

DC复合优化问题的Lagrange对偶及Farkas引理

吴陈茜

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2026年8月11日; 录用日期: 2026年9月5日; 发布日期: 2026年9月16日

摘要

通过引入新的约束规范条件, 等价刻画了DC 复合优化问题与其Lagrange对偶问题之间的弱对偶、零对偶、强对偶及Farkas引理, 推广和改进了前人的相关结论。

关键词

DC复合优化, 零对偶, 强对偶, Farkas 引理

Lagrange Duality and Farkas' Lemma for DC Composite Optimization Problems

Chenxi Wu

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: August 11, 2026; accepted: September 5, 2026; published: September 16, 2026

Abstract

By introducing a new constraint qualification, we equivalently characterize weak duality, zero duality, strong duality and Farkas' lemma between a DC composite optimization problem and its Lagrange dual problem, which generalizes and improves the relevant conclusions in existing literature.

Keywords

DC Composite Optimization, Zero Duality, Strong Duality, Farkas' Lemma

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 X, Y, Z 是实局部凸Hausdorff 拓扑向量空间, X^*, Y^*, Z^* 分别表示 X, Y, Z 的共轭空间且 Y 和 Z 分别在闭凸锥 $K \subseteq Y$ 和 $S \subseteq Z$ 下有序. 记 $Y^\bullet := Y \cup \{\infty_Y\}$, $Z^\bullet := Z \cup \{\infty_Z\}$, 其中 ∞_Y, ∞_Z 分别表示 Y 和 Z 中关于偏序关系 $\leq_K, \leq_S$ 下的最大元. 设 $f_1 : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g_1 : Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 均为真凸函数, $f_2 : X \rightarrow Y^\bullet$ 为真 K -凸函数; $g_2 : X \rightarrow Z^\bullet$ 为真 S -凸函数, $h_t, \varphi_t : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是真凸函数, C 是 X 中的非空凸子集, T 为任意非空(可能无限)指标集. 本文考虑以下DC复合无限规划问题

$$(P) \quad \inf \{ (f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) \} \\ \text{s. t. } x \in C, h_t(x) - \varphi_t(x) \leq 0, t \in T.$$

当 $g = \varphi_t = 0$ 时, 问题 (P) 转化为凸无限规划:

$$(P_1) \quad \inf \{ f(x) \} \\ \text{s. t. } x \in C, h_t(x) \leq 0, t \in T.$$

学者们利用闭性条件和上图类条件等, 建立了凸无限优化问题的对偶理论, Farkas 引理, 最优性条

件等, 见文献 [1-4]. 若 $\varphi_t = 0$, 则问题 (P_1) 化为DC无限规划:

$$(P_2) \quad \inf \{f(x) - g(x)\} \\ \text{s. t. } x \in C, h_t(x) \leq 0, t \in T.$$

上述DC优化问题已受到广泛关注, 正如文献 [5]所指出的,DC优化问题在优化理论与应用中发挥重要作用, 学者们对不同类型的DC规划及其各类对偶问题展开了研究, 见文献 [1-3], [5-9]及其参考文献. 另一类相关的重要问题是复合凸优化问题, 因为运输选址、金融经济等实际领域的诸多凸优化问题均与复合凸函数相关, 这类问题的研究引发了学者们的广泛兴趣, 见文献 [10-12]及其参考文献.

近年来, DC复合优化问题的对偶问题成为了研究热点并取得了大量重要成果, 在文献 [13]中, Fang等人考虑带有两个复合函数的DC规划, 并提出若干新的正则性条件, 完整刻画弱 (零/强/全) 对偶性, 对于带有一个复合函数的DC 优化问题, 在文献 [14]中, Sun 与Fu在闭性约束规范条件下给出刻画全局最优解的广义次微分条件, 在文献 [15]中, Sun等人利用标准凸化技巧引入Fenchel-Lagrange 对偶问题, 并得到强对偶与广义Farkas引理的闭性约束规范条件.

