

非线性Volterra型二次积分方程的Sinc配置方法

甘富康^{1,2}

¹长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

²工程数学建模与分析湖南省重点实验室, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年7月20日; 录用日期: 2026年8月13日; 发布日期: 2026年8月25日

摘要

本文聚焦非线性Volterra型二次积分方程, 开展基于修正型Sinc配置方法的数值分析研究。针对该类方程难以直接求解解析解的痛点, 本文首次将修正型Sinc配置算法应用于该类方程数值求解, 依托修正型Sinc插值公式选取等距配置点完成方程离散, 把原积分方程等价转化为可计算的非线性方程组; 分别采用单指数(SE)、双指数(DE)两种变换构造离散格式, 并深入对比两类变换下算法的数值性能。同时, 文中系统推导解的存在唯一性相关理论, 清晰梳理本部分理论结论与现有相关研究成果的关联; 完成严格误差界理论分析后, 通过多组数值算例仿真验证, 结果证实本文所提算法拥有优异的稳定性、可靠性与计算有效性。

关键词

非线性Volterra型二次积分方程, Sinc配置方法, 误差分析

Sinc Collocation Method for Nonlinear Volterra Integral Equations of Quadratic Type

Fukang Gan^{1,2}

¹School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

²Hunan Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and Analysis in Engineering, Changsha Hunan

Received: July 20, 2026; accepted: August 13, 2026; published: August 25, 2026

Abstract

This paper focuses on nonlinear Volterra quadratic integral equations and conducts numerical analysis based on the modified Sinc collocation method. Given the difficulty in directly deriving analytical exact solutions for such integral equations, this work is the first to apply the modified Sinc collocation algorithm to numerically solve this class of equations. Relying on the modified Sinc interpolation formula, equidistant collocation points are selected to discretize the original integral equation, which is equivalently transformed into a tractable nonlinear system of equations. Two types of transformations, single exponential (SE) and double exponential (DE), are adopted to construct discrete schemes, and the numerical performance of the algorithm under the two transformations is thoroughly compared. Meanwhile, the theoretical results regarding the existence and uniqueness of solutions are systematically derived, and the relationships between these theoretical conclusions and existing research findings are clearly clarified. After rigorous theoretical analysis of error bounds, multiple numerical examples are carried out for simulation verification, and the results demonstrate that the proposed algorithm possesses favorable stability, reliability and computational effectiveness.

Keywords

Nonlinear Quadratic Volterra Integral Equations, Sinc Collocation Method, Error Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要研究如下第二类非线性 Volterra 型二次积分方程(NQVIE):

$$u(t) = g(t) + f(t, u(t)) \int_0^t k(t, s, u(s)) ds, \quad a < t < b \quad (1)$$

其中 $u(t)$ 是未知函数, $g(t)$ 、 $f(t, u(t))$ 和 $k(t, s, u(s))$ 是给定的连续函数。

2011年, Maleknejad [1] 等人基于不动点法和求积法则, 开发了一种高效的数值计算方法来近似求解二次 Volterra 积分方程。随后通过若干定理证明了该数值方法的收敛性, 并通过数值算例展示了该方法的适用性与准确性, 从而验证了理论结果的可靠性。

2015年, Maleknejad [2] 等人探讨了一种基于逐次逼近技术求解非线性积分方程的数值方法。该方法生成一个函数序列, 该序列收敛于方程的解。这一过程涉及不动点法、求积规则和插值方法。为了求得误差的总体界, Maleknejad 等人分别分析了每一步逼近的误差界, 并通过综合这些误差界, 推导出总误差的估计。最后, 通过若干数值算例验证了该方法的精度和有效性。

2016年, Abdou [3] 等人研究了在特定条件下, 具有连续核的第二类非线性二次积分方程解的存在唯一性。随后, 采用 Adomian 分解法及其改进方案, 将其转化为非线性代数系统, 并证明了该方法解的存在唯一性。最后, 针对不同的连续核形式进行了数值计算, 并在每种情况下给出了收敛误差率。

2025年, Nuraei [4] 利用 Chelyshkov 配置谱方法求解非线性 Volterra 型二次积分方程。该方法基于以未知系数表示的 Chelyshkov 多项式近似解, 利用 Chelyshkov 多项式及其性质推导了积分和乘积的运算矩阵。阐述了如何应用这些运算矩阵来求解所提及的问题, 对所提出方法的误差进行了分析。最后提供了一些数值算例以证明该方法的有效性。

2025年, Mollapourasl [5] 等人利用 Sinc 方法结合不动点方法, 求得了非线性半无穷区间的二次积分方程的近似解。并且通过一个定理证明了求解该积分方程的数值格式的收敛性, 并给出了数值实验, 以展示该数值格式的精确度, 同时也验证了理论分析结果的正确性。

