

不含 $B_{1,1}$ 的无爪图的安全支配数

张文悦

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年7月15日; 录用日期: 2026年8月17日; 发布日期: 2026年8月27日

摘 要

设集合 S 为图 G 的一个支配集, 若对于 $V(G) - S$ 中任意一点 u , 其在 S 中均存在邻点 v , 使得 $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ 是 G 的支配集, 则称 S 是 G 的一个安全支配集。在 G 的所有安全支配集中, 基数最小的安全支配集称为 G 的最小安全支配集, 其基数称为 G 的安全支配数, 记作 $\gamma_s(G)$ 。本文聚焦不含公牛图 $B_{1,1}$ 的无爪图, 研究其安全支配数的上界。证明了若 G 是独立数至少为3的不含 $B_{1,1}$ 的无爪图, 则其安全支配数的上界为 G 的独立数, 并给出例图表明该上界是紧的。

关键词

安全支配集, 安全支配数, 独立数, 禁用子图

The Secure Domination Number of $\{B_{1,1}, \text{Claw}\}$ -Free Graphs

Wenyue Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: July 25, 2026; accepted: August 17, 2026; published: August 27, 2026

Abstract

Let S be a dominating set of a graph G . If for every vertex $u \in V(G) - S$, there exists a

neighbor v of u in S such that $(S - \{v\}) \cup \{u\}$ is a dominating set of G , then S is called a secure dominating set of G . The secure domination number of G , denoted by $\gamma_s(G)$, is the minimum cardinality of a secure dominating set in G . This paper focuses on the upper bound problem of the secure domination number in $\{B_{1,1}, \text{claw}\}$ -free graphs, where $B_{1,1}$ denotes the bull graph. We prove that if G is a $\{B_{1,1}, \text{claw}\}$ -free graph with independence number at least 3, then the upper bound of secure domination number is the independence number of G ; moreover, we construct an example to show that this bound is tight.

Keywords

Secure Dominating Set, Secure Domination Number, Independence Number, Forbidden Subgraph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文只研究简单图。对于文中未定义的符号与术语，若无特别说明，均参照文献 [1]。令 G 为简单图且 $S \subseteq V(G)$ 。顶点集 $V(G)$ 的基数称为图 G 的阶，记作 $|G|$ 。令 $G[S]$ 和 $G - S$ 分别表示图 G 的由顶点集 S 和 $V(G) - S$ 导出的子图。记 $N_S(v) = \{u \in S \mid uv \in E(G)\}$, $N_S[v] = N_S(v) \cup \{v\}$; 当 $S = V(G)$ 时, $N_G(v)$ 和 $N_G[v]$ 可分别简写为 $N(v)$ 和 $N[v]$ 。若 $v \in S$, $u \in V(G) - S$, 且 $N_S(u) = \{v\}$, 则称 u 是 v 关于 S 的一个外部私有邻点; 令 $epn(v, S)$ 表示 v 关于 S 的所有外部私有邻点的集合。若 $V(G) - S$ 中的每个点都至少和 S 中一点相邻, 则称 S 是 G 的一个支配集; G 的最小支配集是指具有最小基数的支配集, 其基数称为 G 的支配数, 记作 $\gamma(G)$ 。设集合 D 是 G 的一个支配集, 若对于 $V(G) - D$ 中任意一点 u , 均存在点 $v \in N_D(u)$, 使得 $(D - \{v\}) \cup \{u\}$ 仍是 G 的支配集, 则称 D 是 G 的一个安全支配集; G 的最小安全支配集是指具有最小基数的安全支配集, 其基数称为 G 的安全支配数, 记作 $\gamma_s(G)$ 。由安全支配集和外部私有邻点的定义可知, 支配集 D 为图 G 的安全支配集当且仅当对于任意一点 $u \in V(G) - D$, u 在 D 中均存在邻点 v 使得 $epn(v, D) \subseteq N[u]$ 。若集合 I 中任意两个顶点在 G 中均不相邻, 则称 I 为 G 的独立集; G 的最大独立集是指具有最大基数的独立集, 其基数称为 G 的独立数, 记作 $\alpha(G)$ 。