在附加 f_1 为 K -递增、 g_1 为 S -递增且 $\varphi_t(x) = 0$ 的假设下, Fang 与Gong在 [16]中利用上图技巧在空间 $X^* \times \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ 中得到了若干新的正则性条件, 并给出对偶性与Farkas引理的完整刻画. 借助共轭函数上图与凸化方法, 本文旨在空间 $X^* \times \mathbb{R}$ 中提出新的约束规范, 为弱 (零/强/稳定) 对偶与 (稳定) Farkas 型命题提供完整刻画.

2. 记号与定义

设 X, Y 和 Z 是实局部凸Hausdorff 拓扑向量空间, X^*, Y^* 和 Z^* 分别是 X, Y 和 Z 的共轭空间, 分别赋予弱* 拓扑 $w^*(X^*, X)$, $w^*(Y^*, Y)$ 和 $w^*(Z^*, Z)$. $\langle x^*, x \rangle$ 表示泛函 $x^* \in X^*$ 在 $x \in X$ 处的值, 即 $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$. 对于 $D \subseteq X$, $\text{int } D$, $\text{cl } D$ 和 $\text{cone } D$ 分别表示 D 的内部, 闭包和凸锥包. 若 $D = \emptyset$, 则 $\text{cone } D = \{0\}$. 对 $W \subseteq X^*$, $\text{cl } W$ 表示 W 的弱*闭包. 集合 D 的对偶锥和示性函数分别定义为

$$D^\oplus := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \geq 0, \forall x \in D\},$$

$$\delta_D(x) := \begin{cases} 0, & x \in D, \\ +\infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

设 T 是任意 (可能无限) 指标集, 令 $\mathbb{R}^T$ 表示定义在 T 上的实值函数所组成的空间, 并赋予乘积拓扑. 记

$$\mathbb{R}^{(T)} := \{\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}^T : \text{最多只有有限个 } \lambda_t \neq 0\}.$$

用 $\mathbb{R}_+^{(T)}$ 表示 $\mathbb{R}^{(T)}$ 中的非负锥, 即

$$\mathbb{R}_+^{(T)} := \{\lambda \in \mathbb{R}^{(T)} : \lambda_t \geq 0, \forall t \in T\}.$$

令 $\text{supp } \lambda := \{t \in T : \lambda_t \neq 0\}$, 则有

$$\langle \lambda, u \rangle := \sum_{t \in T} \lambda_t u_t = \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t u_t,$$

其中 $u \in \mathbb{R}^T$, $\lambda \in \mathbb{R}^{(T)}$. 设 K 是 Y 中的闭凸锥, Y 是 K 所定义的序空间. 对于 Y 中的偏序 $\leq_K$, 定义 Y 中的最大元为 ∞_Y . 记 $Y^\bullet := Y \cup \{\infty_Y\}$, 则对每个 $y \in Y^\bullet$, 均有 $y \leq_K \infty_Y$. 设 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是真凸函数, 定义 f 的上图, 有效定义域和经典共轭函数分别为

$$\text{epi } f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\},$$

$$\text{dom } f := \{x \in X : f(x) < +\infty\},$$

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) : x \in X\}, \quad \forall x^* \in X^*.$$

显然, f^* 是真凸下半连续函数, $\text{epi } f^*$ 是弱 * 闭集. 设 $\text{cl } f$ 和 $\text{clco } f$ 分别表示 f 的下半连续包及下半连续凸包, 则有

$$\text{epi}(\text{cl } f) = \text{cl}(\text{epi } f), \quad \text{epi}(\text{cl}(\text{co } f)) = \text{cl}(\text{co}(\text{epi } f)).$$

由文献 [14], 定理 2.3.1 (iv) 知

$$f^* = (\text{cl } f)^* = (\text{cl}(\text{co } f))^*, \quad f^{**} \leq \text{cl}(\text{co } f) \leq \text{cl } f \leq f. \quad (1)$$

此外, 若 $\text{cl } f$ 是真凸的, 由文献 [17], 定理 2.3.4 知,

$$f^{**} = \text{cl } f. \quad (2)$$

且 Young-Fenchel 不等式成立, 即

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall (x, x^*) \in X \times X^*. \quad (3)$$

