

完全图中匹配和3-、4-路并图的反拉姆齐数

潘林舒, 徐泓坚*

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年8月21日; 录用日期: 2026年9月14日; 发布日期: 2026年9月22日

摘要

设 G 是一个简单图. 边染色图 G 称为彩虹图, 若图 G 的任意两条边的颜色均不同. 给定图 G 及其子图 H , H 在 G 中的反拉姆齐数, 记作 $AR(G, H)$, 定义为最大整数 k , 使得存在图 G 的 k -边染色, 该染色下 G 不含同构于 H 的彩虹子图. 本文给出完全图中, P_3, P_4 与 P_2 的并图的反拉姆齐数精确值.

关键词

反拉姆齐数, 线性森林, 彩虹图

The Anti-Ramsey Number for the Union of a Matching, P_3 and P_4 in a Complete Graph

Linshu Pan, Hongjian Xu*

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: August 21, 2026; accepted: September 14, 2026; published: September 22, 2026

Abstract

Let G be a simple graph. An edge-colored graph G is said to be rainbow if any two distinct edges of G receive different colors. For a graph G and its subgraph H , the

* 通讯作者。

anti-Ramsey number of H in G , denoted by $AR(G, H)$, is defined as the maximum integer k such that there exists a k -edge-coloring of G containing no rainbow subgraph isomorphic to H . In this paper, we determine the exact anti-Ramsey number for the union of P_3, P_4 and P_2 in complete graphs.

Keywords

Anti-Ramsey Number, Linear Forests, Rainbow Graph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设图 G 是一个边染色图, 记 $c(G)$ 为 G 中所有边的颜色构成的集合, 对任意边 $e \in E(G)$, 记 $c(e)$ 表示边 e 的颜色. 对边子集 $E' \subset E(G)$, 记 $c(E')$ 为 E' 中所有边的颜色构成的集合. 设 X 和 Y 为 $V(G)$ 的两个不相交的顶点子集, 则记 $[X, Y]_G$ 为 G 中所有连接 X 与 Y 中顶点的边构成的集合. 若 $G = K_n$, 则简记为 $[X, Y]$. 若 $X = \{v\}$, 则简记为 $[v, Y]_G$. 给定边染色图 K_n , 令 $X \subset V(K_n)$, 记 $l(X) = c(K_n) \setminus c(K_n - X)$. 当 $X = \{v\}$ 时, 简记为 $l(v)$. 称 $|l(v)|$ 为顶点 v 在 K_n 中的饱和度. 顶点 w 饱和顶点 v 当且仅当 $c(wv) \in l(v)$. 此时, 称 w 为 v 的饱和点.

Erdős 等人在 [1] 中首次引入了反拉姆齐数. 该问题建立起了极值图论与拉姆齐理论的桥梁. 迄今关于反拉姆齐数的研究围绕各类图族展开, 其中包括树, 圈, 匹配等等. 完全图中匹配的反拉姆齐数已得到彻底解决. 近年来研究者研究由匹配与若干小分支的图的并图构成的线性森林. Gilboa 与 Roditty 在 [2] 中, 针对充分大的 n , 研究完全图 K_n 中子图为 $L \cup tP_2$ 与 $L \cup kP_3$ 的反拉姆齐数, 给出了 P_3, P_4, C_3 等若干特殊的图 L 的具体结果. Bialostocki 等 [3] 确定了所有边数不超过 4 的图的反拉姆齐数. Jin 与 Gu [4] 给出了 $AR(K_n, K_4 \cup tP_2)$ 与 $AR(K_n, C_3 \cup tP_2)$ 的表达式. Fang 等 [5] 研究了由若干小分支的并图构成的森林图的反拉姆齐数, 其中包括星森林、线性森林. 此外, 给出了至少包含一个偶路分支的线性森林的反拉姆齐数的近似值. Xie 等 [6] 确定了当 n 充分大时, 至少含有一个偶路分支的线性森林的反拉姆齐数精确值. 随后, 文献 [7–11] 研究了对任意的 n , 完全图 K_n 中匹配和一类短路组成的线性森林的, 得到以下定理.

