$ 且

$$\rho_u(v) = \frac{uvu}{\|u\|^2} = v - 2\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}u \in \mathbb{R}^n.$$

因此所有向量的乘积及其标量倍数均在 Γ_n 中。

反之, 设 $x \in \Gamma_n$ 。由命题 3.2, $\rho_x \in O(n)$ 。Cartan–Dieudonné定理指出, $O(n)$ 的每个元素可表为至多 n 个关于超平面的反射的复合。每个反射具有 ρ_u 的形式, 其中 u 是某个单位向量。因此存在单位向量 $u_1, \dots, u_k$ 使得 $\rho_x = \rho_{u_1} \cdots \rho_{u_k}$ 。于是 $\rho_{x^{-1}u_1 \cdots u_k} = \text{identity}$, 从而 $x^{-1}u_1 \cdots u_k \in \ker \rho$ 。由命题 3.1 可知 $\ker \rho = \mathbb{R}^*$ (任何实标量均可交换且在核中; 反之, Γ_n 中的任意中心元必为标量)。因此 $x = \lambda u_1 \cdots u_k$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}^*$, 即所求证。□

4. 自旋群

Clifford 代数 $\text{Cl}_{0,n}$ 是 $\mathbb{Z}_2$ -分次的: $\text{Cl}_{0,n} = \text{Cl}_{0,n}^0 \oplus \text{Cl}_{0,n}^1$, 其中 $\text{Cl}_{0,n}^0$ 由偶次元素构成, $\text{Cl}_{0,n}^1$ 由奇次元素构成。

定义4.1.

$$\begin{aligned}\text{Pin}(n) &= \{x \in \Gamma_n \mid N(x) = 1\}; \\ \text{Spin}(n) &= \{x \in \Gamma_n \mid N(x) = 1, x \in \text{Cl}_{0,n}^0\}.\end{aligned}$$

等价地,

$$\text{Spin}(n) = \{x \in \text{Cl}_{0,n}^0 \mid xvx^{-1} \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}.$$

对于偶元素有 $\alpha(x) = x$, 故扭伴随作用退化为 xvx^{-1} 。注意 $\text{Spin}(n)$ 是 $\text{Pin}(n)$ 的子群, 且指数 $[\text{Pin}(n) : \text{Spin}(n)] = 2$ 。

引理4.1. 偶子代数同构 $\text{Cl}_{0,n}^0 \cong \text{Cl}_{0,n-1}^0$ 。

证明 对由 $e_1, \dots, e_n$ 生成且满足 $e_i^2 = -1$ 的 Clifford 代数 $\text{Cl}_{0,n}$, 定义新元素

$$f_i = e_i e_n \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

它们满足 $f_i^2 = -1$ 以及 $f_i f_j + f_j f_i = -2\delta_{ij}$ 。映射 $e_i \mapsto f_i$ 延拓为代数同构 $\text{Cl}_{0,n-1}^0 \cong \text{Cl}_{0,n}^0$ 。□

定理4.1. 限制 ρ 在 $\text{Spin}(n)$ 给出满同态

$$\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$$

其核为 $\{\pm 1\}$ 。因此 $\text{Spin}(n)$ 是 $\text{SO}(n)$ 的二重覆盖。对 $n \geq 3$, $\text{Spin}(n)$ 是单连通的, 故为 $\text{SO}(n)$ 的万有覆盖。

证明 由命题 3.3, $\rho : \Gamma_n \rightarrow \text{O}(n)$ 是同态, 且 $\ker \rho = \mathbb{R}^*$ 。限制到 $\text{Spin}(n)$, 核为 $\mathbb{R}^* \cap \text{Spin}(n) = \{\pm 1\}$ 。满射到 $\text{SO}(n)$ 是因为每个旋转是反射的偶乘积, 而每个反射是某单位向量的像。 $n \geq 3$ 时的单连通性是标准结果 [2]。□

我们将利用以下等价刻画: $\text{Spin}(n) = \{x \in \text{Cl}_{0,n}^0 \mid N(x) = 1\}$, 其中 $N(x) = x\bar{x}$, $\bar{x}$ 为 Clifford 共轭。当 n 为偶数时, 因 $\alpha(x) = x$, 有 $\bar{x} = x^*$ (反序); 当 n 为奇数时, 在偶子代数上亦成立。因此在 $\text{Spin}(n)$ 上有 $N(x) = xx^*$ 。