若 $f, h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 为真凸函数且满足 $\text{dom } f \cap \text{dom } h \neq \emptyset$, 则

$$\text{epi } f^* + \text{epi } h^* \subseteq \text{epi } (f + h)^*, \quad (4)$$

$$f \leq h \Rightarrow f^* \geq h^* \Leftrightarrow \text{epi } f^* \subseteq \text{epi } h^*. \quad (5)$$

特别地, 对任意的 $x^* \in X^*$, $r \in \mathbb{R}$, 下列等式成立:

$$\text{epi } (f + x^* + r)^* = \text{epi } f^* + (x^*, -r). \quad (6)$$

进一步, 设函数 $f_1 : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, 对任意的 $y_1, y_2 \in Y$, 当 $y_1 \leq_K y_2$ 时有 $f_1(y_1) \leq f_2(y_2)$, 则称函数 f_1 是 K -增函数. 定义函数 $f_2 : X \rightarrow Y^\bullet$ 的有效定义域和 K -上图分别为 $\text{dom } f_2 = \{x \in X : f_2(x) \in Y\}$ 和 $\text{epi}_K f_2 := \{(x, y) \in X \times Y : y \in f_2(x) + k\}$. 若 $\text{dom } f_2 \neq \emptyset$, 则称 f_2 真函数. 若 $\text{epi}_K f_2$ 是闭集, 则

称 f_2 是 K - 上图闭函数. 若对任意的 $x_1, x_2 \in X$ 和 $t \in [0, 1]$, 有

$$f_2(tx_1 + (1-t)x_2) \leq_K tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2).$$

则称 f_2 是 K - 凸函数. 对 $y^* \in \text{dom} f_1^*$, 定义 $(y^* f_2)(\cdot) : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 为

$$(y^* f_2)(x) := \begin{cases} \langle y^*, f_2(x) \rangle, & \text{若 } x \in \text{dom } f_2, \\ +\infty, & \text{其它.} \end{cases}$$

3. Farkas引理及Lagrange对偶

设 $p \in X^*$, 考虑如下带线性扰动的DC复合无限优化问题

$$\begin{aligned} (\text{P}^p) \quad & \inf \{ (f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) - \langle p, x \rangle \} \\ \text{s. t. } & x \in C, \quad h_t(x) - \varphi_t(x) \leq 0, \quad t \in T, \end{aligned}$$

系统 $\{x \in C : h_t(x) - \varphi_t(x) \leq 0, \quad t \in T\}$ 的可行解集 $\mathcal{A}$ 定义为

$$\mathcal{A} := \{x \in C : h_t(x) - \varphi_t(x) \leq 0, \quad \forall t \in T\}. \quad (7)$$

建立上述问题的Lagrange对偶问题

$$(\text{D}^p) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{\mu \in H^*} \Phi^p(\mu, \lambda), \quad (8)$$

其中 $\mu := (u, x^*, s, v)$, $s = (s_t)_{t \in T}$,

$$H^* := \text{dom } g_1^* \times \text{dom } g_2^* \times \prod_{t \in T} \text{dom } \varphi_t^* \times \text{dom } f_1^*, \quad (9)$$

且 $\Phi^p : H^* \times \mathbb{R}_+^{(T)} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ 定义如下

$$\begin{aligned} \Phi^p(\mu, \lambda) = & g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) \\ & - \left(v f_2 + \delta_c + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \right)^* \left(x^* + p + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^* \right). \end{aligned} \quad (10)$$

当 $p = 0$ 时, 问题 (P^p) 退化为问题 (P) , 对应的对偶问题为

$$(\text{D}) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{\mu \in H^*} \Phi(\mu, \lambda),$$

记 $v(\text{P}), v(\text{P}^p), v(\text{D})$ 和 $v(\text{D}^p)$ 分别表示问题 $(\text{P}), (\text{P}^p), (\text{D})$ 及 (D^p) 的最优值, 为研究问题 (P) 与问

题(D) 的对偶问题, 先给出如下定义.