定理 1.1. [7] 令 $n_1(t) = \frac{5t+11}{2} + \frac{3}{t}$. 对任意整数 $t \geq 2$ 且 $n \geq 2t + 7$, 有

$$AR(K_n, 2P_3 \cup tP_2) = \begin{cases} (t+1)(2t+3) + 1, & \text{若 } 2t+7 \leq n \leq \lfloor n_1(t) \rfloor, \\ t(n - \frac{t+1}{2}) + 1, & \text{若 } n \geq \lceil n_1(t) \rceil. \end{cases}$$

定理1.2. [12] 对任意的整数 $t \geq 2$ 且 $n = 2t + 7$, 有

$$AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2) = (t + 2)(2t + 5) + 1.$$

本文将研究 $P_3 \cup P_4$ 与匹配的并图的反拉姆齐数, 给出当 $t \geq 2$ 且 $n \geq 2t + 7$ 时, $AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2)$ 的精确值.

2. 主要结论

定理2.1. 对任意的 $t \geq 2$, $n \geq 2t + 7$ 且 $n_4(t) = \frac{5t}{2} + \frac{3}{t+1} + 8$. 有

$$AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2) = \begin{cases} (t + 2)(2t + 5) + 1, & \text{若 } 2t + 7 \leq n \leq \lfloor n_4(t) \rfloor, \\ (t + 1)(n - \frac{t}{2} - 1) + 1, & \text{若 } n \geq \lceil n_4(t) \rceil. \end{cases}$$

值得注意的是, $(t + 2)(2t + 5) + 1 = (t + 1)(n - \frac{t}{2} - 1) + 1$ 当且仅当 $n = n_4(t)$. 此外, $(t + 2)(2t + 5) + 1 \geq (t + 1)(n - \frac{t}{2} - 1) + 1$ 当且仅当 $n \leq n_4(t)$. 我们将在下节中证明该定理.

2.1. $AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2)$ 的下界

Proof. 首先证明下界, 构造 K_n 的两种边染色.

首先, 取完全图 K_n 的子图 $G = K_{2t+5}$. 将 G 的所有边均染不同的颜色, $K_n - E(G)$ 的边染一种新的颜色. 这样得到 K_n 的 $((t + 2)(2t + 5) + 1)$ -边染色, 且在该染色方式下 K_n 中不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图.

现构造 K_n 的第二种边染色, 将 K_n 的子图 $G = K_{n-(t+1)}$ 的所有边染相同的颜色. $K_n - E(G)$ 的所有边用与 G 中边不同的颜色染成彩虹的. 这样得到 K_n 的 $(t(n - t - 1) + \binom{t+1}{2} + 1)$ -边染色, 且在该染色方式下 K_n 中不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图. $\square$

2.2. $AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2)$ 的上界

Proof. 对 n 作归纳法. 根据引理1.2, 当 $n = 2t + 7$ 时结论成立. 现令 $n \geq 2t + 8$, 并假设上述定理对完全图 K_{n-1} 成立.

令 c 为 K_n 的任意 $(f(n, t) + 1)$ -边染色. 假设 K_n 不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图. 根据定理1.1, K_n 中包含同构于 $2P_3 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 记为 H . 令 $H = H_1 \cup H_2$, 其中 $H_1 = tP_2$ 且 $E(H_1) = \{e_i \mid e_i = x_i y_i, 1 \leq i \leq t\}$. 令 $H_2 = 2P_3$, 其中 $P_3^1 = v_1 v_2 v_3$, $P_3^2 = v_4 v_5 v_6$. 取 K_n 的一个边数为 $|c(K_n)|$ 的彩虹生成子图 G , 且满足 $H \subseteq G$. 令 $D = K_n - V(H)$. 下面对 n 的值分情形讨论.