设 G 为连通图, 对任意 $u, v \in V(G)$, 记 $d_G(u, v)$ 为 G 中 u 与 v 之间的距离, 即二者之间最短路所含的边数; 特别地, 对于 G 中给定的路 P , 若 $u, v \in V(P)$, 则 $d_P(u, v)$ 表示限制在路 P 上, u 到 v 的距

离, 即路 P 上从 u 到 v 途经的边数。

如果图 G 的顶点集可以被划分成两个非空子集 X 和 Y , 并且每条边一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 则称 G 为二部图, 记作 $G(X, Y)$ 。如果图 $G(X, Y)$ 在集合 X 中的每一个顶点都和 Y 中的每一个顶点相邻, 则称 G 为完全二部图; 设 $|X| = m$, $|Y| = n$, 则完全二部图 G 表示为 $K_{m,n}$ 。爪图是与完全二部图 $K_{1,3}$ 同构的图(见图 1(a)), 本文用符号 $K_{1,3}$ 表示爪图; 公牛图是由三角形 K_3 及其两条互不相交的悬挂边所构成的图(见图 1(b)), 记作 $B_{1,1}$ 。设 $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$, 其中 $H_1, \dots, H_t$ 为一个图序列, 若对于任意 i , $1 \leq i \leq t$, 图 G 中均不含同构于 H_i 的导出子图, 则称 G 为不含 $\mathcal{H}$ 的图。设 $\mathcal{H} = \{B_{1,1}, K_{1,3}\}$, 若 G 为不含 $\mathcal{H}$ 的图, 则称 G 为不含 $B_{1,1}$ 的无爪图。

支配集作为图论中经典的核心参数, 广泛应用于网络监控、设施选址、通信覆盖等实际优化问题, 是组合优化领域长期以来的研究热点。在传统支配集基础上, 为进一步提升支配结构的抗干扰能力与稳定性, 安全支配集的概念应运而生, 它要求支配集中每个顶点均可抵御外部单点破坏, 在网络防御、故障容错系统设计中具有重要的应用价值。

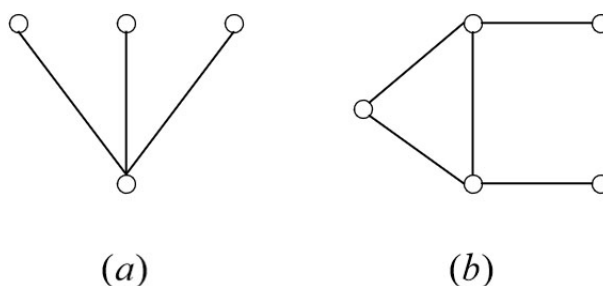


Figure 1. A claw graph $K_{1,3}$ and a bull graph $B_{1,1}$

图 1. 一个爪图 $K_{1,3}$ 与一个公牛图 $B_{1,1}$

安全支配集作为支配集的一种推广, 其在不同图类中的精确值与上下界刻画是该领域的核心研究方向之一。许多学者针对路、圈、树、外平面图等具体图类开展了深入研究。Cockayne等人 [2]探究了安全支配集的基础性质, 确定了路、圈、完全多部图等图类的安全支配数的精确值。Araki和Yumoto [3]证明: 若 G 是 n 阶极大外平面图, 则 $\gamma_s(G) \leq \lceil \frac{3n}{7} \rceil$; 若 G 是不含内部三角形的极大外平面图, 则 $\frac{n}{4} < \gamma_s(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ 。Li等人 [4]讨论了树的安全支配数, 证明 $n \geq 3$ 阶树 T 的安全支配数满足 $\frac{n+2}{3} \leq \gamma_s(T) \leq \frac{2n+2l-t}{4}$, 其中 l 和 t 分别为树的叶子数与干点数, 并给出例图证明其下界是紧的。