命题4.1. 对 $n = 2, 3, 4, 5$, 自旋群 $\text{Spin}(n) = \{x \in \text{Cl}_{0,n}^0 \mid N(x) = 1\}$ 具有如下显式形式及经典群同构:

$$\text{Spin}(2) = \{a + b e_1 e_2 \in \text{Cl}_{0,2}^0 \mid a^2 + b^2 = 1\} \cong \text{U}(1),$$

$$\text{Spin}(3) = \{a + b e_2 e_3 + c e_3 e_1 + d e_1 e_2 \in \text{Cl}_{0,3}^0 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \cong \text{SU}(2),$$

$$\text{Spin}(4) = \{u + \omega v \in \text{Cl}_{0,4}^0 \mid u, v \in \mathbb{H}, |u|^2 + |v|^2 = 1, u\bar{v} + v\bar{u} = 0\} \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2),$$

$$\text{Spin}(5) \cong \{Q \in M_2(\mathbb{H}) \mid Q^* Q = I_2\} \cong \text{Sp}(2),$$

其中 $\mathbb{H} = \text{span}\{1, e_1 e_2, e_2 e_3, e_3 e_1\}$ 是四元数代数, $\omega = e_1 e_2 e_3 e_4$ (因此 $\omega^2 = 1$), 而对 $n = 5$ 的识别通过代数同构 $\text{Cl}_{0,5}^0 \cong \mathbb{H}(2)$ 实现。

证明 $n = 2$: $\text{Cl}_{0,2}^0 = \text{span}\{1, e_1e_2\}$. 记 $x = a + be_1e_2$. 由于 $\overline{e_1e_2} = -e_1e_2$, 有

$$N(x) = x\bar{x} = a^2 + b^2.$$

因此 $N(x) = 1$ 当且仅当 $a^2 + b^2 = 1$, 且 $x \mapsto a + bi$ 将 $\text{Spin}(2)$ 等同于 $\text{U}(1)$.

$n = 3$: $\text{Cl}_{0,3}^0 = \text{span}\{1, e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2\} \cong \mathbb{H}$. 定义四元数单位 $\mathbf{i} = e_2e_3$, $\mathbf{j} = e_3e_1$, $\mathbf{k} = e_1e_2$. 偶元素 $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ 有 $\bar{x} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$, 且

$$N(x) = x\bar{x} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

单位四元数与 $\text{SU}(2)$ 的经典对应通过如下映射实现

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

故有 $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ 被映为

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix}.$$

故 $N(x) = 1$ 给出单位四元数群 $\text{Sp}(1) \cong \text{SU}(2)$.

$n = 4$: 在 $\text{Cl}_{0,4}$ 中, 令 $\omega = e_1e_2e_3e_4$. 则 $\omega^2 = 1$. 由于 ω 与每个生成元 e_i 反对易 ($\omega e_i = -e_i\omega$), 它与两个生成元的乘积(二向量)对易, 进而与整个偶子代数 $\text{Cl}_{0,4}^0$ 交换, 故 ω 是 $\text{Cl}_{0,4}^0$ 的中心元素. 偶子代数分解为 $\text{Cl}_{0,4}^0 \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. 即 $x \in \text{Cl}_{0,4}^0$ 可表示为

$$x = u + \omega v,$$

其中 $u, v \in \mathbb{H} = \text{span}\{1, \mathbf{i} = e_2e_3, \mathbf{j} = e_3e_1, \mathbf{k} = e_1e_2\}$. 事实上, 其余三个二向量为 $\omega\mathbf{i} = -e_1e_4$, $\omega\mathbf{j} = -e_2e_4$, $\omega\mathbf{k} = -e_3e_4$.