2.2.1. $2t + 8 \leq n \leq \lfloor n_4(t) \rfloor$

由 $n_1(t) = \frac{5t+11}{2} + \frac{3}{t}$ 可知, $\lfloor n_4(t) \rfloor \leq \lfloor n_1(t) \rfloor + 3$ 且

$$\lfloor n_4(t) \rfloor = \begin{cases} 14, & \text{若 } t = 2, \\ \frac{5t}{2} + 8, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ \frac{5t+1}{2} + 8, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ \frac{5t-1}{2} + 8, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases}$$

由此可得

$$|V(D)| = n - (2t + 6) \leq \begin{cases} 4, & \text{若 } t = 2, \\ \frac{t}{2} + 2, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ \frac{t+1}{2} + 2, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ \frac{t-1}{2} + 2, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases}$$

由 $|V(D)| = n - (2t + 6)$ 和 $2t + 8 \leq n \leq \lfloor n_4(t) \rfloor$ 可得 $|V(D)| \geq 2$. 现对 $E(D) \cap E(G)$ 的下述情形展开讨论.

情形1 $E(D) \cap E(G) \neq \emptyset$.

假设 $G[V(D)]$ 中有同构于除 P_2 , C_3 及 $K_{1,k}$ 之外的彩虹子图, 那么该子图中包含同构于 P_4 的彩虹子图 F . 则 $P_3^1 \cup F \cup H_1$ 形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $G[V(D)]$ 中的连通分支只可能同构于 P_2 , C_3 或 $K_{1,k}$. 进而有 $|E(G[V(D)])| \leq |V(D)|$. 此外, 显然 $|E(G[V(H_2)])| \leq \binom{6}{2} = 15$. 由 K_n 不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图可知, $[V(H_1), V(H_2)]_G = \emptyset$ 且 $|E(G[V(H_1)])| = t$. 取 $x, y \in V(D)$ 使得 $xy \in E(G)$. 有下述断言成立.

断言1. 对任意 $v \in V(D)$, 有 $|[v, V(H)]_G| \leq 2$.

断言1 证明: 对任意的 $v \in V(D)$, 有 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, v]_G = \emptyset$. 假设 $[\{x, y\}, V(H_1)]_G \neq \emptyset$. 不失一般性, 令 $y_i x \in E(G)$, 其中 $1 \leq i \leq t$. 那么 $x_i y_i x y, P_3^1$ 与 $H_1 - e_i + v_4 v_5$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可知 $[\{x, y\}, V(H_1)]_G = \emptyset$. 假设 $[\{x, y\}, V(H_2)]_G \neq \emptyset$. 根据 H_2 的对称性, 不妨令 $v_2 x \in E(G)$. 那么 $v_1 v_2 x y, P_3^2$ 和 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可知 $[\{x, y\}, V(H_2)]_G = \emptyset$. 因此 $[\{x, y\}, V(H)]_G = \emptyset$.

假设存在顶点 $u \in V(D) \setminus \{x, y\}$, 使得 $|[u, V(H)]_G| \geq 3$. 那么 u 至少和 H 中的两个连通分支相邻且其中至少一个为 H_1 中的分支. 假设 u 与 P_3^1 和 e_i 相邻, 其中 $1 \leq i \leq t$. 那么 $G[V(P_3^1) \cup V(e_i) \cup \{u\}]$ 中存在同构于 P_4 的彩虹子图, 该子图与 $P_3^2, H_1 - e_i + xy$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 u 只与 H_1 的分支相邻, 不妨令 $y_i u, y_j u \in E(G)$, 其中 $1 \leq i < j \leq t$. 那么 $x_i y_i u y_j, P_3^1$ 与 $H_1 - e_i - e_j + v_4 v_5 + xy$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可知, 对任意的 $v \in V(D)$, 有 $|[v, V(H)]_G| \leq 2$. $\square$

因此 $|[V(D), V(H)]_G| \leq 2|V(D)|$. 有

$$\begin{aligned}
 |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\
 &\quad + |[V(D), V(H)]_G| + |E(G[V(D)])| \\
 &\leq t + 15 + 2|V(D)| + |V(D)| \\
 &= \begin{cases} 29, & \text{若 } t = 2, \\ \frac{5t}{2} + 21, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ \frac{5t}{2} + \frac{45}{2}, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ \frac{5t}{2} + \frac{39}{2}, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases} \\
 &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)|
 \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾.

情形2 $E(D) \cap E(G) = \emptyset$.

取 $x, y \in V(D)$. 显然 $c(xy) \in c(H)$.