随着研究的深入, 学者们转向安全支配数与独立数的关联研究, 并在禁用子图约束下得到了一系列上界结果。Gupta等人 [5]针对多类禁用子图给出了安全支配数的上界, 例如, 他们证明无 P_5 图满足 $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\alpha(G)$; 无 $P_3 \cup P_2$ 图满足 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G) + 1$; 无 $P_3 \cup P_1$ 图、无 $K_2 \cup 2K_1$ 图以及连通的无 P_5 且无 C_4 图均满足 $\gamma_s(G) \leq \max\{3, \alpha(G)\}$ 。Cockayne等人 [6]指出, 对任意的无爪图 G , 均有 $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\alpha(G)$ 。Boumediene Merouane和Chellali [7]证明: 对任意图 G , 均有 $\gamma_s(G) \leq 2\alpha(G) - 1$; 若 G 是不含三角形的图, 则有 $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\alpha(G)$ 。Degawa和Saito [8]指出, 若 G 是无 C_5 图, 则 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$ 。由于不是所有的无 C_5 图都是无 $2K_2$ 图, Chen等人 [9]进一步证明: 若 G 为不含 $2K_2$ 的图, 则 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G) + 1$, 并给出例图表明其上界是紧的。

受上述研究结果启发, 本文得到如下结论:

定理1. 若图 G 是不含 $B_{1,1}$ 的无爪图, 且 $\alpha(G) \geq 3$, 则 $\gamma_s(G) \leq \alpha(G)$ 。

2. 定理1的证明

证明: 一个非连通图的独立集为各分支独立集的并集, 同样一个非连通图的安全支配集也为各分支安全支配集的并集。因此不妨假设图 G 为一个连通的不含 $B_{1,1}$ 的无爪图且 $\alpha(G) \geq 3$ 。若 G 中存在最大独立集 S 使得 S 也是 G 的安全支配集, 则显然结论成立。因此, 假设 G 的任意最大独立集均不是 G 的安全支配集。设 S 为 G 的一个最大独立集。显然 S 是 G 的支配集, 但根据前述假设, S 不是 G 的安全支配集。因此假设 $G - S$ 中存在点 u , 使得对于 u 在 S 中的任意邻点 v , 均满足 $epn(v, S)$ 中含有不与 u 相邻的点。

因为 S 是独立集且 G 是无爪图, 所以易得如下结论:

论断1. 若 $w \in V(G) - S$, 则 $1 \leq |N_S(w)| \leq 2$ 。

论断2. $|N_S(u)| = 2$ 。

证明: 假设 $|N_S(u)| = 1$ 。令 $N_S(u) = \{v\}$, $w_1 \in epn(v, S) - \{u\}$ 使得 $w_1u \notin E(G)$ 。设 $S_1 = (S - \{v\}) \cup \{u, w_1\}$ 。因为 $u, w_1 \in epn(v, S)$ 且 $w_1u \notin E(G)$, 所以 S_1 是独立集且 $|S_1| > |S|$, 这与 S 是 G 的最大独立集矛盾。因此结合论断1, 可得 $|N_S(u)| = 2$ 。□

根据论断2, 设 $N_S(u) = \{v_1, v_2\}$, $x_i \in epn(v_i, S)$, $i \in \{1, 2\}$, 使得 $ux_1, ux_2 \notin E(G)$ 。显然 $v_1x_2, v_2x_1 \notin E(G)$ 。假设 $x_1x_2 \notin E(G)$ 。令 $S_2 = (S - \{v_1, v_2\}) \cup \{x_1, x_2, u\}$ 。因为 $N_S(u) = \{v_1, v_2\}$, $x_i \in epn(v_i, S)$ 且 $ux_i \notin E(G)$, $i \in \{1, 2\}$, 所以 S_2 是独立集且 $|S_2| > |S|$, 这与 S 为 G 的最大独立集矛盾。因此 $x_1x_2 \in E(G)$ 。因为 $\alpha(G) \geq 3$, 所以 $|S| \geq 3$ 。令 $v_3 \in S - \{v_1, v_2\}$ 。由于 $x_i \in epn(v_i, S)$, 所以 $x_iv_3 \notin E(G)$, $i \in \{1, 2\}$ 。由于 G 是连通图, 所以 G 中存在分别连接 v_3 与 x_1 、 x_2 的路。假设 P 为所有连接 v_3 与 x_1 、 x_2 的路中长度最小的路, 且不妨假设 P 的两个端点为 v_3 、 x_2 。由于 $x_2v_3 \notin E(G)$, 故 $|P| \geq 3$ 。设 x_{i+2} 为 P 上满足 $d_P(x_2, x_{i+2}) = i$ 的顶点, 其中 $1 \leq i \leq |P| - 1$; 当 $i = |P| - 1$ 时, $x_{i+2} = x_{|P|+1} = v_3$ 。即 $P = x_2x_3 \dots x_{|P|+1} = x_2x_3 \dots v_3$ 。