在此元素表示上, 计算 x 的 Clifford 范数:

$$N(x) = x\bar{x} = (u + \omega v)(\bar{u} + \omega\bar{v}) = |u|^2 + |v|^2 + \omega(u\bar{v} + v\bar{u}).$$

由于 $N(x)$ 必须是实标量, ω -项消失, 迫使 $u\bar{v} + v\bar{u} = 0$. 注意

$$u\bar{v} + v\bar{u} = 2\text{Re}(u\bar{v}) = 2\langle u, v \rangle.$$

因此 $u\bar{v} + v\bar{u} = 0$ 等价于 $\langle u, v \rangle = 0$. 于是

$$\text{Spin}(4) = \{x = u + \omega v \in \text{Cl}_{0,4}^0 \mid u, v \in \mathbb{H}, |u|^2 + |v|^2 = 1, u\bar{v} + v\bar{u} = 0\}.$$

在上面的表示意义下, 乘法可如下表达:

$$(u_1 + \omega v_1)(u_2 + \omega v_2) = (u_1u_2 + v_1v_2) + \omega(u_1v_2 + v_1u_2).$$

现置 $p = u + v$ 与 $q = u - v$ 。利用上述条件,

$$p\bar{p} = |u|^2 + |v|^2 + (u\bar{v} + v\bar{u}) = 1, \quad q\bar{q} = |u|^2 + |v|^2 - (u\bar{v} + v\bar{u}) = 1,$$

故 $p, q \in \mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SU}(2)$ 。反之, 任一对单位四元数 (p, q) 给出 $u = \frac{p+q}{2}$, $v = \frac{p-q}{2}$ 并满足约束。而且此映射是群同态: $x_1 x_2 \mapsto (p_1 p_2, q_1 q_2)$ 。因此

$$\mathrm{Spin}(4) \cong \{(p, q) \in \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)\} \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

$n = 5$: 由引理 4.1, 通过映射 $f_i = e_i e_5 \mapsto e_i$ ($i = 1, \dots, 4$) 有 $\mathrm{Cl}_{0,5}^0 \cong \mathrm{Cl}_{0,4}$ 。为了用 2 阶四元数矩阵表示 $\mathrm{Cl}_{0,4}$, 我们沿用前述四元数单位 $\mathbf{i} = e_2 e_3$, $\mathbf{j} = e_3 e_1$, $\mathbf{k} = e_1 e_2$, 并规定如下对应:

$$f_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{pmatrix}, \quad f_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{pmatrix}.$$

所有这些矩阵关于四元数共轭转置都是反Hermite 的 ($M^* = -M$)。因为 $\mathrm{Cl}_{0,4}$ 上的 Clifford 共轭是将每个生成元映为其负元的唯一反自同构, 故在此同构下它恰好对应于 $Q \mapsto Q^*$ 。因此, 对由 $Q \in M_2(\mathbb{H})$ 表示的 $x \in \mathrm{Cl}_{0,5}^0$,

$$N(x) = x\bar{x} \mapsto QQ^*.$$

条件 $N(x) = 1$ 从而变为 $QQ^* = I_2$, 即 Q 属于紧辛群

$$\mathrm{Sp}(2) = \{Q \in M_2(\mathbb{H}) \mid Q^*Q = I_2\}.$$

故得 $\mathrm{Spin}(5) \cong \mathrm{Sp}(2)$ 。 □

5. $n \leq 5$ 时的显式矩阵表示

本节中, 我们对 $n = 2, \dots, 5$ 逐一计算 $\mathrm{Spin}(n)$ 的矩阵表示的显式矩阵形式。同时, 根据命题 4.1 中的同构, 相应的复旋量表示可直接写出: $\mathrm{Spin}(2)$ 的旋量表示为 $\mathrm{U}(1)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的乘性作用; $\mathrm{Spin}(3)$ 的旋量表示为 $\mathrm{SU}(2)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上的基本表示; $\mathrm{Spin}(4)$ 的旋量表示分解为两个 $\mathrm{SU}(2)$ 的半旋量表示; 而 $\mathrm{Spin}(5)$ 的旋量表示则为 $\mathrm{Sp}(2)$ 在 $\mathbb{C}^4$ 上的表示, 其显式矩阵已由 κ 嵌入给出(见第 5.4 节)。

5.1. $n = 2$ 的情形

偶子代数由 1 和 $e_1 e_2$ 张成, 故

$$\mathrm{Spin}(2) = \{a + be_1 e_2 \mid a^2 + b^2 = 1\} \cong \mathrm{U}(1).$$

对 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, 作用为 $\rho_x(v) = x v x^{-1}$. 取 $x = a + b e_1 e_2$, $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, 直接计算得

$$\begin{aligned}\rho_x(v) &= (a + b e_1 e_2)(v_1 e_1 + v_2 e_2)(a - b e_1 e_2) \\ &= ((a^2 - b^2)v_1 - 2abv_2)e_1 + (2abv_1 + (a^2 - b^2)v_2)e_2.\end{aligned}$$

因此在基 $\{e_1, e_2\}$ 下的矩阵为

$$R(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \in SO(2). \quad (4)$$

这表明 $\overrightarrow{\rho_x(v)} = R(a, b) \vec{v}$.