定义 3.1

- (i) 若 $v(P) \geq v(D)$, 则称问题(P)与(D) 之间的弱对偶成立,
- (ii) 若 $v(P) = v(D)$, 则称问题(P)与(D)之间的零对偶成立,
- (iii) 若 $v(P) = v(D)$ 且 $S(D) \neq \emptyset$, 则称问题(P)与(D)之间的强对偶成立,
- (iv) 若对任意 $p \in X^*$, 问题(P_p)与问题(D_p)之间的弱对偶(零对偶、强对偶)成立, 则称问题(P)与问题(D)之间的稳定弱对偶(零对偶、强对偶)成立.

接下来, 我们来研究问题(P)的Farkas引理及对偶问题, 在 $X^* \times \mathbb{R}$ 中定义特征集如下:

$$\mathcal{K} := \text{epi}(f_1 \circ f_2 - g_1 \circ g_2 + \delta_A)^*$$

且

$$\begin{aligned} \mathcal{J} := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \left\{ \bigcap_{\mu \in H^*} \left(\text{epi} \left(v f_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \right)^* + (0, f_1^*(v)) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t (s_t^*, \varphi_t^*(s_t^*)) - (x^*, g_1^*(u)) + (u g_2)^*(x^*) \right) \right\}. \end{aligned}$$

引理 3.2 设 $p \in X^*$, $r \in \mathbb{R}$, 则如下结论成立:

- (i) $(p, r) \in \mathcal{K}$ 当且仅当 $v(P^p) \geq -r$.
- (ii) $(p, r) \in \mathcal{J}$ 当且仅当 $v(D^p) \geq -r$, 且存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, 对任意 $\mu \in H^*$, 存在 $v \in \text{dom } f_1^*$ 使得

$$\Phi^p(\mu, \lambda) \geq -r, \quad (11)$$

其中 $\mu = (u, x^*, x_t^*)$, H^* 和 Φ^p 由(9), (10)式定义.

Proof. (i) 根据问题(P^p) 的定义可得

$$v(P^p) = -(f_1 \circ f_2 - g_1 \circ g_2 + \delta_A)^*(p).$$

因此, 结论自然成立.

- (ii) $[\Rightarrow]$ 设 $(p, r) \in \mathcal{J}$, 则存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, 对任意的 $\mu = (u, x^*, s_t^*) \in H^*$, $v \in \text{dom } f_1^*$ 有

$$\begin{aligned} (p, r) \in \text{epi} \left(v f_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \right)^* + (0, f_1^*(v)) \\ - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t (s_t^*, \varphi_t^*(s_t^*)) - (x^*, g_1^*(u)) + (u g_2)^*(x^*), \end{aligned}$$

则有 $(\alpha, r_1) \in \text{epi}\left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t\right)^*$ 使得

$$(p, r) = (\alpha, r_1) + (0, f_1^*(v)) - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t (s_t^*, \varphi_t^*(s_t^*)) - (x^*, g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*)),$$

即

$$p = \alpha - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^* - x^*, \quad (12)$$

且

$$r + g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) = r_1 + f_1^*(v). \quad (13)$$

因为 $(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t)^*(\alpha) \leq r_1$, 结合(12), (13) 式可得

$$\begin{aligned} & r + g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) \\ & \geq \left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t\right)^*(\alpha) + f_1^*(v) \\ & = \left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t\right)^*\left(p + x^* + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^*\right) + f_1^*(v). \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) \\ & - \left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t\right)^*\left(p + x^* + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^*\right) \geq -r. \end{aligned}$$

故 $v(D^P) \geq -r$, 且对每个 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in R_+^{(T)}$ 满足 $\Phi^P(\mu, \lambda) \geq -r$.

[$\Leftarrow$] 假设 $v(D^P) \geq -r$ 且对任意 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 满足 $\Phi^{(P)}(\mu, \lambda) \geq -r$, 则

$$\begin{aligned} & \left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t\right)^*\left(x^* + p + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^*\right) \\ & \leq g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) + r, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \left(x^* + p + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^*, \quad g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) + r\right) \\ & \in \text{epi}\left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t\right)^*. \end{aligned} \quad (14)$$

进一步可得

$$p = -x^* - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^* + \left(p + x^* + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^* \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r = & f_1^*(v) - g_1^*(u) - (ug_2)^*(x^*) - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) \\ & + \left(g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) + r \right). \end{aligned} \quad (16)$$