论断3. 已知 P 是 G 中所有连接 v_3 与 x_1 、 x_2 的路中长度最小的路, 且 P 的两个端点为 v_3 、 x_2 , 则:

- (1) $x_1 \notin V(P)$ 且 $x_1x_k \notin E(G)$, 其中 $4 \leq k \leq |P| + 1$;
- (2) $x_kx_l \notin E(G)$, 其中 $2 \leq k \neq l \leq |P| + 1$, $|k - l| \geq 2$;
- (3) 若 $k \geq 5$ 且 $x_k \neq v_i$, 则 $v_ix_k \notin E(G)$, $i \in \{1, 2\}$ 。

证明: 因为 P 是 G 中所有连接 v_3 与 x_1 、 x_2 的路中长度最小的路, 且 P 的两个端点为 v_3 、 x_2 , 所以(1)和(2)显然成立。下面证明(3)也成立。先证 $i = 1$ 时(3)成立。采用反证法。假设 $v_1x_k \in E(G)$ 。则取路 $P' = x_1v_1x_k \dots x_{|P|+1}$, 显然 P' 是 G 中连接 v_3 与 x_1 的路且满足 $|P'| < |P|$, 这与路 P 的最小性矛盾, 因此 $v_1x_k \notin E(G)$ 。类似可证 $v_2x_k \notin E(G)$, 即(3)成立。□

以下将分别针对 $x_3 \neq v_2$ 及 $x_3 = v_2$ 两种情况对该定理进行证明。

情况1. $x_3 \neq v_2$ 。

由 $x_2 \in epn(v_2, S)$ 及 $x_1 \notin V(P)$, $ux_2 \notin E(G)$ 知 $x_3 \in V(G) - (S \cup \{x_1, u\})$ 。则由 $G[\{x_2, x_1, v_2, x_3\}]$

$\neq K_{1,3}$ 以及 $x_1v_2 \notin E(G)$, 可得 $x_1x_3 \in E(G)$ 或者 $v_2x_3 \in E(G)$ 。

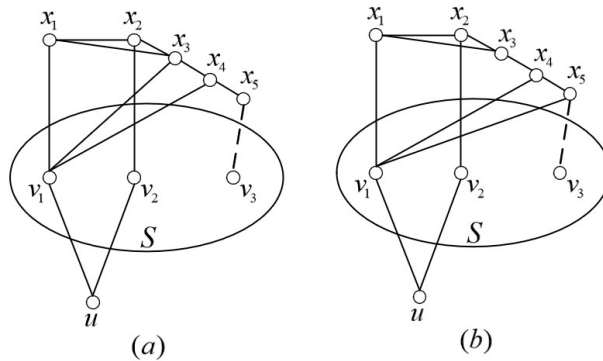


Figure 2. The diagram of the proof of Claim 4

图 2. 论断4证明中的示图

论断4. $x_1x_3 \notin E(G)$ 。

证明: 假设 $x_1x_3 \in E(G)$, 则根据 $x_3 \in V(G) - (S \cup \{x_1, u\})$ 知存在 $x_4 \in V(P)$ 。显然 $x_4 \neq v_1$ 。否则会得到一条连接 v_3 与 x_1 的长度小于 P 的路, 矛盾。根据论断3, 可得 $x_1x_4, x_2x_4 \notin E(G)$; 又由于 $G[\{x_2, x_1, x_3, v_1, x_4\}] \neq B_{1,1}$ 以及 $v_1x_2 \notin E(G)$, 所以 $v_1x_3 \in E(G)$ 或者 $v_1x_4 \in E(G)$ 。