2026 年, Okayama [6]对于第二类的线性 Volterra-Fredholm 积分方程使用一种修正型的 Sinc 配置方法。该方法利用 Sinc 函数的 Kronecker δ 的性质, 重新设计了离散格式。数值实验显示, 该方法在实现难度和计算成本方面具有优势。

因此, 本文提出使用修正型 Sinc 配置方法来处理非线性 Volterra 型二次积分方程。

2. 解的存在性与唯一性

关于 NQVIE (1)解的存在性与唯一性理论, 文献 [1] [5] [7] [8] 证明该积分方程的存在性和唯一性, 本文提出关于 NQVIE (1)存在解的另一类情形。

定理1 [9]: (Banach 空间不动点原理): 若在Banach 空间 H 上存在一个压缩算子 $\mathcal{A}$, 则在 H 内满足 $\mathcal{A}u = u$ 的方程有唯一解。

定义1: 设区间 $L = (a, b)$, $E = C(a, b)$ 为定义在区间 L 上的连续且有界函数空间, 其上范数定义为

$$\|u\| = \sup_{a < t < b} |u(t)| \quad (2)$$

定理2: 若积分方程 (1) 满足以下条件 (i)–(vii) 及 $(L_2\lambda_1 + L_1\lambda_2)\lambda_3 < 1$ 成立, 则 NQVIE (1) 存在唯一解 $u \in C(a, b)$ 。

- (i) 函数 $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ 连续;
- (ii) 函数 $f : L \times E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续;
- (iii) 函数 $k, v : L \times L \times E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续;
- (iv) f, v, k 满足 Lipschitz 条件: 存在两个正常数 L_1, L_2 , 使得对任意 $t, s \in L, x, y \in E$,

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq L_1|x - y|,$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_2|x - y|;$$

- (v) $\lambda_1 = \sup \{|k(t, s, x)| : t, s \in L, x \in E\}$;
- (vi) $\lambda_2 = \sup \{|f(t, x)| : t \in L, x \in E\}$; $\lambda_2 = \sup \{|v(t, s, x)| : t, s \in L, x \in E\}$;
- (vii) $\lambda_3 = \max \{|a|, |b|\}$ 。

证明. 令 $\mathcal{A}$ 为一个映射, 定义为 $\mathcal{A} : E \rightarrow E$,

$$(\mathcal{A}u)(t) = g(t) + f(t, u(t)) \int_0^t k(t, s, u(s))ds.$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}x)(t) - (\mathcal{A}y)(t) &= f(t, x(t)) \int_0^t k(t, s, x(s))ds - f(t, y(t)) \int_0^t k(t, s, y(s))ds \\ &= f(t, x(t)) \int_0^t k(t, s, x(s))ds - f(t, y(t)) \int_0^t k(t, s, x(s))ds \\ &\quad + f(t, y(t)) \int_0^t k(t, s, x(s))ds - f(t, y(t)) \int_0^t k(t, s, y(s))ds \\ &= (f(t, x(t)) - f(t, y(t))) \int_0^t k(t, s, x(s))ds \\ &\quad + f(t, y(t)) \left(\int_0^t (k(t, s, x(s)) - k(t, s, y(s)))ds \right), \end{aligned}$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}u(t)\| &\leq \max_{a < t < b} |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \int_0^t |k(t, s, x(s))| ds \\
&\quad + \max_{t \in L} |f(t, y(t))| \int_0^t |k(t, s, x(s)) - k(t, s, y(s))| ds, \\
&\leq \lambda_3 L_2 \lambda_1 \max_{t \in L} |x(t) - y(t)| + \lambda_3 L_1 \lambda_2 \max_{t \in L} |x(t) - y(t)|, \\
&\leq \lambda_3 (L_2 \lambda_1 + L_1 \lambda_2) \|x(t) - y(t)\|,
\end{aligned}$$

在条件 $\lambda_3(L_2\lambda_1 + L_1\lambda_2) < 1$ 下, 映射 $\mathcal{A}$ 是 E 上的一个压缩映射。因此, NQVIE (1) 存在唯一的解。□

3. Sinc 配置方法

3.1. Sinc 函数

Sinc 函数在整个实轴上的定义为

$$\text{Sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

对于 $h > 0$ 且 $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, 配置点等距分布的平移 Sinc 函数为

$$S(j, h)(x) = \begin{cases} \frac{\sin[\pi(x - jh)/h]}{\pi(x - jh)/h} & (x \neq jh), \\ 1 & (x = jh). \end{cases} \quad (4)$$

在配置点 $x_j = jh$ 处, 用于插值的 Sinc 函数满足 Kronecker δ 性质

$$S(j, h)(kh) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & k = j, \\ 0 & k \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

定理3 [10]: 若函数 $u(t)$ 定义在整个实数域上, 则对于 $h > 0$, 有

$$u(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} u(jh) S(j, h)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