旋量表示. 其旋量表示为 $U(1)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的乘性作用. 若记 $x = a + b e_1 e_2$, 则

$$\chi_2(x) = a + bi \in U(1).$$

5.2. $n = 3$ 的情形

注意到

$$\text{Spin}(3) = \{a + b e_2 e_3 + c e_3 e_1 + d e_1 e_2 \in \text{Cl}_{0,3}^0 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

令 $x = a + b e_2 e_3 + c e_3 e_1 + d e_1 e_2 \in \text{Spin}(3)$. 则 $x^{-1} = a - b e_2 e_3 - c e_3 e_1 - d e_1 e_2$. 直接计算作用

$$\rho_x(v) = x v x^{-1} = (a + b e_2 e_3 + c e_3 e_1 + d e_1 e_2)(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3)(a - b e_2 e_3 - c e_3 e_1 - d e_1 e_2),$$

即得如下矩阵

$$R(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 1 - 2(c^2 + d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & 1 - 2(b^2 + d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & 1 - 2(b^2 + c^2) \end{pmatrix} \in SO(3) \quad (5)$$

满足 $\overrightarrow{\rho_x(v)} = R(a, b, c, d) \vec{v}$.

旋量表示. 相应的旋量表示即为 $SU(2)$ 的基本表示. 将 $x = a + b e_2 e_3 + c e_3 e_1 + d e_1 e_2$ 等同于四元数, 对应的复矩阵为

$$\chi_3(x) = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \in SU(2),$$

此即 $\text{Spin}(3)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上的旋量表示.

具体例子验证: 绕 z 轴旋转 $\frac{\pi}{2}$ 对应的 $\text{Spin}(3) \rightarrow SO(3)$ 映射 前文已给出由 $\text{Spin}(3)$ 群元生成 $SO(3)$ 旋转矩阵的通用伴随映射公式. 为直观打通抽象代数公式与几何旋转的联系, 下面选取一组计算简

便、非平凡的自旋群元完成完整推演验证。

由经典同构 $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2)$, 三维空间旋转可等价表示为单位四元数。记四元数虚基为 $\mathbf{i} = e_2 e_3, \mathbf{j} = e_3 e_1, \mathbf{k} = e_1 e_2$, 绕 z 轴旋转角度 θ 对应的 $\text{Spin}(3)$ 元素形式为

$$x = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\theta}{2}.$$

取旋转角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 代入得到本次算例使用的自旋元:

$$x = \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k}.$$

首先验证该元素属于 $\text{Spin}(3)$: 将 x 写为标准四元数形式 $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, 对应系数

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

根据 $\text{Spin}(3)$ 的范数条件 $N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, 计算得

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

且 x 为 $\text{Cl}_{0,3}$ 中的偶次元素, 故 $x \in \text{Spin}(3)$ 。

根据前文给出的四元数到 $\text{SU}(2)$ 的显式对应

$$\chi_3(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix},$$

将上述系数代入, 得到其对应的 $\text{SU}(2)$ 二维复矩阵:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

对任意三维实向量 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + v_4 e_4$, $\text{Spin}(3)$ 到 $\text{SO}(3)$ 的二重覆叠映射由伴随变换

$$\rho(x): v \mapsto xv\bar{x}$$

定义, 其中 $\bar{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$ 为 x 的 Clifford 共轭。将 $x, \bar{x}, v$ 代入四元数乘法分步展开:

$$\begin{aligned} xv\bar{x} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}\right)(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}\right) \\ &= -v_2 e_1 + v_1 e_2 + v_3 e_3. \end{aligned}$$

将上述线性变换写成矩阵作用形式

$$\rho(x) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

提取得到显式三阶旋转矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

直接验算可得正交性条件 $M^T M = I_3$, 且行列式 $\det M = 1$, 满足特殊正交群 $SO(3)$ 的定义。从几何层面, 该矩阵正是标准绕 z 轴旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的坐标变换矩阵。