假设 $v_1x_3 \in E(G)$ 。由 $G[\{x_3, x_2, v_1, x_4\}] \neq K_{1,3}$ 以及 $v_1x_2, x_2x_4 \notin E(G)$, 可得 $v_1x_4 \in E(G)$ 。由于 S 是独立集, 所以 $x_4 \in V(G) - S$, 从而存在 $x_5 \in V(P)$ 。因为 P 是最短路, 所以 $x_5 \neq v_1$ 。根据论断3, 可得 $v_1x_5, x_2x_4, x_3x_5, x_2x_5 \notin E(G)$; 又 $v_1x_2 \notin E(G)$, 所以 $G[\{v_1, x_3, x_4, x_2, x_5\}] = B_{1,1}$, 矛盾(见图 2(a))。因此 $v_1x_3 \notin E(G)$, $v_1x_4 \in E(G)$ 。同理由 S 是独立集知 $x_4 \in V(G) - S$, 从而存在 $x_5 \in V(P)$ 且 $x_5 \neq v_1$ 。由 $G[\{x_4, x_3, v_1, x_5\}] \neq K_{1,3}$ 以及 $v_1x_3, x_3x_5 \notin E(G)$, 可得 $v_1x_5 \in E(G)$, 与论断3矛盾(见图 2(b))。□

根据论断4, 可得 $x_1x_3 \notin E(G)$, $v_2x_3 \in E(G)$ 。由 $x_3 \in V(G) - (S \cup \{x_1, u\})$ 知存在 $x_4 \in V(P)$ 。因为 P 是最短路, 所以 $x_4 \notin \{v_1, v_2\}$ 。根据论断3, 可得 $x_1x_4, x_2x_4 \notin E(G)$; 又 $G[\{v_2, x_2, x_3, x_1, x_4\}] \neq B_{1,1}$ 以及 $x_1v_2, x_1x_3 \notin E(G)$, 所以 $v_2x_4 \in E(G)$, 从而由 S 是独立集知 $x_4 \in V(G) - S$ 。

论断5. $x_4 \neq u$ 。

证明: 假设 $x_4 = u$ 。因为 $N_S(u) = \{v_1, v_2\}$, 所以存在 $x_5 \in V(P) \setminus \{v_3\}$ 。因为 P 是最短路, 所以 $x_5 \notin \{v_1, v_2\}$ 。根据论断3, 可得 $v_1x_5, v_2x_5 \notin E(G)$; 又 $v_1v_2 \notin E(G)$, 则 $G[\{u, v_1, v_2, x_5\}] = K_{1,3}$, 矛盾。□

根据论断5, $x_4 \neq u$ 。由 $G[\{v_2, x_2, x_4, u\}] \neq K_{1,3}$ 以及 $ux_2, x_2x_4 \notin E(G)$, 可得 $ux_4 \in E(G)$ 。根据 $x_4 \in V(G) - S$ 知存在 $x_5 \in V(P)$ (见图 3)。因为 P 是最短路, 所以 $x_5 \notin \{u, v_1, v_2\}$ 。由 $G[\{v_2, u, x_4, v_1, x_5\}] \neq B_{1,1}$ 以及 $v_1v_2, v_1x_5, v_2x_5 \notin E(G)$, 可得 $ux_5 \in E(G)$ 或者 $v_1x_4 \in E(G)$ 。若 $ux_5 \in E(G)$, 则根据 $v_1v_2, v_1x_5, v_2x_5 \notin E(G)$, 可得 $G[\{u, v_1, v_2, x_5\}] = K_{1,3}$, 矛盾。因此 $ux_5 \notin E(G)$, $v_1x_4 \in E(G)$; 再结合 $ux_1, v_1x_5, x_1x_4, x_1x_5 \notin E(G)$, 可得 $G[\{u, v_1, x_4, x_1, x_5\}] = B_{1,1}$, 矛盾。因此情况1不成立。