3.2. 区间上的 Sinc 配置

如上所述, Sinc 配置方法在理论上可在无限区间上实现逼近。但对于定义在有限区间 $L = (a, b)$ 上的问题, 我们需要采用一些特殊的方法来保持这种近似的特性。参照文献 [11] 的方法,

我们考虑使用单指数(SE)变换(及其逆变换)和双指数(DE)变换(及其逆变换)将有限区间 $L = (a, b)$ 映射到整个实轴上, 并在实轴上使用Sinc 配置方法。

有限区间 $L = (a, b)$ 上的单指数变换 $\psi^{\text{SE}}(x)$ 为

$$t = \psi^{\text{SE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{b+a}{2}, x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

$\psi^{\text{SE}}(x)$ 的逆变换 $\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)$ 为

$$x = \{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t-a}{b-t}\right), t \in (a, b). \quad (8)$$

将Sinc 近似与SE 变换相结合, 我们得到如下公式

$$u(t) \approx \sum_{j=-N}^N u(\psi^{\text{SE}}(jh)) S(j, h)(\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)), \quad t \in (a, b). \quad (9)$$

其中

$$S(j, h)(\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) = \text{sinc}\left(\frac{\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t) - jh}{h}\right). \quad (10)$$

有限区间 $L = (a, b)$ 上的双指数变换 $\psi^{\text{DE}}(x)$ 为

$$t = \psi^{\text{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x)\right) + \frac{b+a}{2}, x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

$\psi^{\text{DE}}(x)$ 的逆变换 $\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)$ 为

$$x = \{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t) = \ln\left[\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{t-a}{b-t}\right) + \sqrt{1 + \left\{\frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{t-a}{b-t}\right)\right\}^2}\right], t \in (a, b). \quad (12)$$

将Sinc 近似与DE 变换相结合, 我们得到如下公式

$$u(t) \approx \sum_{j=-N}^N u(\psi^{\text{DE}}(jh)) S(j, h)(\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)), \quad t \in (a, b). \quad (13)$$

其中

$$S(j, h)(\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) = \text{sinc}\left(\frac{\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t) - jh}{h}\right). \quad (14)$$

3.3. 带辅助基函数的 Sinc 配置方法

由于当 $t \rightarrow a$ 或 $t \rightarrow b$ 时, (9)式和(13)式的右侧会趋于 0。此时, 若 $u(a) \neq 0$ 或 $u(b) \neq 0$, 则 Sinc 配置方法在端点附近无法给出精确的逼近结果, 解决此问题的标准方法是引入辅助基函数,

以修正端点处的逼近误差。

$$\omega_a(t) = \frac{b-t}{b-a}, \quad \omega_b(t) = \frac{t-a}{b-a}. \quad (15)$$

将区间 $L = (a, b)$ 上的 Sinc 逼近与辅助基函数相结合, 得到新的 Sinc 逼近

$$u(t) = u_{-N-1}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N u_j \operatorname{sinc}\left(\frac{\{\psi^{-1}(t) - jh\}}{h}\right) + u_{N+1}\omega_b(t), \quad (16)$$

其中 ψ 可以是 ψ^{SE} 或 ψ^{DE} , $u_j = u(\psi(jh))$ 。将(16)式中的 $u(x)$ 代入给定的方程(1)中并设置 $(2N+3)$ 个配置点 $t = t_i$ ($i = -N-1, \dots, N+1$), 如下所示

$$t_i = \begin{cases} a & (i = -N-1), \\ \psi(ih) & (i = -N, \dots, N), \\ b & (i = N+1), \end{cases}$$

我们得到一个关于未知系数 u_j ($i = -N-1, \dots, N+1$) 的非线性方程组。对于 $j = -N-1, \dots, N+1$ 成立。然而, 由于在配置点 $j = \pm(N+1)$ 处的不一致性, 该方法的实现相当繁琐。

为了解决这个问题, 2017 年 Okayama [12] 利用 Sinc 函数的 Kronecker δ 的性质, 推导了另一种带辅助基函数的修正型 Sinc 配置方法。

$$u_N(t) = u_{-N}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N \{u_j - u_{-N}\omega_a(\psi(jh)) - u_N\omega_b(\psi(jh))\} S(j, h) (\{\psi\}^{-1}(t)) + u_N\omega_b(t), \quad (17)$$

为了表示简便, 我们引入近似算子 $\mathcal{T}_N^{\text{SE}}: C(a, b) \rightarrow C(a, b)$, 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N^{\text{SE}}[u](t) &= u(\psi^{\text{SE}}(-Nh))\omega_a(t) + u(\psi^{\text{SE}}(Nh))\omega_b(t) \\ &\quad + \sum_{j=-N}^N \{u(\psi^{\text{SE}}(jh)) - u(\psi^{\text{SE}}(-Nh))\omega_a(\psi^{\text{SE}}(jh)) \\ &\quad - u(\psi^{\text{SE}}(Nh))\omega_b(\psi^{\text{SE}}(jh))\} S(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

