

一类条件收敛的级数在一类置换下保广义和

建文何, 李思雯, 蒋宜蓉*

广西民族大学数学科学学院, 广西 南宁

收稿日期: 2026年7月13日; 录用日期: 2026年8月5日; 发布日期: 2026年8月18日

摘 要

条件收敛级数在重排作用下的求和稳定性分析是经典分析中的一个重要课题。已有研究主要关注保持所有条件收敛级数的重排以及保持一般意义下的和。本文针对一类交错级数, 从渐进密度观点出发引入新的渐进平衡置换类, 并证明这一大类交错级数在这类置换下 Abel 和与 Cesàro 和均保持不变。

关键词

交错级数, 重排, 密度, Abel 和, Cesàro 和

A Class of Conditionally Convergent Series Whose Generalized Sums Are Preserved under a Class of Permutations

Wenhe Jian, Siwen Li, Yirong Jiang*

School of Mathematical Sciences, Guangxi Minzu University, Nanning Guangxi

Received: July 13, 2026; accepted: August 5, 2026; published: August 18, 2026

* 通讯作者。

Abstract

The stability of summation values of conditionally convergent series under rearrangements is a classical topic in analysis. Existing studies mainly focus on characterizing rearrangements that preserve all conditionally convergent series or that preserve the limit in the ordinary sense. In this paper, we consider a broad class of alternating series and, from the viewpoint of asymptotic density, introduce a new family of asymptotically balanced permutations. It is shown that for these series, both the Abel sum and the Cesàro sum remain invariant under such rearrangements.

Keywords

Alternating Series, Rearrangement, Density, Abel Summation, Cesàro Summation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

收敛级数经过重排后的保和性是分析学中极具挑战性的经典课题，其理论基础可追溯到数学巨匠黎曼(Riemann)的经典工作。黎曼重排定理指出：任何绝对收敛的级数经过任意的重排其和都不变，任何条件收敛但不绝对收敛的级数都可以通过重排得到任意实数甚至发散。这一结果揭示了一个极端情形，但也引出了一个自然的问题：是否存在某一类重排使得对某一类条件收敛但不绝对收敛的级数保和。

这一问题因其深刻的分析本质与组合特征，自20世纪以来始终吸引着国际顶尖数学家的关注并且已有多项重要研究成果。Levi [1]率先从组合结构角度刻画了能保持收敛级数和的部分重排；Agnew [2]则从自然数可求和性理论出发给出了另一种刻画；相关综述可参见Schaefer [3]。更进一步地，Garibay-Greenberg-Reséndis-Rivaud [4]引入几何观点，通过研究自然数子集的渐进密度证明了：不改变任何收敛级数值的重排集恰好是固定自然数子集某种渐进密度的重排集合。

上述经典结果与本文提出的渐近平衡重排存在本质差异：Levi [1]与Garibay等人 [4]刻画的是对所有收敛级数均保柯西和的置换类，约束条件最强，仅允许非常有限的重排操作；Agnew [2]给出的是保持级数收敛性的置换刻画，不保证和值不变，且同样面向全体收敛级数。而本文定义的

渐近平衡重排不再要求对所有级数生效，仅针对满足增长条件的交错级数，且仅保证广义求和意义下的和值不变，因此大幅放宽了置换的约束条件，允许更丰富的重排结构。同时，本文的渐近平衡条件仅要求正负项的渐近密度相等，与文献 [4] 中“保所有子集密度”的强条件相比，是针对交错级数正负项结构的精准弱化。本文在 [4] 基础上用分析的方法对这样的重排集 $\mathcal{G}$ 扩充，但应用范围从“所有条件收敛级数”缩小到“一类条件收敛的交错级数”并且得到的结果也只是保广义和 (Abel 和与 Cesàro 和)，Cauchy 和一般情况下并不成立。

2. 预备知识与符号

本节回顾密度概念并给出容易引起歧义的记号。

2.1. 密度

根据 [5]，给出密度的正式定义。

设 P 是正项索引集，则其密度

$$d(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P \cap [1, n]|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n}, \quad (1)$$

若极限存在，其中 $p(n)$ 是前 n 项中正项个数。

交错调和级数中 $d(P) = d(N) = 1/2$ 。

2.2. 函数复合的次数(迭代)定义

设函数 $f: X \rightarrow X$ ，其复合次数(迭代次数)定义如下。

2.2.1. 正整数次迭代($n \in \mathbb{N}^+$)