子情形2.1 $c(xy) \in c(H_2)$.

根据 H_2 的对称性, 不妨假设 $c(xy) = c(v_1v_2)$. 显然 $[V(D), \{v_1, v_3, v_4, v_6\}]_G = \emptyset$.

假设 $[v_1, V(e_i)]_G \neq \emptyset$, 记 $v_1x_i \in E(G)$, 其中 $1 \leq i \leq t$. 那么 $v_1x_iy_i, P_3^2$ 与 $H_1 - e_i + v_2v_3$ 的并图形成同构于 $2P_3 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 记为 F . 根据假设可知 $c(xy) \notin c(F)$, 否则回到 Case 1 的情形, 矛盾. 由此可知, 对任意 $1 \leq i \leq t$, 有 $[v_1, V(e_i)]_G = \emptyset$.

假设存在 $1 \leq i \leq t$, 使得 $[v_2, v_3], V(e_i)]_G \neq \emptyset$. 那么 $G[V(P_3^1) \cup V(e_i)]$ 中包含同构于 P_4 的彩虹子图, 该子图与 $P_3^2, H_1 - V(e_i) + xy$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可知, 对任意的 $1 \leq i \leq t$, 有 $[v_2, v_3], V(e_i)]_G = \emptyset$.

综上所述, 对任意的 $1 \leq i \leq t$, 有 $[V(P_3^1), V(e_i)]_G = \emptyset$. 因此对任意的 $1 \leq i \leq t$, 有 $[V(e_i), V(H_2)]_G \leq 6$, 从而 $[V(H_1), V(H_2)]_G \leq 6t$.

此外, 对任意的 $1 \leq i < j \leq t$, 有 $[V(e_i), V(e_j)]_G = \emptyset$. 否则 $G[V(\{e_i, e_j\})]$ 中包含同构于 P_4 的彩虹子图, 该子图与 $P_3^1, H_1 - V(\{e_i, e_j\}) + v_4v_5 + xy$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|E(G[V(H_1)])| = t$.

假设 $[V(H_1), V(D) \setminus \{x, y\}]_G \neq \emptyset$. 取 $w \in V(D) \setminus \{x, y\}$ 使得 $wy_i \in E(G)$, 其中 $1 \leq i \leq t$. 那么 x_iy_iw, P_3^2 与 $H_1 - e_i + v_2v_3$ 的并图形成同构于 $2P_3 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 记为 F . 显然 $c(xy) \notin c(F)$. 因此又回到 Case 1 的情形, 矛盾. 由此可得 $[V(H_1), V(D) \setminus \{x, y\}]_G = \emptyset$. 此外, 对任意的 $1 \leq i \leq t$, 有 $[V(e_i), \{x, y\}]_G \leq 2$, 否则 $G[V(e_i) \cup \{x, y\}]$ 中包含同构于 P_4 的彩虹子图, 且该子图与 $P_3^2, H_1 - e_i + v_2v_3$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可知 $[V(H_1), V(D)]_G = [V(H_1), \{x, y\}]_G \leq 2t$.

假设对任意 $u \in V(D)$, 有 $[u, \{v_2, v_5\}]_G = \emptyset$. 由于 $[V(D), \{v_1, v_3, v_4, v_6\}]_G = \emptyset$, 根据假设可

得 $[V(H_2), V(D)]_G = \emptyset$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| + |[V(H_2), V(D)]_G| \leq 15$, 进而

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\ &\quad + |[V(H), V(D)]_G| + |E(G[V(D)])| \\ &\leq t + 15 + 6t + 2t \\ &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)| \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾.

因此至少存在一个顶点 $u \in V(D)$, 使得 $[u, \{v_2, v_5\}]_G \neq \emptyset$. 根据 H_2 的对称性, 不妨令 $uv_2 \in E(G)$. 显然 $v_1v_3 \notin E(G)$ 且 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 假设 $v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5 \in E(G)$. 那么 $v_4v_5v_6v_1, uv_2v_3$ 与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 2$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$, 进而 $|E(G[V(H_2)])| + |[V(H_2), V(D)]_G| \leq 9 + 2|V(D)|$. 可得

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\ &\quad + |[V(H), V(D)]_G| + |E(G[V(D)])| \\ &\leq t + 9 + 6t + 2t + 2|V(D)| \\ &= \begin{cases} 35, & \text{若 } t = 2, \\ 10t + 13, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ 10t + 14, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ 10t + 12, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases} \\ &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)| \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾.