同理, 将 SE 变换替换为 DE 变换, 我们引入近似算子 $\mathcal{T}_N^{\text{DE}}: C(a, b) \rightarrow C(a, b)$, 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N^{\text{DE}}[u](t) &= u(\psi^{\text{DE}}(-Nh))\omega_a(t) + u(\psi^{\text{DE}}(Nh))\omega_b(t) \\ &\quad + \sum_{j=-N}^N \{u(\psi^{\text{DE}}(jh)) - u(\psi^{\text{DE}}(-Nh))\omega_a(\psi^{\text{DE}}(jh)) \\ &\quad - u(\psi^{\text{DE}}(Nh))\omega_b(\psi^{\text{DE}}(jh))\} S(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)). \end{aligned} \quad (19)$$

定义2 [12]: 设 α 为满足 $\alpha \leq 1$ 的正常数, $\mathcal{D}$ 为满足 $(a, b) \subset \mathcal{D}$ 的单连通复区域。 $\mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ 表示满足

条件 (20) 的函数 $u \in \text{HC}(\mathcal{D})$ 构成的集合, 存在常数 C , 使得对所有 $z \in \mathcal{D}$, 有

$$|u(z) - u(a)| \leq C|z - a|^\alpha, \quad |u(b) - u(z)| \leq C|b - z|^\alpha. \quad (20)$$

此处 $\mathcal{D}$ 为由复带状区域

$$\mathcal{D}_d = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\text{Im } \zeta| < d\}$$

经变换 ψ^{SE} 或 ψ^{DE} 映射得到的区域, 其中 d 为正常数。我们假设 $\mathcal{D}$ 满足以下两种形式之一

$$\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d) = \{z = \psi^{\text{SE}}(\zeta) : \zeta \in \mathcal{D}_d\}$$

或

$$\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) = \{z = \psi^{\text{DE}}(\zeta) : \zeta \in \mathcal{D}_d\}.$$

对于属于 $\mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ 的函数, 修正型SE-Sinc 与DE-Sinc 近似的收敛性定理如下所示。

定理3 [13]: 设 $u \in \mathbf{M}_\alpha(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$, 其中 $0 < d < \pi$ 。令 N 为正整数, 步长 h 按下式选取

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}}. \quad (21)$$

则存在与 N 无关的常数 C , 使得

$$\|u - \mathcal{T}_N^{\text{SE}} u\|_{C(a,b)} \leq C\sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}. \quad (22)$$

定理4 [13]: 设 $u \in \mathbf{M}_\alpha(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$, 其中 $0 < d < \pi/2$ 。令 N 为正整数, 步长 h 按下式选取

$$h = \frac{\log(2dN/\alpha)}{N}. \quad (23)$$

则存在与 N 无关的常数 C , 使得

$$\|u - \mathcal{T}_N^{\text{DE}} u\|_{C(a,b)} \leq C e^{-\pi d N / \log(2dN/\alpha)}. \quad (24)$$

3.4. Sinc 不定积分公式

定理5 [13]: 设函数 u 在区域 $\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 内解析, 其中 $0 < d < \pi$, 则存在常数 M 和 α , 使得

$$|u(z)| \leq M|z - a|^{\alpha-1}|b - z|^{\alpha-1}. \quad (25)$$

SE-Sinc 与DE-Sinc 不定积分是用于近似计算不定积分的数值公式, 其收敛性定理如下所示。其中, $J(j, h)$ 定义为

$$J(j, h)(t) = h \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left[\frac{\pi(t - jh)}{h} \right] \right\}, \quad (26)$$

(26)式中 $\text{Si}(x)$ 为正弦积分, 定义为

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

定理6 [13]: 设函数 u 在区域 $\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 内解析, 其中参数 d 满足 $0 < d < \pi$, 且存在常数 M 和 α , 使得条件(25)式对所有 $z \in \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 成立. 设 N 为正整数, 步长 h 按(21)式选取. 则存在与 N 无关的常数 C , 使得

$$\max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t u(s) ds - \sum_{j=-N}^N u(\psi^{\text{SE}}(jh)) (\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{SE}})^{-1}(t)) \right| \leq C e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}. \quad (27)$$

为了表示简便, 我们引入近似积分算子 $\mathcal{V}_N^{\text{SE}} : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$

$$\mathcal{V}_N^{\text{SE}}[u](t) = \sum_{j=-N}^N u(\psi^{\text{SE}}(jh)) (\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{SE}})^{-1}(t)). \quad (28)$$