由式(14), (15), (16) 可得

$$\begin{aligned} (p, r) \in & \text{epi} \left(v f_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \right)^* + (0, f_1^*(v)) \\ & - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t (s_t^*, \varphi_t^*(s_t^*)) - (x^*, g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*)). \end{aligned} \quad (17)$$

而(19)式对任意 $\mu \in H^*$ 成立, 故

$$\begin{aligned} (p, r) \in & \bigcap_{\mu \in H^*} \text{epi} \left(v f_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \right)^* + (0, f_1^*(v)) \\ & - \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t (s_t^*, \varphi_t^*(s_t^*)) - (x^*, g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*)). \end{aligned}$$

因此 $(p, r) \in J$.

□

定理 3.3 以下命题成立:

- (i) 问题(P) 和问题(D) 之间的稳定弱对偶成立当且仅当 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$.
- (ii) 问题(P) 和问题(D) 之间的弱对偶成立当且仅当 $\mathcal{J} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{K} \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Proof. 仅证(i), (ii) 可由同理可得.

[$\Rightarrow$] 设稳定弱对偶成立, 即对任意 $p \in X^*$, $v(P^p) \geq v(D^p)$. 取 $(p, r) \in \mathcal{J}$, 由引理3.2 (ii) 得 $v(D^p) \geq -r$. 由稳定弱对偶定义得 $v(P^p) \geq -r$, 再由引理3.2 (i) 得 $(p, r) \in \mathcal{K}$, 进而有 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$ 成立.

[$\Leftarrow$] 设 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$, 若 $v(P^p) = +\infty$, 结论显然成立. 下设 $v(P^p) < +\infty$, 用反证法证明 $v(P^p) \geq v(D^p)$. 假设 $v(P^p) < v(D^p)$, 则存在实数 $r \in \mathbb{R}$ 使得 $v(P^p) < -r < v(D^p)$.

由 $v(D^p)$ 的定义, 对每个 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 满足式(11), 由引理3.2 (ii) 得 $(p, r) \in \mathcal{J}$, 进而得 $(p, r) \in \mathcal{K}$, 结合引理3.2 (i) 得 $v(P^p) \geq -r$, 与 $v(P^p) < -r$ 矛盾. 故 $v(P^p) \geq v(D^p)$, 定理得证.

□

定理 3.4 以下命题成立:

(i) 问题(P) 和问题(D) 之间的稳定零对偶成立当且仅当 $\mathcal{K} = \text{cl}\mathcal{J}$.

(ii) 问题(P) 和问题(D) 之间的零对偶成立当且仅当 $\mathcal{K} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \text{cl}\mathcal{J} \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Proof. 仅证(i), (ii) 可由同理可得.

[$\Rightarrow$] 假设 $v(\text{P}^p) = v(\text{D}^p)$, 由定理3.3 可得 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$. 由于 $\mathcal{K}$ 是弱*闭的, 则有

$$\text{cl}\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}. \quad (18)$$

为证明(1) 式只需证明

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}. \quad (19)$$

取 $(p, r) \in \mathcal{K}$, 由引理3.2 (i) 可得 $v(\text{P}^p) \geq -r$, 结合假设 $v(\text{P}^p) = v(\text{D}^p)$ 则有 $v(\text{D}^p) \geq -r$. 任取 $\varepsilon > 0$, 则对每个 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得

$$\begin{aligned} & g^*(\mu) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) \\ & + \langle v f_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \rangle^*(x^* + p + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^*) \geq -r - \varepsilon. \end{aligned}$$

由引理3.2 (ii) 可得 $(p, r + \varepsilon) \in \mathcal{J}$. 因此, $(p, r) \in \mathcal{J}$, 从而(19) 式成立, 结合(18) 式可得 $\mathcal{K} = \text{cl}\mathcal{J}$.