函数 f 复合 l 次记为 f_l (默认迭代记号，上下文明确时使用)，定义为：

$$f_l = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{l \text{ 次}}.$$

2.2.2. 0次迭代(恒等函数)

为满足运算封闭性(如 $f_n \circ f_m = f_{n+m}$)，定义 0 次复合为恒等函数：

$$f_0(x) = x.$$

3. 主要结果

为了研究一类交错级数在一类重排下的求和稳定性，这类置换需要满足特定的性质。一方面，重排后的级数的正负项需要分布得相对均衡；另一方面需要不打乱同号项的相对顺序，从而避免

重排后产生新的局部震荡。基于此, 给出这样的置换类的定义。

定义3.1. 渐近平衡重排(Asymptotically Balanced Rearrangement)

一一置换 $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 称为渐近平衡重排, 若满足以下两个条件:

1) **相对顺序保持性(Relative Order Preservation)**: σ 保持同号项之间的相对顺序。即: 对于原级数中的任意两个同号项(角标 i, j 同为奇数或同为偶数), 若 $i < j$, 则在重排后的序列中, 第 i 项依然出现在第 j 项之前(即 $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$)。

2) **渐近平衡性(Asymptotic Balance)**: 设 $p(n)$ 为重排后的序列 $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ 对应的前 n 项中正项的个数(即原级数正项下标在重排序列前 n 项中出现的次数), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

所有满足上述条件的置换构成的集合记为 $\mathcal{G}$ 。

定理3.1. 设交错级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$$

的 Abel 和存在, 即 $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} c_n r^n$ 存在并等于 S 。并且满足:

- 1) $(c_n)_{n \geq 1}$ 为单调递减正数列且 $c_n \rightarrow 0$ 。
- 2) 存在 $l \in \mathbb{N}$ 以及常数 $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, 使得对充分大的 n 有

$$\frac{C_1}{n L_l(n)} \leq c_n \leq \frac{C_2}{n L_l(n)}, \quad L_l(n) := \underbrace{\log \log \cdots \log n}_{l \text{ 次}}$$

(记号 L_l 为第 l 次迭代对数, 假定 n 足够大以令各迭代对数有意义)。

令 $\sigma \in \mathcal{G}$, 则原交错级数经重排 σ 后的 Abel 和及 Cesàro 和与原级数相同。

证明. 先约定记号并引入若干辅助量。

设 $P(K)$ 表示第 K 个正项在重排序列中所处的位置(下标), 即 $\sigma(P(K))$ 对应重排后第 K 个正项; 同理定义 $Q(K)$ 为第 K 个负项在重排序列中的位置。原序列中第 K 个正项显然位于原序列下标 $2K-1$ 处(因原为交替正负); 但在置换 σ 下位置被改变为 $P(K)$ 。由渐近平衡性可得下面的基本渐近关系:

引理3.1. 在定义3.1条件2下, 有

$$P(K) = 2K + o(K), \quad Q(K) = 2K + o(K) \quad (K \rightarrow \infty).$$

证明. 由定义可知, 重排后的序列在前 $P(K)$ 项中恰好包含 K 个正项, 故 $p(P(K)) = K$ 。

又因为渐近平衡性给出了 $p(n) = \frac{1}{2}n + o(n)$, 令 $n = P(K)$, 可得:

$$K = p(P(K)) = \frac{1}{2}P(K) + o(P(K)).$$

将 $o(P(K))$ 写作 $P(K)\epsilon(P(K))$, 其中当 $K \rightarrow \infty$ 时(从而 $P(K) \rightarrow \infty$), $\epsilon(P(K)) \rightarrow 0$. 代入上式得到:

$$K = \frac{1}{2}P(K) + P(K)\epsilon(P(K)) = P(K) \left(\frac{1}{2} + \epsilon(P(K)) \right).$$

从而通过移项可得:

$$P(K) = \frac{K}{\frac{1}{2} + \epsilon(P(K))} = 2K \cdot \frac{1}{1 + 2\epsilon(P(K))}.$$