定理7 [13]: 设函数 u 在区域 $\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 内解析, 其中参数 d 满足 $0 < d < \pi$, 且存在常数 M 和 α , 使得条件(25)式对所有 $z \in \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 成立. 设 N 为正整数, 步长 h 按(23)式选取. 则存在与 N 无关的常数 C , 使得

$$\max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t u(s) ds - \sum_{j=-N}^N u(\psi^{\text{DE}}(jh)) (\psi^{\text{DE}})'(jh) J(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq C \frac{\log(2dN/\alpha)}{N} e^{-\pi d N / \log(2dN/\alpha)}. \quad (29)$$

同理, 将SE 变换替换为DE 变换, 我们引入近似积分算子 $\mathcal{V}_N^{\text{DE}} : C(a, b) \rightarrow C(a, b)$

$$\mathcal{V}_N^{\text{DE}}[u](t) = \sum_{j=-N}^N u(\psi^{\text{SE}}(jh)) (\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{SE}})^{-1}(t)). \quad (30)$$

4. 离散格式

在前面两节中, 我们介绍了一种修正型的Sinc 配置方法和 Sinc 不定积分公式. 同时, 为了表示的简便, 我们还引入了近似算子 $\mathcal{T}$ 和近似积分算子 $\mathcal{V}$. 本节我们将使用该方法构造出针对方程(1) 的数值解.

设 $\mathcal{P} : C(a, b) \rightarrow C(a, b)$ 是由下式定义的乘积算子

$$(\mathcal{P}u)(t) = f(t, u(t)) \int_0^t k(t, s, u(s)) ds. \quad (31)$$

4.1. SE-Sin离散格式

结合SE-Sinc 不定积分公式, 得到算子 $(\mathcal{P}u)(t)$ 的离散格式如下

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}}(u)(t) = f(t, u(t)) \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(jh), u(\psi^{\text{SE}}(jh))) (\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{SE}})^{-1}(t)). \quad (32)$$

将 (32) 式和近似算子 $\mathcal{T}_N^{\text{SE}}$ 代入方程 (1) 中得到关于 u_j 在配置点 $t_j = \psi^{\text{SE}}(jh)$ ($j = -N, \dots, N$) 的非线性方程组

$$U_n^{\text{SE}} - K_n^{\text{SE}} \cdot F_n^{\text{SE}} = G_n^{\text{SE}}. \quad (33)$$

其中

$$(K_n^{\text{SE}})_{ij} = k(t_i, \psi^{\text{SE}}(jh), u(\psi^{\text{SE}}(jh))) (\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{SE}})^{-1}(t_i)), \quad i = -N, \dots, N, \quad j = -N, \dots, N, \quad (34)$$

U_n^{SE} 、 F_n^{SE} 和 G_n^{SE} 为 n 维向量, 定义为

$$\begin{aligned} U_n^{\text{SE}} &= [u(\psi^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, u(\psi^{\text{SE}}(Nh))]^T, \\ F_n^{\text{SE}} &= [f(\psi^{\text{SE}}(-Nh), u(\psi^{\text{SE}}(-Nh))), \dots, f(\psi^{\text{SE}}(Nh), u(\psi^{\text{SE}}(Nh)))]^T, \\ G_n^{\text{SE}} &= [g(\psi^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, g(\psi^{\text{SE}}(Nh))]^T. \end{aligned}$$

4.2. DE-Sin离散格式

将SE 变换替换为DE 变换, 得到算子 $(\mathcal{P}u)(t)$ 的离散格式如下

$$\mathcal{P}_N^{\text{DE}}(u)(t) = f(t, u(t)) \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{DE}}(jh), u(\psi^{\text{DE}}(jh))) (\psi^{\text{DE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{DE}})^{-1}(t)), \quad (35)$$

将 (35) 式和近似算子 $\mathcal{T}_N^{\text{DE}}$ 代入方程 (1) 中得到关于 u_j 在配置点 $t_j = \psi^{\text{DE}}(jh)$ ($j = -N, \dots, N$) 的非线性方程组

$$U_n^{\text{DE}} - K_n^{\text{DE}} \cdot F_n^{\text{DE}} = G_n^{\text{DE}}. \quad (36)$$

其中

$$(K_n^{\text{DE}})_{ij} = k(t_i, \psi^{\text{DE}}(jh), u(\psi^{\text{DE}}(jh))) (\psi^{\text{DE}})'(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{DE}})^{-1}(t_i)), \quad i = -N, \dots, N, \quad j = -N, \dots, N, \quad (37)$$