5.3. $n = 4$ 的情形

设 $\omega = e_1 e_2 e_3 e_4$; 则 $\omega^2 = 1$ 且 ω 为偶子代数 $Cl_{0,4}^0$ 的中心。偶子代数分解为

$$Cl_{0,4}^0 = \mathbb{H} \oplus \omega \mathbb{H}, \quad \mathbb{H} = \text{span}\{1, \mathbf{i} = e_2 e_3, \mathbf{j} = e_3 e_1, \mathbf{k} = e_1 e_2\}.$$

每个 $x \in Cl_{0,4}^0$ 可唯一写为 $x = u + \omega v$, 其中 $u, v \in \mathbb{H}$ 。 x 的 Clifford 共轭为 $\bar{x} = \bar{u} + \omega \bar{v}$ (因为 $\bar{\omega} = \omega$)。对向量 $V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + v_4 e_4$, 有交换律 $\omega V = -V \omega$ 。

命题5.1. 对 $x = u + \omega v \in \text{Spin}(4)$, 在等同 $V \leftrightarrow q_V = v_4 + v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ 之下, 扭伴随作用 $\rho_x(V) = x V \bar{x}$ 对应于四元数作用

$$\rho_{(p,q)}(q_V) = p q_V \bar{q}, \quad p = u + v, \quad q = u - v.$$

证明 首先注意到范数条件 $N(x) = |u|^2 + |v|^2 + \omega(u\bar{v} + v\bar{u}) = 1$ 迫使 $u\bar{v} + v\bar{u} = 0$; 因此 p 与 q 是单位四元数。只需在 $\text{Spin}(4)$ 的生成元上验证该公式。

1. 若 $x = u$ 是单位四元数 ($v = 0$), 则 $p = q = u$ 且 $\rho_x(V) = u V \bar{u}$ 。在此等同下, $u V \bar{u} \leftrightarrow u q_V \bar{u} = p q_V \bar{q}$ 。
2. 若 $x = \omega v$ 且 v 是单位四元数 ($u = 0$), 则 $p = v, q = -v$, 并利用 $\omega V = -V \omega$,

$$\rho_x(V) = \omega v V (\omega \bar{v}) = \omega v V \bar{v} \omega^{-1} = -\omega^2 v V \bar{v} = -v V \bar{v}.$$

这对应于 $-v q_V \bar{v} = v q_V \overline{(-v)} = p q_V \bar{q}$ 。

这两类元素生成 $\text{Spin}(4)$, 且映射 $x \mapsto (p, q)$ 是群同态(可验证 $\text{Spin}(4)$ 中的乘法对应 (p, q) 的分量乘法)。因此公式对所有 $x \in \text{Spin}(4)$ 成立。 $\square$

现将单位四元数参数化为

$$p = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad q = e + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k},$$

其中 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 1$ 。在 $\mathbb{H}$ 的有序基 $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 下, 左乘 p 与右乘 $\bar{q}$ 分别由实 4×4 矩阵

$$L_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad R_{\bar{q}} = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{pmatrix}$$

表示。在此基下矩阵表示的矩阵即为 $R_0(p, q) = L_p R_{\bar{q}}$ 。具体相乘得

$$R_0(p, q) = \begin{pmatrix} ae + bf + cg + dh & af - be - ch + dg & ag + bh - ce - df & ah - bg + cf - de \\ be - af + dg - ch & bf + ae - dh - cg & bg - ah - de + cf & bh + ag + df + ce \\ ce - df - ag + bh & cf + de + ah + bg & cg - dh + ae - bf & ch + dg - af - be \\ de + cf - bg - ah & df - ce + bh - ag & dg + ch + be + af & dh - cg - bf + ae \end{pmatrix}.$$

回顾基向量的对应为

$$e_4 \leftrightarrow 1, \quad e_1 \leftrightarrow \mathbf{i}, \quad e_2 \leftrightarrow \mathbf{j}, \quad e_3 \leftrightarrow \mathbf{k}.$$

因此标准基下的矩阵表示由 $R_0(p, q)$ 通过置换矩阵 P 共轭得到:

$$R(p, q) = P^{-1} R_0(p, q) P \in \mathrm{SO}(4), \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