利用泰勒展开 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, 可知:

$$P(K) = 2K(1 - 2\epsilon(P(K)) + o(\epsilon(P(K)))) = 2K + o(K).$$

同理对负项位置 $Q(K)$ 得相同结论。 □

下一步需要比较 $c_{P(K)}$ 与 c_{2K} 的量级。因为 c_n 单调递减且满足 $c_n \sim \Theta(1/(nL_l(n)))$, 则下面的引理。

引理3.2. 若 c_n 单调递减且存在 C_1, C_2 使得对充分大 n 满足 $C_1/(nL_l(n)) \leq c_n \leq C_2/(nL_l(n))$, 且 $m(K) = 2K + o(K)$, 则

$$\frac{c_{m(K)}}{c_{2K}} \rightarrow 1 \quad (K \rightarrow \infty).$$

证明. 不妨设 $m(K) = 2K(1 + \delta_K)$, 其中 $\delta_K = o(1)$ 。由单调性得

$$\frac{c_{2K(1+\delta_K)}}{c_{2K}} \leq 1.$$

利用两边的渐近上/下界估计(c_n 与 $1/(nL_l(n))$ 同阶), 有正的常数 A, B (可从 C_1, C_2 导出)使得对充分大 K :

$$A \frac{1}{2K(1+\delta_K)L_l(2K(1+\delta_K))} \leq c_{2K(1+\delta_K)} \leq B \frac{1}{2K(1+\delta_K)L_l(2K(1+\delta_K))},$$

以及

$$A \frac{1}{2KL_l(2K)} \leq c_{2K} \leq B \frac{1}{2KL_l(2K)}.$$

因此

$$\frac{c_{2K(1+\delta_K)}}{c_{2K}} \geq \frac{A}{B} \cdot \frac{L_l(2K)}{(1+\delta_K)L_l(2K(1+\delta_K))}.$$

但 $L_l(\cdot)$ 是慢变函数(每次迭代对数均为慢变函数的复合), 当 $\delta_K \rightarrow 0$ 时

$$\frac{L_l(2K)}{L_l(2K(1+\delta_K))} \rightarrow 1.$$

因此上下界均逼近1, 得出 $\frac{c_{m(K)}}{c_{2K}} \rightarrow 1$. 同理可得当 $m(K) < 2K$ 的情形 ($\delta_K < 0$) 也成立, 故结论成立. $\square$

按Hardy (参见 [6] 中关于Abel 求和与重排的恒等式)的经典恒等: 对置换 $\sigma \in \mathcal{G}$ 与任意 $0 < r < 1$, 有

$$\sum_{n=1}^N a_{\sigma(n)} r^n - \sum_{n=1}^N a_n r^n = \sum_{n=1}^N (A_{\sigma}(n) - A(n)) r^n (1-r),$$

其中 $A(n) = \sum_{k=1}^n a_k$, $A_{\sigma}(n) = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$. (此处我们仅引用恒等式形式, 不重复证明; 对于交错符号情形, 可把 $a_n = (-1)^{n-1} c_n$ 代入.)

由此可将重排前后Abel 部分和之差写成若干易于估计的余项. 下面我们直接对该余项做估计并证其在先 $N \rightarrow \infty$ 再 $r \rightarrow 1^-$ 的极限下为0从而Abel 和保持.

令 $a_n = (-1)^{n-1} c_n$. 由于 σ 保持正负号, $A(n)$ 与 $A_{\sigma}(n)$ 在奇偶位置上交换的本质差异可以用正项与负项的局部重排来描述.

把正项单独记为 $+c_{2k-1}$ 的序列, 负项单独记为 $-c_{2k}$ 的序列; 在重排中, 第 K 个正项位于位置 $P(K)$, 第 K 个负项位于位置 $Q(K)$.

考察 $A_{\sigma}(n) - A(n)$,

$$A_{\sigma}(n) - A(n) = \sum_{K: P(K) \leq n} c_{P(K)} - \sum_{K: 2K-1 \leq n} c_{2K-1} - \left(\sum_{K: Q(K) \leq n} c_{Q(K)} - \sum_{K: 2K \leq n} c_{2K} \right).$$

将该等式代入Hardy 恒等并换序(换序的合法性在下文处理), 得到重排前后部分Abel 和之差可表示为

$$\Delta_{N,r} := \sum_{n=1}^N (A_{\sigma}(n) - A(n)) r^n (1-r) = (1-r) \sum_{K \geq 1} (\Phi_{K,N}(r)),$$

其中每一项 $\Phi_{K,N}(r)$ 由若干次 c_m 的乘积与幂次 $r^{\cdot}$ 线性组合构成; 为便于估计, 用更加粗糙但足够的上界来控制 $\Delta_{N,r}$.