U_n^{DE} 、 F_n^{DE} 和 G_n^{DE} 为 n 维向量, 定义为

$$\begin{aligned} U_n^{\text{DE}} &= [u(\psi^{\text{DE}}(-Nh)), \dots, u(\psi^{\text{DE}}(Nh))]^T, \\ F_n^{\text{DE}} &= [f(\psi^{\text{DE}}(-Nh), u(\psi^{\text{DE}}(-Nh))), \dots, f(\psi^{\text{DE}}(Nh), u(\psi^{\text{DE}}(Nh)))]^T, \\ G_n^{\text{DE}} &= [g(\psi^{\text{DE}}(-Nh)), \dots, g(\psi^{\text{DE}}(Nh))]^T. \end{aligned}$$

5. 误差分析

定理8: 设 $u \in M_\alpha(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$, 其中 $0 < d < \pi$, $\alpha \in (0, 1)$ 。设函数 g, f, k 满足定理2 中的条件(i)-(vii), 设 N 为正整数, 步长 h 按公式(21)选取。则存在与 N 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\max_{a < x < b} |u(t) - u_N^{\text{SE}}(t)| \leq C\sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}.$$

证明: 由定理(6), 存在常数 $C_1 > 0$, 使得

$$\max_{a < t < b} \left| \int_a^t k(t, s, u(s)) ds - \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(jh), u(\psi^{\text{SE}}(jh))) \psi^{\text{SE}'}(jh) J(j, h) ((\psi^{\text{SE}})^{-1}(t)) \right| \leq C_1 e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}.$$

从而

$$|Pu - P_N^{\text{SE}} u| \leq L_1 C_1 e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}, \quad (38)$$

利用Lipschitz 条件(iv) 及条件(v)、(vi), 有

$$\begin{aligned} & |P_N^{\text{SE}} u(t) - P_N^{\text{SE}} u_N^{\text{SE}}(t)| \\ & \leq |f(t, u(t)) - f(t, u_N^{\text{SE}}(t))| \cdot \left| \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(jh), u(\psi^{\text{SE}}(jh))) (\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h) \right| \\ & \quad + |f(t, u_N^{\text{SE}}(t))| \cdot \sum_{j=-N}^N |k(t, \psi^{\text{SE}}(jh), u(\psi^{\text{SE}}(jh))) - k(t, \psi^{\text{SE}}(jh), u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(jh)))| \cdot |(\psi^{\text{SE}})'(jh) J(j, h)|. \end{aligned}$$

利用核函数有界以及 Cauchy-Schwarz 不等式, 设

$$M_1 = \left(h \sum_{j=-N}^N |(\psi^{\text{SE}})'(jh)|^2 |J(j, h)|^2 \right)^{1/2}, \quad M_2 = \lambda_1 M_1.$$

则

$$|P_N^{\text{SE}} u - P_N^{\text{SE}} u_N^{\text{SE}}| \leq (L_2 M_2 + L_1 \lambda_2 M_1) |u - u_N^{\text{SE}}|. \quad (39)$$

令 $\kappa = L_2 M_2 + L_1 \lambda_2 M_1$, 结合(38)-(39), 得

$$(1 - \kappa) |u - u_N^{\text{SE}}| \leq (C_1 \sqrt{N} + \lambda_2 C_2) e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}.$$

当 N 充分大时, 由条件 $(L_2 \lambda_1 + L_1 \lambda_2) \lambda_3 < 1$, 可保证 $\kappa < 1$ 。从而存在常数 $C > 0$, 使得

$$|u - u_N^{\text{SE}}| \leq C\sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}.$$

定理9: 设 $u \in M_\alpha(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$, 其中 $0 < d < \pi/2$, $\alpha \in (0, 1)$ 。设 g, f, k 满足定义1 中的条件(i)-(vii), 设 N 为正整数, 步长 h 按式(23)选取。则存在与 N 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$|u - u_N^{\text{DE}}| \leq C e^{-\pi d N / \log(2dN/\alpha)}.$$

6. 数值实验

本节将应用前文介绍的Sinc 配置方法计算非线性Volterra 型二次积分方程的近似解。通过若干数值算例来验证方法的有效性和可靠性。为定量刻画收敛特性，定义配置点处的最大误差如下

$$E_N^{\text{SE}} = \max_{-N \leq j \leq N} |u(x_j) - u(\psi^{\text{SE}}(jh))|.$$

$$E_N^{\text{DE}} = \max_{-N \leq j \leq N} |u(x_j) - u(\psi^{\text{DE}}(jh))|.$$

6.1. 数值算例 1

考虑具有唯一精确解 $u(t) = \frac{t^{10}}{10}$ 的非线性二次 Volterra 积分方程

$$u(t) = g(t) + \left(\frac{x}{1+x} \right) \ln(1+u(t)) \int_0^t st + u(s)ds,$$

其中

$$g(t) = \frac{x^{10}}{10} - \frac{t}{1+t} \ln \left(1 + \frac{t^{10}}{10} \right) \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^{11}}{110} \right).$$

Table 1. Comparison of maximum errors for SE and DE transformations with different node numbers N in Example 1