子情形2.2 $c(xy) \in c(H_1)$.

不失一般性, 令 $c(xy) = c(e_1)$. 假设 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, V(e_1)]_G \neq \emptyset$. 根据 H_2 和 e_1 的对称性, 令 $x_1v_1 \in E(G)$. 那么 $x_1v_1v_2v_3, P_3^2$ 与 $H_1 - e_1 + xy$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可知 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, V(e_1)]_G = \emptyset$.

显然 $[V(D), \{v_1, v_3, v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 因此 $[V(D), V(H_2)]_G \leq 2|V(D)|$.

断言2. $[V(D), V(H_1)]_G \neq \emptyset$.

断言2 证明: 假设 $[V(D), V(H_1)]_G = \emptyset$. 若 $[V(D), V(H_2)]_G = \emptyset$, 则 $[V(D), V(H)]_G = \emptyset$. 已知 $|E(G[V(H_1)])| \leq 2t^2 - 3t + 2$, $[V(H_1), V(H_2)]_G \leq 12t - 8$ 且 $[V(D), V(H_2)]_G \leq 2|V(D)|$. 显然 $|E(G[V(H_2)])| \leq \binom{6}{2} = 15$, 则

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\ &\quad + |[V(D), V(H)]_G| + |E(G[V(D)])| \\ &\leq 2t^2 - 3t + 2 + 15 + 12t - 8 \\ &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)| \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 由此可知 $[V(H_2), V(D)]_G \neq \emptyset$.

因此至少存在一个顶点 $u \in V(D)$, 使得 $[\{v_2, v_5\}, u]_G \neq \emptyset$. 根据 H_2 的对称性, 令 $uv_2 \in E(G)$. 显然 $v_1v_3 \notin E(G)$ 且 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 假设 $v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5 \in E(G)$. 那么 $G[V(H_2) \cup \{u\}]$ 中包含同构于 $P_3 \cup P_4$ 的彩虹子图, 且该子图与 H_1 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 2$, 进而 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$.

观察1. 对任意 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \leq 8$.

观察1 证明: 假设存在 $2 \leq i \leq t$, 使得 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \geq 9$. 不失一般性, 令 $|[V(e_2), V(H_2)]_G| \geq 9$. 由假设可知, $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, x_2]_G| \geq 3$ 或 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_2]_G| \geq 3$. 根据 e_2 的对称性, 假设 $v_1x_2, v_3x_2, v_4x_2 \in E(G)$. 此外, 有 $|[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, y_2]_G| \geq 1$, 记 $v_4y_2 \in E(G)$. 此时, $y_2v_4v_5v_6, uv_2v_3$ 与 $H_1 - V(e_2) + v_1v_4$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此对任意 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \leq 8$. $\square$

根据 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, V(e_1)]_G = \emptyset$ 和观察1, 有 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 8t - 4$. 假设存在 $2 \leq i \leq t$, 使得 $|[V(e_1), V(e_i)]_G| \geq 3$. 不失一般性, 令 $|[V(e_1), V(e_2)]_G| \geq 3$. 那么 $G[V(\{e_1, e_2\})] - e_1$ 中包含同构于 P_4 的彩虹子图, 该子图与 $P_3^1, H_1 - e_1 - e_2 + v_4v_5 + xy$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得对任意 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_1), V(e_i)]_G| \leq 2$. 因此 $|E(G[V(H_1)])| \leq 2t^2 - 3t + 2$. 此外, $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$ 且 $|[V(D), V(H_2)]_G| \leq 2|V(D)|$, 进而

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\ &\quad + |[V(D), V(H)]_G| + |E(G[V(D)])| \\ &\leq 2t^2 - 3t + 2 + 9 + 8t - 4 + 2|V(D)| \\ &= \begin{cases} 33, & \text{若 } t = 2, \\ 2t^2 + 6t + 11, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ 2t^2 + 6t + 12, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ 2t^2 + 6t + 10, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases} \\ &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)| \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾. 因此断言2成立. $\square$