[$\Leftarrow$] 反之, 假设 $\mathcal{K} = \text{cl}\mathcal{J}$ 成立, 由定理3.3 有 $v(\text{P}^p) \geq v(\text{D}^p)$. 若 $v(\text{D}^p) < v(\text{P}^p)$, 则存在 $r \in \mathbb{R}$, 使得

$$v(\text{D}^p) < -r < v(\text{P}^p).$$

由引理3.2 (i) 得 $(p, r) \in \mathcal{K}$, 再由 $\mathcal{K} = \text{cl}\mathcal{J}$ 得 $(p, r) \in \text{cl}\mathcal{J}$. 因此存在一个收敛网 $\{(p, r_n)\} \subseteq \mathcal{J}$ 满足 $r_n \rightarrow -r$. 结合引理3.2 (ii), 对每一个 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得

$$\begin{aligned} & g^*(\mu) + (ug_2)^*(x^*) + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t \varphi_t^*(s_t^*) - f_1^*(v) \\ & + \langle v f_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \rangle^*(x^* + p + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t s_t^*) \geq r_n \rightarrow -r. \end{aligned}$$

即 $v(\text{D}^p) \geq -r$, 与 $v(\text{D}^p) < -r$ 矛盾, 因此 $v(\text{P}^p) = v(\text{D}^p)$. □

定理 3.5 以下命题成立:

(i) 问题(P) 和问题(D) 之间的稳定强对偶成立当且仅当 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$.

(ii) 问题(P) 和问题(D) 之间的强对偶成立当且仅当 $\mathcal{J} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathcal{K} \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Proof. 仅证(i), (ii) 可由同理可得.

[$\Rightarrow$] 设 $p \in X^*$, 假设稳定强对偶成立, 即 $v(\text{P}^p) = v(\text{D}^p)$. 由定理3.3 (i) 及稳定强对偶性可得

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}. \quad (20)$$

因此, 只需再证 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$. 设 $(p, r) \in \mathcal{K}$, 由引理3.2 (i) 可知, $v(\mathbf{P}^p) \geq -r$. 由稳定强对偶性可得, $v(\mathbf{D}^p) \geq -r$, 且对任意 $\mu \in H^*$, 都存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 满足 $\Phi^p(\mu, \lambda) \geq -r$. 结合引理3.2 (ii) 可得 $(p, r) \in \mathcal{J}$. 因此 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$, 结合(20) 式, 得 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$.

[$\Leftarrow$] 设 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$, 则有 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$, 由定理3.3 (i) 得稳定弱对偶成立. 若 $v(\mathbf{P}^p) = -\infty$, 则结论显然成立, 只需证明 $v(\mathbf{P}^p) \leq v(\mathbf{D}^p)$. 令 $r = v(\mathbf{P}^p) \in \mathbb{R}$, 由引理3.2 (i) 有 $(p, -r) \in \mathcal{K}$. 由假设 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$, 可知 $(p, -r) \in \mathcal{J}$, 由引理3.2 (ii), 可得 $v(\mathbf{D}^p) \geq \gamma$, 且对任意 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, 满足

$$\Phi^p(\mu, \lambda) \geq r. \quad (21)$$

结合弱对偶性, 可得 $v(\mathbf{P}^p) = v(\mathbf{D}^p) = r$, 且对任意 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, 满足(21) 式. 因此, 稳定强对偶成立, 定理得证.

□

下述定理刻画了相应的稳定Farkas引理.

定理 3.6 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$ 成立当且仅当对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $p \in X^*$, 以下命题等价:

- (i) $(f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) \geq \langle p, x \rangle + a, x \in \mathcal{A}$.
- (ii) 对每个 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得

$$\Phi^p(\mu, \lambda) \geq a. \quad (22)$$

Proof. [$\Rightarrow$] 设 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$, 则由定理3.5 (i) 可得稳定强对偶成立. 若(i) 成立, 则 $v(\mathbf{P}^p) \geq a$, 结合稳定强对偶有 $v(\mathbf{P}^p) = v(\mathbf{D}^p) \geq a$, 故(ii) 成立. 反之, 若(ii) 成立, 则式(22) 表明

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{\mu \in H^*} \Phi^p(\mu, \lambda) \geq a.$$

即 $v(\mathbf{D}^p) \geq a$, 再由稳定强对偶可得 $v(\mathbf{P}^p) \geq a$, 从而(i) 成立.