注意到 $|A_{\sigma}(n) - A(n)|$ 不超过前 n 项中正负采样差造成的绝对值之和, 可得对任意 n :

$$|A_{\sigma}(n) - A(n)| \leq \sum_{K: |P(K) - (2K-1)| \leq n} |c_{P(K)} - c_{2K-1}| + \sum_{K: |Q(K) - 2K| \leq n} |c_{Q(K)} - c_{2K}|.$$

因此

$$|\Delta_{N,r}| \leq (1-r) \sum_{n=1}^N \sum_{K: P(K) \leq n} |c_{P(K)} - c_{2K-1}| r^n + (1-r) \sum_{n=1}^N \sum_{K: Q(K) \leq n} |c_{Q(K)} - c_{2K}| r^n.$$

为了处理 $\Delta_{N,r}$, 先取 $N \rightarrow \infty$. 注意到式中的每一项都为非负, 因此对固定 $0 < r < 1$, 可

由Tonelli 定理交换求和次序并取 $N \rightarrow \infty$, 得到

$$|\Delta_{N,r}| \leq (1-r) \sum_{K \geq 1} |c_{P(K)} - c_{2K-1}| \sum_{n \geq P(K)} r^n + (1-r) \sum_{K \geq 1} |c_{Q(K)} - c_{2K}| \sum_{n \geq Q(K)} r^n.$$

计算几何级数并消去 $(1-r)$ 因子, 得到

$$|\Delta_{N,r}| \leq \sum_{K \geq 1} |c_{P(K)} - c_{2K-1}| r^{P(K)} + \sum_{K \geq 1} |c_{Q(K)} - c_{2K}| r^{Q(K)}.$$

只需证明当先令 $N \rightarrow \infty$ (右侧上界在 $N \rightarrow \infty$ 极限存在) 再令 $r \rightarrow 1^-$ 时右侧趋于0.

固定任意小的 $\varepsilon > 0$, 由Lemma 3.1, 存在 K_0 使得对所有 $K \geq K_0$ 有 $P(K) \in [2K(1-\varepsilon), 2K(1+\varepsilon)]$ 且同理对 $Q(K)$.

把和分为两部分: $K \leq K_0$ 的有限项和 $K > K_0$ 的尾项. 前者对极限行为不构成问题(因为有限和乘以 $r^{\text{某处}}$ 在 $r \rightarrow 1^-$ 时仍为有限常数); 关键在于控制尾项.

对尾项, 利用单调性与Lemma 3.2, 当 $K \rightarrow \infty$ 时

$$|c_{P(K)} - c_{2K-1}| \leq |c_{P(K)} - c_{2K}| + |c_{2K} - c_{2K-1}|.$$

且由单调性 $c_{2K} - c_{2K-1} \leq 0$ (其绝对值为 $c_{2K-1} - c_{2K} \leq c_{2K-1}$), 再利用 $c_{2K} \sim c_{2K-1} \sim \Theta(1/(KL_l(K)))$, 得

$$|c_{P(K)} - c_{2K-1}| = o(c_{2K}) + O(c_{2K-1}) = O(c_{2K}).$$

于是对于大 K , 存在常数 M 使得

$$|c_{P(K)} - c_{2K-1}| \leq M c_{2K}.$$

同理对负项差 $|c_{Q(K)} - c_{2K}|$ 也有相同的上界. 代入上界并合并两和, 得到存在常数 M' 使得

$$|\Delta_{N,r}| \leq M' \sum_{K \geq 1} c_{2K} r^{2K(1-\varepsilon)} + (\text{有界的有限项}).$$

(这里使用了 $r^{P(K)} \leq r^{2K(1-\varepsilon)}$ 当 $P(K) \geq 2K(1-\varepsilon)$, 并用类似估计控制 $Q(K)$ 项.)