等价地, $R(p, q)$ 可通过将 $R_0(p, q)$ 的首行和首列循环移至末尾而获得。具体而言, 若将 $R_0(p, q)$ 写为分块形式

$$R_0(p, q) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix},$$

则上述循环移位给出作用于 $(v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ 的显式矩阵

$$R(p, q) = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{21} \\ r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{31} \\ r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{41} \\ r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{11} \end{pmatrix},$$

其中 r_{ij} 即前述 $R_0(p, q)$ 中的对应元素(由 p, q 的分量表出)。

旋量表示. 由同构 $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, 半旋量表示分别由

$$\rho_+(p, q) = \chi_3(p), \quad \rho_-(p, q) = \chi_3(q)$$

给出, 其中 p, q 为单位四元数, χ_3 如上节所示。两个半旋量表示均不可约, 且分别对应左右手征旋量。

具体例子验证: 四维平面旋转对应的 $\text{Spin}(4) \rightarrow \text{SO}(4)$ 映射 为展示 $\text{Spin}(4)$ 群元到四维旋转矩阵的映射过程, 下面选取计算最简、几何意义明确的 $\text{Spin}(4)$ 群元进行推演。四维空间中最基础的旋转变换为坐标平面内的二维旋转, 对应结构最简单的 $\text{Spin}(4)$ 群元。

取四维平面 $e_1 e_2$ 旋转对应的群元形式

$$x = \cos \frac{\theta}{2} + e_1 e_2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

取旋转角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 代入得

$$x = \cos \frac{\pi}{4} + e_1 e_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 e_2.$$

首先验证该元素属于 $\text{Spin}(4)$ 。根据 $\text{Spin}(4)$ 的定义, 其为 $\text{Cl}_{0,4}$ 中模长为1的偶次 Clifford 元素, 该元素由偶次基构成, 满足偶次条件。直接计算模长

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$

满足单位模条件, 故 $x \in \text{Spin}(4)$ 。

根据前文 $\text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ 的表示对应关系, 该群元对应的两组 $\text{SU}(2)$ 二阶复矩阵为

$$p = e^{\frac{\mathbf{k}\pi}{4}} \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad q = e^{-\frac{\mathbf{k}\pi}{4}} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}.$$

对任意四维实向量 $V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + v_4 e_4$, $\text{Spin}(4)$ 到 $\text{SO}(4)$ 的映射同样由伴随变换

$$\rho(x): v \mapsto xv\bar{x}$$

定义。将 $x, \bar{x}, v$ 代入 Clifford 乘法展开化简, 可得变换后的坐标关系, 最终提取得到四维旋转矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

经验证 $M^T M = I_4$ 且 $\det M = 1$, 满足 $\text{SO}(4)$ 定义。该矩阵对应四维空间中 $e_1 e_2$ 平面旋转 $\frac{\pi}{2}$ 、保持 e_3, e_4 不变的标准旋转变换。

5.4. $n = 5$ 的情形

由引理 4.1, $\text{Cl}_{0,5}^0 \cong \text{Cl}_{0,4}$ 在同构

$$\psi_5 : \text{Cl}_{0,5}^0 \longrightarrow \text{Cl}_{0,4}, \quad \psi_5(e_i e_5) = f_i \quad (i = 1, \dots, 4)$$

下, 生成元 f_i 满足 $f_i^2 = -1$ 及 $f_i f_j + f_j f_i = -2\delta_{ij}$. 由此得到实代数的同构 $\text{Cl}_{0,4} \cong \mathbb{H}(2)$ 且有 $\text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2)$.

旋量表示. 通过将上述同构与 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ 的标准嵌入复合得到. 对四元数 $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$, 定义

$$\kappa(q) = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}.$$

则一个四元数矩阵 $Q = (q_{ij}) \in \text{Sp}(2)$ 产生一个 4×4 复矩阵

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \kappa(q_{11}) & \kappa(q_{12}) \\ \kappa(q_{21}) & \kappa(q_{22}) \end{pmatrix} \in \text{SU}(4).$$

映射 $Q \mapsto \tilde{Q}$ 是单同态, 给出 $\text{Spin}(5)$ 在 $\mathbb{C}^4$ 上的旋量表示.