表 1. 算例 1 SE变换与DE变换在不同节点数 N 下的最大误差对比

N	E_N^{SE}	E_N^{DE}
5	1.134318e-05	4.523137e-05
15	2.777786e-07	1.447600e-07
25	1.963923e-08	5.097937e-10
35	2.291409e-09	1.056660e-11
45	3.598237e-10	6.777912e-14

6.2. 数值算例 2

考虑具有唯一精确解 $u(t) = e^t$ 的非线性二次 Volterra 积分方程

$$u(t) = e^t + \frac{t\sqrt{e^t}}{10} (\ln(e^{-t} + 1) - \ln 2) + \sqrt{u(t)} \int_0^t \frac{0.1t}{1+u(s)} ds.$$

6.3. 数值算例的结果分析

表 1和图 1、表 2和图 2分别展示了对应的三个算例，在配置点数 $N = 5, 15, 25, 35, 45$ 时，使用所提的修正型 Sinc 配置方法得到的数值解与精确解的对比结果。表格数据清晰表明：随着配置点个数 N 的逐步增大，数值解与精确解之间的误差呈现出快速的下降趋势，即使在区间端点这类传统数值方法容易出现精度损失的位置，所提方法的数值解依然能够与精确解保持高精度的吻合度，充分验证了该方法的数值稳定性与逼近能力。

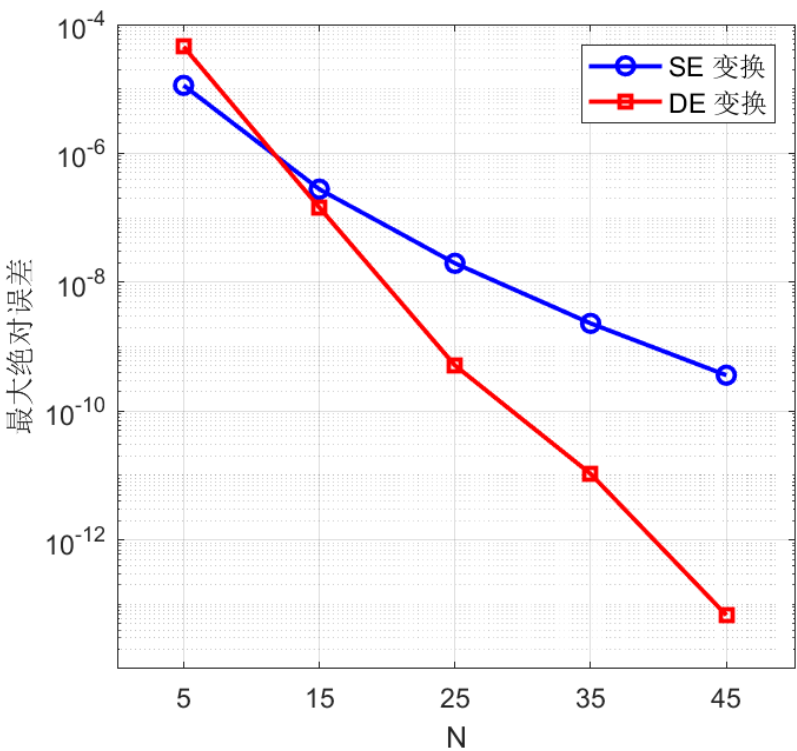


Figure 1. Values of E_N for Example 1 with $\alpha = 1$ and $d = \frac{6.25}{\pi}$ under different N

图 1. $\alpha = 1$, $d = \frac{6.25}{\pi}$ 时算例 1 在不同 N 下的 E_N 值

Table 2. Comparison of maximum errors for SE and DE transformations with different node numbers N in Example 2

表 2. 算例 2 SE变换与DE变换在不同节点数 N 下的最大误差对比

N	E_N^{SE}	E_N^{DE}
5	3.314819e-04	8.979462e-05
15	1.131379e-05	2.276004e-08
25	9.918509e-07	1.531975e-11
35	1.343643e-07	6.439294e-14
45	2.366093e-08	4.973799e-14