现在利用 $c_{2K} \leq C_2/(2KL_l(2K))$, 对尾和估计为

$$\sum_{K \geq K_0} c_{2K} r^{2K(1-\varepsilon)} \leq C \sum_{K \geq K_0} \frac{1}{KL_l(K)} r^{2K(1-\varepsilon)}.$$

由于当固定 $r \in (0, 1)$ 且 $\varepsilon > 0$ 时, 项 $r^{2K(1-\varepsilon)}$ 指数衰减, 右侧级数绝对收敛, 且随 $r \rightarrow 1^-$ 其和趋向于0 的速度可以被任意控制: 更形式地, 先令 $r \in (0, 1)$ 接近1, 对任意 $\delta > 0$ 存在 K_1 使得 $\sum_{K \geq K_1} \frac{1}{KL_l(K)} r^{2K(1-\varepsilon)} < \delta$ (因为指数项主导). 因此当先取 $N \rightarrow \infty$ (以使有限截断不影响) 再

令 $r \rightarrow 1^-$, 右侧尾和可任意小。有限项在 $r \rightarrow 1^-$ 时也为有限常数, 不影响极限为 0 的结论。

综上, 我们得到

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_{N,r} = 0.$$

即重排后的 Abel 部分和在 $r \rightarrow 1^-$ 的极限等于重排前的 Abel 极限 S 。故 Abel 和保持。

另一方面, 我们通过 Tauberian 定理严格证明 Cesàro 和同样保持不变。

回顾 Hardy-Littlewood 单边 Tauberian 定理 [6]: 若实级数 $\sum a_n$ 的 Abel 和存在且等于 S , 且存在常数 $K > 0$ 使得对充分大的 n 有 $a_n \geq -K/n$, 则该级数的 Cesàro 和存在且等于 S 。

对于重排后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, 由定理条件 $c_n \leq C_2/(nL_l(n)) \leq C_2/n$, 结合引理 3.1 中重排后项的下标与位置同阶 ($|\sigma(n)| = \Theta(n)$), 可得存在常数 $M > 0$ 使得对充分大的 n 有:

$$|a_{\sigma(n)}| = c_{|\sigma(n)|} \leq \frac{M}{n},$$

自然满足单边条件 $a_{\sigma(n)} \geq -M/n$ 。

前文已证重排后级数的 Abel 和与原级数相等, 结合上述 Tauberian 定理, 重排后级数的 Cesàro 和必然存在, 且与 Abel 和取相同值, 即与原级数的 Cesàro 和一致。

故本定理下的重排同时保持 Abel 和与 Cesàro 和。 $\square$

最后, 举例说明这样的重排未必保持柯西和。

例 3.1 (渐近平衡重排未必保持柯西和). 考虑条件收敛交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},$$

由莱布尼茨判别法可知该级数条件收敛, 存在确定的柯西和。

下面构造满足定义 3.1 的渐近平衡重排 σ , 使得重排后的级数部分和不再收敛, 即柯西和不保持。

将正、负项按区块分组: 记前 m 块累计正项数为 $S_m = m^3$, 则第 m 块包含的正项数为 $N_m = S_m - S_{m-1} = 3m^2 - 3m + 1$; 每块内正项、负项数量相等, 均为 N_m 。对第 m 块内部的项, 先按原下标从小到大排列所有正项, 再按原下标从小到大排列所有负项。

排列的整体结构如下:

$$\underbrace{(+, +, \dots, +)}_{N_1 \text{ 个正项}}, \underbrace{(-, -, \dots, -)}_{N_1 \text{ 个负项}}, \underbrace{(+, +, \dots, +)}_{N_2 \text{ 个正项}}, \underbrace{(-, -, \dots, -)}_{N_2 \text{ 个负项}}, \dots$$

验证渐近平衡性: 对任意充分大的 n , 设其落在第 m 块内, 则正项密度的波动幅度满足

$$\left| \frac{p(n)}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{N_m}{2S_{m-1}} \sim \frac{3m^2}{2m^3} = \frac{3}{2m} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \frac{1}{2}$; 同时重排保持同号项相对顺序, 故 $\sigma \in G$, 属于本文定义的渐近平衡重排类。

验证柯西和不保持: 在第 m 块正项全部加入、负项尚未加入时, 部分和达到局部峰值。由正项部分和的渐近估计 $\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \sim \sqrt{2p}$ ($p \rightarrow \infty$), 此时部分和满足