由 $[V(H_1), V(D)]_G \neq \emptyset$, 可知 $V(D)$ 中至少存在一个顶点 u , 使得 $[u, V(H_1)]_G \neq \emptyset$. 不妨令 $uy_j \in E(G)$, 其中 $1 \leq j \leq t$. 此时, H_1 中包含彩虹子图 $P_3 = x_jy_ju$. 若 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G \neq \emptyset$, 则 H_2 中包含同构于 $P_4 \cup P_2$ 的彩虹子图, 该子图与 $x_jy_ju, H_1 - V(e_j)$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $[\{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}]_G = \emptyset$. 假设 $v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6 \in E(G)$. 那么 $v_1v_3v_2v_4, x_jy_ju$ 与 $H_1 - V(e_j) + v_5v_6$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $|\{v_1v_3, v_2v_4, v_2v_6\} \cap E(G)| \leq 2$. 根据 H_2 的对称性, 同理可得 $|\{v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5\} \cap E(G)| \leq 2$. 因此 $|E(G[V(H_2)])| \leq 9$.

与观察1的推导类似可得, 对任意的 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(e_i), V(H_2)]_G| \leq 8$. 由上述分析可知 $[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}, V(e_1)]_G = \emptyset$, 因此 $|[V(H_1), V(H_2)]_G| \leq 8t - 4$.

假设存在顶点 $u \in V(D)$, 使得存在 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[u, V(e_i)]_G| = 2$. 若存在 $u' \in V(D) \setminus \{u\}$ 使得 $[u', V(e_i)]_G \neq \emptyset$, 则 $G[V(e_i) \cup \{u, u'\}]$ 中含有同构于 P_4 的彩虹子图. 该子图与 $P_3^1, H_1 - e_i + v_4v_5$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 由此可得 $[V(D) \setminus \{u\}, V(e_i)]_G = \emptyset$. 进而有 $|[V(D), V(e_i)]_G| \leq 2$. 若对任意的 $v \in V(D)$, 有 $|[v, V(e_i)]_G| \leq 1$, 则有 $|[V(D), V(e_i)]_G| \leq |V(D)|$. 因此对 $2 \leq i \leq t$, 有 $|[V(D), V(e_i)]_G| \leq \max\{2, |V(D)|\} = |V(D)|$.

断言3. $|[V(e_1), V(H_1 - e_1)]_G| + |[V(D), V(e_1)]_G| \leq 2t - 2$.

断言3 证明: 首先考虑 $[V(D), V(H)]_G$ 中的边. 有 $|[V(e_1), \{x, y\}]_G| \leq 2$, 否则 $G[V(e_1) \cup \{x, y\}]$ 中包含同构于 P_4 的彩虹子图, 该子图与 $P_3^1, H_1 - V(e_1) + v_4v_5$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 假设存在顶点 $u \in V(D) \setminus \{x, y\}$, 使得 $[u, V(e_1)]_G \neq \emptyset$, 记 $y_1u \in E(G)$. 那么 $F = H - V(e_1) + y_1u$ 形成同构于 $2P_3 \cup tP_2$ 的彩虹子图且满足 $c(xy) \notin c(F)$, 从而回到 Subcase 2.1 的情形, 矛盾. 由此可知 $[V(D) \setminus \{x, y\}, V(e_1)]_G = \emptyset$.

取两个不同的顶点 $x', y' \in V(D) \setminus \{x, y\}$. 显然 $c(x'y') \in c(H_1)$. 假设 $c(x'y') = c(e_1)$, 那么 $[V(e_1), V(D) \setminus \{x, y\}]_G = \emptyset$, 否则将回到 Subcase 2.1 的情形, 矛盾. 因此存在 $2 \leq i \leq t$, 使得 $c(x'y') = c(e_i)$. 由此可得 $[V(e_1), V(e_i)]_G = \emptyset$, 否则将回到 Subcase 2.1 的情形, 矛盾. 因此 $|[V(e_1), V(H_1 - e_1)]_G| + |[V(D), V(H)]_G| \leq 2(t-1) + 2 - 2 = 2t - 2$. $\square$