[$\Leftarrow$] 设(i) 与(ii) 等价, 由引理3.2 即可得 $\mathcal{J} = \mathcal{K}$.

□

同理可得以下的Farkas引理.

推论 3.7 $\mathcal{J} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathcal{K} \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ 成立当且仅当对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 以下命题等价:

- (i) $(f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) \geq a, x \in \mathcal{A}$.
- (ii) 对每个 $\mu \in H^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得

$$\Phi(\mu, \lambda) \geq a. \quad (23)$$

4. 特例

当 $\varphi_t = 0$, 问题 (P^P) 简化为如下复合DC优化问题:

$$(P_1^P) \inf_{x \in \mathcal{A}_1} \{(f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) - \langle p, x \rangle\},$$

其中 $\mathcal{A}_1 := \{x \in C : h_t(x) \leq 0, t \in T\}$, 对应的Lagrange对偶问题为

$$(D_1^P) \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{\mu \in H_1^*} \Phi_1^p(\mu, \lambda),$$

其中 $\mu = (u, x^*, v)$, $H_1^* := \text{dom } g_1^* \times \text{dom } g_2^* \times \text{dom } f_1^*$,

$$\Phi_1^p(\mu, \lambda) = g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*) - f_1^*(v) - (vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t)^*(x^* + p).$$

当 $p = 0$ 时, 问题 (P_1^P) 退化为如下问题 (P_1)

$$(P_1) \inf_{x \in \mathcal{A}_1} \{(f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x)\},$$

对应的对偶问题为

$$(D_1) \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \inf_{\mu \in H_1^*} \Phi_1(\mu, \lambda),$$

下面给出两个特征集:

$$\mathcal{K}_1 := \text{epi}(f_1 \circ f_2 - g_1 \circ g_2 + \delta_{\mathcal{A}_1})^*,$$

$$\mathcal{J}_1 := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \left(\bigcap_{\mu \in H_1^*} \text{epi} \left(vf_2 + \delta_C + \sum_{t \in \text{supp } \lambda} \lambda_t h_t \right)^* + (0f_1^*(v)) - (x^*, g_1^*(u) + (ug_2)^*(x^*)) \right).$$

可推得以下相应定理.

定理 4.1 以下命题成立.

- (i) 问题 (P_1) 和问题 (D_1) 之间的稳定弱对偶成立当且仅当 $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{K}_1$.
- (ii) 问题 (P_1) 和问题 (D_1) 之间的弱对偶成立当且仅当 $\mathcal{J}_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{K}_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.

定理 4.2 以下命题成立.

- (i) 问题 (P_1) 和问题 (D_1) 之间的稳定强对偶成立当且仅当 $\mathcal{J}_1 = \mathcal{K}_1$.
- (ii) 问题 (P_1) 和问题 (D_1) 之间的强对偶成立当且仅当 $\mathcal{J}_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathcal{K}_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.

定理 4.3 $\mathcal{J}_1 = \mathcal{K}_1$ 成立当且仅当对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $p \in X^*$, 以下命题等价

- (i) $x \in \mathcal{A}_1 \implies (f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) \geq \langle p, x \rangle + a$.
- (ii) 对每个 $\mu \in H_1^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得 $\Phi_1^p(\mu, \lambda) \geq a$.

定理 4.4 $\mathcal{J}_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathcal{K}_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ 成立当且仅当对任意 $a \in \mathbb{R}$, 以下命题等价:

- (i) $x \in \mathcal{A}_1 \implies (f_1 \circ f_2)(x) - (g_1 \circ g_2)(x) \geq a$.
- (ii) 对每个 $\mu \in H_1^*$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ 使得 $\Phi_1(\mu, \lambda) \geq a$.

注 4.5 本节中的问题(P₁) 恰为文 [16]中的问题(P_p), 针对与文献 [16]相同的DC复合优化问题, 本节重构了对偶问题并细化了特征集定义, 文献 [16]中相关结论均为本文结果的特例, 进一步推广并完善了该类问题的对偶理论与Farkas 引理.