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{S_m} \frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \sum_{k=1}^{S_{m-1}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &\sim \sqrt{2S_m} - \sqrt{2S_{m-1}} \\ &\sim \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{m} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{m} \rightarrow +\infty \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

同理, 每块负项全部加入时, 部分和回落至负向局部极值, 振幅随 m 增大趋于无穷。故重排后的级数部分和序列无有限极限, 不保持原级数的柯西和。

这表明: 对于通项衰减慢于 $1/n$ 的条件收敛交错级数, 即使重排满足渐近平衡条件, 也无法保持柯西和; 而本文定理覆盖的级数(通项阶为 $1/(nL_l(n))$)因衰减更快, 在此类重排下柯西和实际也保持不变, 本文将核心结论限定为广义和不变性, 是为了覆盖更宽泛的重排类与求和场景。

4. 结论与展望

本文提出了新的重排类 $\mathcal{G}$, 证明一类交错级数在该类下的 Abel 和与切萨罗和保持, 并给出反例说明其未必保持 Cauchy 和。展示出在一定的密度条件约束下, 条件收敛但不绝对收敛的级数的求和行为仍具有一定的稳定性。在此基础上, 可考虑以下一些方向:

- 1. 渐近平衡条件的刻画与必要性。** 本文的结果表明, 满足定理3.1的交错级数在相对顺序保持性与渐进平衡性下对于 Abel 和是不变的。然而这种充分条件是否在某种意义上是“几乎最优”的, 即是否能找到更弱的必要条件? 若能找到必要条件, 将使相关不变性的结构更为清晰。
- 2. 一般 Banach 空间中的重排问题。** 对欧式空间的级数的重排理论已有深厚传统, 然而在 Banach 空间中, 绝对收敛性、弱收敛性与条件收敛性具有更多几何结构的影响。在交错结构允许的情形下, 渐近平衡型重排是否仍能保持 Abel 和或弱 Abel 和, 是一个值得探索的问题。
- 3. 其他广义求和方法的稳定性拓展。** 本文仅针对 Abel 和与 Cesàro 和两种经典广义求和形式证明了保和性, 而广义求和理论体系中还包含 Euler 求和、Borel 求和、Riesz 求和等一系列强弱各异的正则求和方法。本文所采用的渐近密度估计结合 Tauberian 定理的分析框架具备良好的可推广性, 可进一步探究渐近平衡重排类在其他求和意义下的和值不变性: 一方面可验证本文的重排条件是否足以保持 Euler 求和等更强求和法的和值稳定, 明确重排约束强度与求和方法强度的匹配关系; 另一方面可借助不同求和法之间的 Tauberian 型蕴含定理, 梳理各类广义和保和性的逻辑关联, 逐步建立密度约束型重排与广义求和稳定性的统一理论体系, 丰富条件收敛级数重排理论的研究维度。

上述延伸方向涉及分析学、求和方法与 Banach 空间理论等多个子领域, 从而为进一步研究条

件收敛级数在结构约束下的重排稳定性提供了更广阔的空间。

基金项目

本文受广西自然科学基金面上项目(2025GXNSFAA069237)、广西大学生创新创业项目(S202510608248)与国家自然科学基金项目(72263004)资助。

参考文献

- [1] Levi, F.W. (1946) Rearrangement of Convergent Series. *Duke Mathematical Journal*, **13**, 579-585. <https://doi.org/10.1215/s0012-7094-46-01348-8>
- [2] Agnew, R.P. (1955) Permutations Preserving Convergence of Series. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **6**, 563-564. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1955-0071559-4>
- [3] Schaefer, P. (1981) Sum-Preserving Rearrangements of Infinite Series. *The American Mathematical Monthly*, **88**, 33-40. <https://doi.org/10.1080/00029890.1981.11995179>
- [4] Garibay, F., Greenberg, P., Reséndis, L. and Rivaud, J. (1988) The Geometry of Sum-Preserving Permutations. *Pacific Journal of Mathematics*, **135**, 313-322. <https://doi.org/10.2140/pjm.1988.135.313>
- [5] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌. 实变函数论与泛函分析(上册·第二版修订本) [M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [6] Hardy, G.H. (1949) *Divergent Series*. Oxford University Press.