情况2. $x_3 = v_2$ 。

因为 S 是独立集, 所以存在 $x_4 \in V(G) - S$ 使得 $v_2x_4 \in E(G)$ 。假设 $x_4 = u$ 。由 $N_S(u) =$

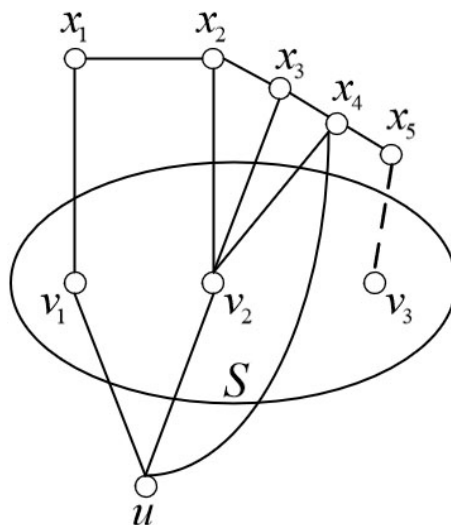


Figure 3. The diagram of Case 1

图 3. 情况1的示意图

$\{v_1, v_2\}$ 可知, 存在 $x_5 \in V(P) - \{v_3\}$ 使得 $ux_5 \in E(G)$ 。又由于 P 是最短路, 所以 $x_5 \notin \{v_1, v_2\}$ 。根据论断3, 可得 $v_1x_5, v_2x_5 \notin E(G)$; 又 $v_1v_2 \notin E(G)$, 所以 $G[\{u, v_1, v_2, x_5\}] = K_{1,3}$, 矛盾。因此 $x_4 \neq u$ 。

根据论断3, $x_2x_4 \notin E(G)$; 又 $G[\{v_2, x_2, u, x_4\}] \neq K_{1,3}$ 以及 $ux_2 \notin E(G)$, 所以 $ux_4 \in E(G)$ 。从而由 $G[\{x_4, u, v_2, v_1, x_2\}] \neq B_{1,1}$ 以及 $x_2x_4, v_1v_2, ux_2, v_1x_2 \notin E(G)$, 可得 $v_1x_4 \in E(G)$ 。由 $x_4 \in V(G) - S$ 知存在 $x_5 \in V(P)$ 。因为 P 是最短路, 所以 $x_5 \notin \{v_1, v_2\}$ 。根据论断3, $v_1x_5, v_2x_5 \notin E(G)$; 再结合 $v_1v_2 \notin E(G)$, 可得 $G[\{x_4, v_1, v_2, x_5\}] = K_{1,3}$, 矛盾(见图 4)。综上所述, 定理1成立。 $\square$

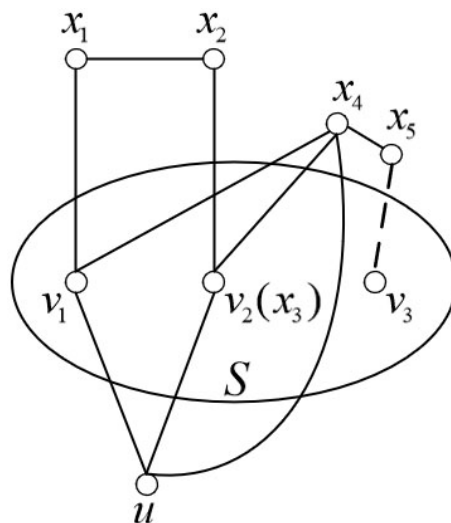


Figure 4. The diagram of Case 2

图 4. 情况2的示意图

圈 C_5 是一个不含 $B_{1,1}$ 的无爪图且满足 $\alpha(C_5) = 2$, 易证 $\gamma_s(C_5) = 3$, 不满足 $\gamma_s(C_5) \leq \alpha(C_5)$ 。因