$\text{Spin}(5)$ 在 $\mathbb{R}^5$ 上的矩阵表示可直接由同构 $\text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2)$ 构造. 将 $\mathbb{R}^5$ 等同于迹为零的四元数 Hermite 2×2 矩阵空间

$$\mathcal{H}_0 = \{ H \in M_2(\mathbb{H}) \mid H^* = H, \text{tr } H = 0 \}.$$

每个这样的矩阵可写为

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \mathbf{i} + x_4 \mathbf{j} + x_5 \mathbf{k} \\ x_2 - x_3 \mathbf{i} - x_4 \mathbf{j} - x_5 \mathbf{k} & -x_1 \end{pmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4 + x_5 E_5,$$

其中标准正交基矩阵为

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & 0 \end{pmatrix}.$$

内积 $\langle H, H' \rangle = \frac{1}{2} \text{Re tr}(HH')$ 使这组基成为标准正交基, 并将 $\mathcal{H}_0$ 等同于 $\mathbb{R}^5$.

群 $\text{Sp}(2)$ 在 $\mathcal{H}_0$ 上通过

$$Q \cdot H = QHQ^*$$

作用, 它保持 Hermite 性, 迹以及内积. 于是得到同态 $\rho_5 : \text{Sp}(2) \rightarrow \text{O}(5)$; 因 $\text{Sp}(2)$ 连通, 其像在 $\text{SO}(5)$ 中. 核为 $\{\pm I_2\}$, 故 ρ_5 是二重覆叠, 因而得到 $\text{Spin}(5)$ 的矩阵表示.

记 $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ 。作用在每个基元素上得

$$\begin{aligned} QE_1Q^* &= \begin{pmatrix} a\bar{a} - b\bar{b} & a\bar{c} - b\bar{d} \\ c\bar{a} - d\bar{b} & c\bar{c} - d\bar{d} \end{pmatrix}, \\ QE_2Q^* &= \begin{pmatrix} b\bar{a} + a\bar{b} & b\bar{c} + a\bar{d} \\ d\bar{a} + c\bar{b} & d\bar{c} + c\bar{d} \end{pmatrix}, \\ QE_3Q^* &= \begin{pmatrix} -b\bar{i}a + a\bar{i}b & -b\bar{i}c + a\bar{i}d \\ -d\bar{i}a + c\bar{i}b & -d\bar{i}c + c\bar{i}d \end{pmatrix}, \\ QE_4Q^* &= \begin{pmatrix} -b\bar{j}a + a\bar{j}b & -b\bar{j}c + a\bar{j}d \\ -d\bar{j}a + c\bar{j}b & -d\bar{j}c + c\bar{j}d \end{pmatrix}, \\ QE_5Q^* &= \begin{pmatrix} -b\bar{k}a + a\bar{k}b & -b\bar{k}c + a\bar{k}d \\ -d\bar{k}a + c\bar{k}b & -d\bar{k}c + c\bar{k}d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

对四元数 q , 记 $\text{Re}(q)$ 为其实部, $\text{Im}_i(q), \text{Im}_j(q), \text{Im}_k(q)$ 分别为 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的系数; 等价地,

$$\text{Im}_i(q) = \text{Re}(-\mathbf{i}q), \quad \text{Im}_j(q) = \text{Re}(-\mathbf{j}q), \quad \text{Im}_k(q) = \text{Re}(-\mathbf{k}q).$$

在基 $(E_1, \dots, E_5)$ 下读出坐标, 即得显式的 5×5 实正交矩阵

$$R_5(Q) = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2\text{Re}(a\bar{b}) & 2\text{Re}(-b\bar{i}a) & 2\text{Re}(-b\bar{j}a) & 2\text{Re}(-b\bar{k}a) \\ \text{Re}(a\bar{c} - b\bar{d}) & \text{Re}(b\bar{c} + a\bar{d}) & \text{Re}(-b\bar{i}c + a\bar{i}d) & \text{Re}(-b\bar{j}c + a\bar{j}d) & \text{Re}(-b\bar{k}c + a\bar{k}d) \\ \text{Im}_i(a\bar{c} - b\bar{d}) & \text{Im}_i(b\bar{c} + a\bar{d}) & \text{Im}_i(-b\bar{i}c + a\bar{i}d) & \text{Im}_i(-b\bar{j}c + a\bar{j}d) & \text{Im}_i(-b\bar{k}c + a\bar{k}d) \\ \text{Im}_j(a\bar{c} - b\bar{d}) & \text{Im}_j(b\bar{c} + a\bar{d}) & \text{Im}_j(-b\bar{i}c + a\bar{i}d) & \text{Im}_j(-b\bar{j}c + a\bar{j}d) & \text{Im}_j(-b\bar{k}c + a\bar{k}d) \\ \text{Im}_k(a\bar{c} - b\bar{d}) & \text{Im}_k(b\bar{c} + a\bar{d}) & \text{Im}_k(-b\bar{i}c + a\bar{i}d) & \text{Im}_k(-b\bar{j}c + a\bar{j}d) & \text{Im}_k(-b\bar{k}c + a\bar{k}d) \end{pmatrix}.$$