5. 结论与展望

本文研究了DC 复合优化问题的Lagrange 对偶与Farkas 引理, 通过构造集合 J 与 K 得到该问题弱对偶、零对偶、强对偶成立的等价条件, 并建立对应的Farkas 引理. 所得结果既适用于有限维空间, 也适用于无限维空间, 本文提出的条件虽具备理论等价性, 但在一般情形下难以直接验证, 仅在部分特殊结构下可显式判断, 且未进一步推导KKT 最优性条件与设计数值算法. 后续研究可基于本文框架推导DC 复合的最优性条件, 研究对应的数值算法及其收敛性, 也可将该刻画思路推广到集值DC 优化等更广泛的模型, 同时探寻便于实际检验的充分条件.

参考文献

- [1] Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A. and Son, T.Q. (2007) New Farkas-Type Constraint Qualifications in Convex Infinite Programming. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **13**, 580-597. <https://doi.org/10.1051/cocv:2007027>
- [2] Boţ, R.I., Grad, S. and Wanka, G. (2008) On Strong and Total Lagrange Duality for Convex Optimization Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 1315-1325. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.071>
- [3] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2009) Constraint Qualifications for Extended Farkas's Lemmas and Lagrangian Dualities in Convex Infinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1311-1332. <https://doi.org/10.1137/080739124>
- [4] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2010) Constraint Qualifications for Optimality Conditions and Total Lagrange Dualities in Convex Infinite Programming. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **73**, 1143-1159. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.020>
- [5] Boţ, R.I., Hodrea, I.B. and Wanka, G. (2007) Some New Farkas-Type Results for Inequality Systems with DC Functions. *Journal of Global Optimization*, **39**, 595-608. <https://doi.org/10.1007/s10898-007-9159-8>
- [6] Dinh, N., Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2009) Qualification and Optimality Conditions for DC Programs with Infinite Constraints. *Acta Mathematica Vietnamica*, **34**, 125-155.

-
- [7] Fang, D. (2015) Some Relationships among the Constraint Qualifications for Lagrangian Dualities in DC Infinite Optimization Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2015**, Article No. 41. <https://doi.org/10.1186/s13660-015-0561-3>
 - [8] Fang, D.H., Lee, G.M., Li, C. and Yao, J.C. (2013) Extended Farkas's Lemma and Strong Lagrange Dualities for DC Infinite Programming. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **14**, 747-767.
 - [9] Goberna, M.A., Jeyakumar, V. and López, M.A. (2008) Necessary and Sufficient Constraint Qualifications for Solvability of Systems of Infinite Convex Inequalities. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **68**, 1184-1194. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.12.014>
 - [10] Boț, R.I., Grad, S. and Wanka, G. (2008) A New Constraint Qualification for the Formula of the Subdifferential of Composed Convex Functions in Infinite Dimensional Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **281**, 1088-1107. <https://doi.org/10.1002/mana.200510662>
 - [11] Ioan Boț, R., Grad, S. and Wanka, G. (2009) Generalized Moreau-Rockafellar Results for Composed Convex Functions. *Optimization*, **58**, 917-933. <https://doi.org/10.1080/02331930902945082>
 - [12] Li, C., Fang, D., López, G. and López, M.A. (2009) Stable and Total Fenchel Duality for Convex Optimization Problems in Locally Convex Spaces. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1032-1051. <https://doi.org/10.1137/080734352>
 - [13] Fang, D.H., Wang, M.D. and Zhao, X.P. (2015) The Strong Duality for DC Optimization Problems with Composite Convex Functions. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, **16**, 1337-1352.
 - [14] Sun, X. and Fu, H. (2014) A Note on Optimality Conditions for DC Programs Involving Composite Functions. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 203467. <https://doi.org/10.1155/2014/203467>
 - [15] Sun, X.K., Guo, X.L. and Zhang, Y. (2015) Fenchel-Lagrange Duality for DC Programs with Composite Functions. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, **16**, 1607-1618.
 - [16] Fang, D. and Gong, X. (2016) Extended Farkas Lemma and Strong Duality for Composite Optimization Problems with DC Functions. *Optimization*, **66**, 179-196. <https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1266628>
 - [17] Zalinescu, C. (2002) *Convex Analysis in General Vector Space*. World Scientific Publishing.