此定理1中 $\alpha(G) \geq 3$ 这个条件是不可省略的。

现给出例图说明定理1的上界是紧的。设 G 为由 G_1, G_2, G_3 构成的图，其中， G_1, G_2 均同构于 K_m ， $m \geq 2$ ， $G_3 = P_3 = v_1v_2v_3$ ，且满足 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ ， $V(G_2) \cap V(G_3) = \{v_3\}$ ， $V(G_1) \cap V(G_3) = \{v_1\}$ （见图5），则图 G 是一个独立数为3且安全支配数也为3的不含 $B_{1,1}$ 的无爪图，该例图表明定理1的上界是最佳的。

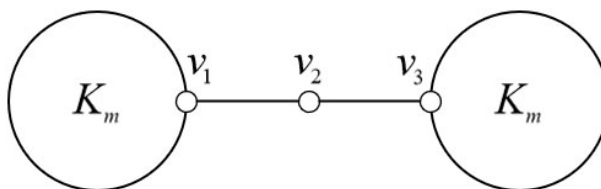


Figure 5. A $\{B_{1,1}, K_{1,3}\}$ -free graph G of order $2m + 1$ with $\alpha(G) = 3$ and $\gamma_s(G) = 3$

图 5. 满足 $\alpha(G) = 3, \gamma_s(G) = 3$ 的 $2m + 1$ 阶不含 $B_{1,1}$ 的无爪图 G

3. 结论

本文探究了不含公牛图 $B_{1,1}$ 的无爪图的安全支配数上界问题。通过分析图的结构特征，证明了若 G 是独立数至少为3的不含 $B_{1,1}$ 的无爪图，则其安全支配数小于等于独立数，并构造具体图例验证了该上界的紧性。所得结果在一定程度上补充了禁用子图条件下安全支配数的界理论，丰富了无爪图安全支配问题的相关研究，也可为网络安全、资源配置等实际应用提供理论参考。

后续研究可沿两条思路展开：其一，取消无爪图限制，仅在不含公牛图 $B_{1,1}$ 的条件下探究安全支配数与独立数之间的关系，从而剖析爪型子图结构对安全支配数的影响规律；其二，针对不含 $B_{1,1}$ 的无爪图，围绕安全全支配、连通安全支配等支配参数，探究该类参数与独立数之间的关联。

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Elsevier.
- [2] Cockayne, E.J., Grobler, P.J.P., Gründlingh, W.R., et al. (2005) Protection of a Graph. *Utilitas Mathematica*, **67**, 19-32.
- [3] Araki, T. and Yumoto, I. (2018) On the Secure Domination Numbers of Maximal Outerplanar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **236**, 23-29. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.10.020>
- [4] Li, Z., Shao, Z. and Xu, J. (2017) On Secure Domination in Trees. *Quaestiones Mathematicae*, **40**, 1-12. <https://doi.org/10.2989/16073606.2016.1259188>
- [5] Gupta, U.K., Henning, M.A., Maniya, P.V. and Pradhan, D. (2026) Secure Domination in P_5 -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **349**, Article ID: 114905. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2025.114905>

-
- [6] Cockayne, E.J., Favaron, O. and Mynhardt, C.M. (2003) Secure Domination, Weak Roman Domination and Forbidden Subgraphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, **39**, 87-100.
- [7] Boumediene Merouane, H. and Chellali, M. (2015) On Secure Domination in Graphs. *Information Processing Letters*, **115**, 786-790. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2015.05.006>
- [8] Degawa, S. and Saito, A. (2023) A Note on Secure Domination in C_5 -Free Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **333**, 82-83. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.03.016>
- [9] Chen, X., Li, T. and Zhang, J. (2025) A Note on Secure Domination Number in $2K_2$ -Free Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **368**, 162-164. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.02.019>