容易验证, 当 $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 时, 该矩阵退化为在 (E_1, E_2) 平面内角度为 2θ 的旋转, 且 $R_5(Q)$ 是行列式为 1 的正交矩阵。此即 $\text{Spin}(5)$ 在 $\mathbb{R}^5$ 上的显式矩阵表示。

具体例子验证: 五维平面旋转对应的 $\text{Spin}(5) \rightarrow \text{SO}(5)$ 映射 为延续前文低维 Spin 群统一推演框架, 直观展示 $\text{Spin}(5)$ 群元到五维特殊正交矩阵的映射流程, 选取几何含义清晰、计算最简的二维坐标平面对应 $\text{Spin}(5)$ 群元完成完整演算。五维欧氏空间 $\mathbb{R}^5$ 包含五组两两正交基 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , 基础旋转变换仅发生在某一组二维坐标平面内, 剩余三维坐标保持不变, 选取 e_1e_2 平面旋转作为典型变换构造群元。

取 e_1e_2 平面旋转角度 θ 对应的 $\text{Spin}(5)$ 群元通用形式

$$x = \cos \frac{\theta}{2} + e_1e_2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

令平面旋转角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 代入得到具体群元

$$x = \cos \frac{\pi}{4} + e_1 e_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 e_2.$$

首先验证该元素属于 $\text{Spin}(5)$ 。依据定义, $\text{Spin}(5)$ 为 $\text{Cl}_{0,5}$ 中模长等于1的偶次Clifford代数元素。该群元仅由常数项与二阶基元 $e_1 e_2$ 线性组合而成, 满足偶次条件; 计算模长平方

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$

满足单位模约束, 因此 $x \in \text{Spin}(5)$ 。

与 $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2)$ 、 $\text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ 不同, $\text{Spin}(5)$ 不存在二维不可约旋量表示, 其紧致李群同构关系为 $\text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2)$, 其中 $\text{Sp}(2)$ 是2阶四元数辛矩阵群。根据前文标准嵌入构造规则, 该群元对应的2阶四元数辛矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2).$$

对任意五维实向量 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + v_4 e_4 + v_5 e_5$, $\text{Spin}(5)$ 到 $\text{SO}(5)$ 的覆叠映射仍沿用统一伴随变换定义

$$\rho(x) : v \mapsto xv\bar{x}.$$

将群元 x 、共轭元 $\bar{x}$ 与五维向量 v 代入Clifford乘法展开化简, 提取线性变换坐标系数, 最终得到五维旋转矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

核验可得 $M^T M = I_5$ 且 $\det M = 1$, 完全满足 $\text{SO}(5)$ 矩阵定义。该矩阵几何意义为五维空间中 $e_1 e_2$ 平面旋转 $\frac{\pi}{2}$, 且保持 e_3, e_4, e_5 三个维度坐标不变的标准旋转变换。

基金项目

国家自然科学基金(11871379), 广东省高校自然科学基金重点项目(2019KZDXM025)。

参考文献

- [1] Lounesto, P. (2001) Clifford Algebras and Spinors. 2nd Edition, Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/cbo9780511526022>
- [2] Lawson, H.B. and Michelsohn, M.L. (1989) Spin Geometry. Princeton University Press.
- [3] Atiyah, M.F., Bott, R. and Shapiro, A. (1964) Clifford Modules. *Topology*, **3**, 3-38.
[https://doi.org/10.1016/0040-9383\(64\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0040-9383(64)90003-5)
- [4] Gallier, J. (2012) Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: The Pin and Spin Groups. <https://www.cis.upenn.edu/~jean>
- [5] Porteous, I.R. (1981) Topological Geometry. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/cbo9780511623943>