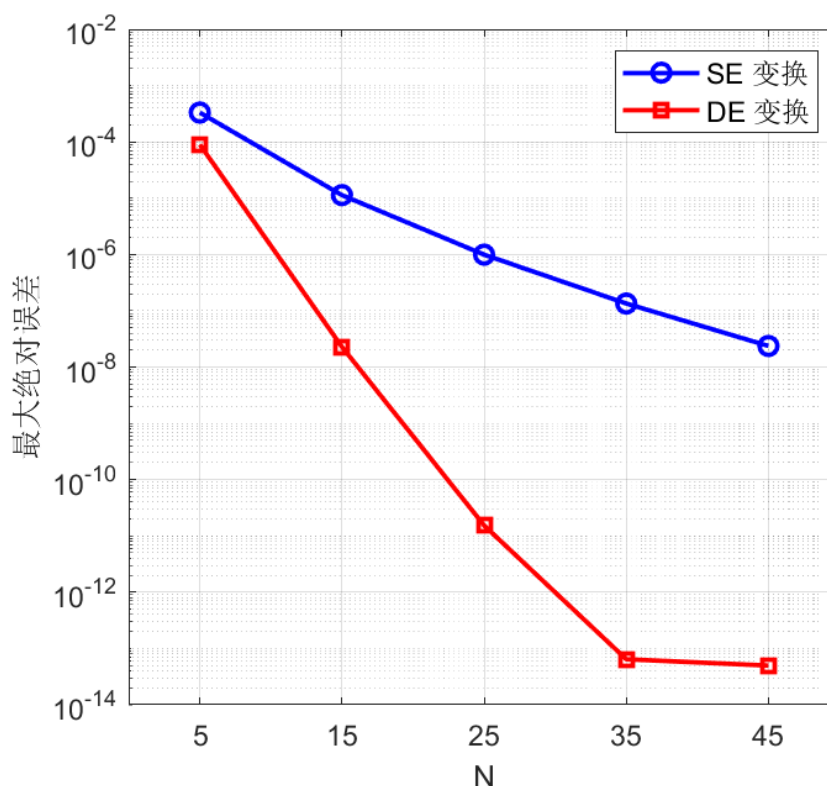


Figure 2. Values of E_N for Example 2 with $\alpha = 1$ and $d = \frac{6.25}{\pi}$ under different N

图 2. $\alpha = 1$, $d = \frac{6.25}{\pi}$ 时算例 2 在不同 N 下的 E_N 值

参考文献

- [1] Maleknejad, K., Torabi, P. and Mollapourasl, R. (2011) Fixed Point Method for Solving Non-linear Quadratic Volterra Integral Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 2555-2566. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.07.055>
- [2] Maleknejad, K., Torabi, P. and Sauter, S. (2015) Numerical Solution of a Non-Linear Volterra Integral Equation. *Vietnam Journal of Mathematics*, **44**, 5-28. <https://doi.org/10.1007/s10013-015-0149-8>
- [3] Abdou, M.A. and Raad, S.A. (2016) New Numerical Approach for the Nonlinear Quadratic Integral Equations. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, **13**, 6435-6439. <https://doi.org/10.1166/jctn.2016.5582>
- [4] Nuraei, R. (2025) Chelyshkov Matrix-Collocation Method for Solving Nonlinear Quadratic Integral Equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, **40**, 297-310. <https://doi.org/10.1007/s11766-025-3956-z>
- [5] Mollapourasl, R. and Siebor, J. (2025) Numerical Solution of Nonlinear Quadratic Integral Equation of Hammerstein Type Based on Fixed-Point Scheme. *Mathematics*, **13**, Article 1413.

<https://doi.org/10.3390/math13091413>

- [6] Okayama, T. (2026) Improvement of Sinc-Collocation Methods for Volterra-Fredholm Integral Equations of the Second Kind and Their Theoretical Analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **476**, Article ID: 117055. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2025.117055>
- [7] Banaś, J. and Martinon, A. (2004) Monotonic Solutions of a Quadratic Integral Equation of Volterra Type. *Computers & Mathematics with Applications*, **47**, 271-279. [https://doi.org/10.1016/s0898-1221\(04\)90024-7](https://doi.org/10.1016/s0898-1221(04)90024-7)
- [8] Faraji, H., Savić, D. and Radenović, S. (2019) Fixed Point Theorems for Geraghty Contraction Type Mappings in b -Metric Spaces and Applications. *Axioms*, **8**, Article 34. <https://doi.org/10.3390/axioms8010034>
- [9] 张恭庆, 林源渠, 郭懋正. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990: 1-10.
- [10] Whittaker, E.T. (1915) XVIII.—On the Functions Which Are Represented by the Expansions of the Interpolation-Theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **35**, 181-194. <https://doi.org/10.1017/s0370164600017806>
- [11] Stenger, F. (2000) Summary of Sinc Numerical Methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121**, 379-420. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00348-4](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00348-4)
- [12] Okayama, T. (2017) Theoretical Analysis of Sinc-Collocation Methods and Sinc-Nyström Methods for Systems of Initial Value Problems. *BIT Numerical Mathematics*, **58**, 199-220. <https://doi.org/10.1007/s10543-017-0663-z>
- [13] Okayama, T., Matsuo, T. and Sugihara, M. (2013) Error Estimates with Explicit Constants for Sinc Approximation, Sinc Quadrature and Sinc Indefinite Integration. *Numerische Mathematik*, **124**, 361-394. <https://doi.org/10.1007/s00211-013-0515-y>