考虑 $G[V(H_1)] \cup [V(D), V(H)]_G$ 中的边. 假设存在 $2 \leq i < j \leq t$, 使得 $|[V(e_i), V(e_j)]_G| = 4$. 假设 $[V(D), V(e_i)]_G \neq \emptyset$ 且 $[V(D), V(e_j)]_G \neq \emptyset$, 不妨记 $y_iw, y_jw' \in E(G)$, 其中 $w, w' \in V(D)$. 那么 $wy_ix_ix_j, P_3^1$ 与 $H_1 - e_i - e_j + v_4v_5 + y_jw'$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $[V(D), V(e_i)]_G = \emptyset$ 或 $[V(D), V(e_j)]_G = \emptyset$. 进而有 $|[V(D), V(\{e_i, e_j\})]_G| \leq |V(D)|$.

令 $h = |\{\{e_i, e_j\} : |[V(e_i), V(e_j)]_G| = 4, 2 \leq i < j \leq t\}|$. 显然 $0 \leq h \leq \binom{t-1}{2}$. 综合上述分析, 有 $|E(G[V(H_1)])| + |[V(D), V(H)]_G| \leq 2t - 2 + 3\binom{t-1}{2} + t + h + (t+1)|V(D)| - \min\{h, t-1\}|V(D)|$.

假设 $0 \leq h \leq t-1$. 有 $|E(G[V(H_1)])| + |[V(D), V(H)]_G| \leq \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + (t+1)|V(D)| + h - h|V(D)|$. 令 $f(h, t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + (t+1)|V(D)| + h - h|V(D)|$. 整数 $h \geq 0$, 当 h 增大时, $f(h, t)$ 严格递减. 因此 $f(h, t)$ 在 $h = 0$ 时取得最大值 $\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + (t+1)|V(D)|$. 由此可知

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\ &\quad + |[V(D), V(H)]_G| + |E(G[V(D)])| \\ &\leq 9 + 8t - 4 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + (t+1)|V(D)| \\ &= \frac{3}{2}t^2 + \frac{13}{2}t + 6 + (t+1)|V(D)| \\ &= \begin{cases} 37, & \text{若 } t = 2, \\ 2t^2 + 9t + 8, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ 2t^2 + \frac{19}{2}t + \frac{17}{2}, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ 2t^2 + \frac{17}{2}t + \frac{15}{2}, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases} \\ &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)| \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾.

因此有 $t \leq h \leq \binom{t-1}{2}$. 此时, 有 $|E(G[V(H_1)])| + |[V(D), V(H)]_G| \leq \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + (t+1)|V(D)| + h - (t-1)|V(D)| = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + 2|V(D)| + h$. 令 $g(h, t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 + 2|V(D)| + h$. 对函数 $g(h, t)$ 随 h 增大而增大. 因此 $g(h, t)$ 在 $h = \binom{t-1}{2} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1$ 时取到最大值 $2t^2 - 3t + 2 + 2|V(D)|$. 因此

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G[V(H_1)])| + |E(G[V(H_2)])| + |[V(H_1), V(H_2)]_G| \\ &\quad + |[V(D), V(H)]_G| + |E(G[V(D)])| \\ &\leq 9 + 8t - 4 + 2t^2 - 3t + 2 + 2|V(D)| \\ &= 2t^2 + 5t + 7 + 2|V(D)| \\ &= \begin{cases} 33, & \text{若 } t = 2, \\ 2t^2 + 6t + 11, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ 2t^2 + 6t + 12, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ 2t^2 + 6t + 10, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases} \\ &< 2t^2 + 9t + 12 = |c(K_n)| \end{aligned}$$

对任意 $t \geq 2$ 均成立, 矛盾.

2.2.2. $n = \lfloor n_4(t) \rfloor + 1$.

由于 $n = \lfloor n_4(t) \rfloor + 1 \geq 2t + 11$, 可得 $|c(K_n)| = (t+1)(n - \frac{t}{2} - 1) + 2$. 根据定理 1.1, 有 $|c(K_n)| > AR(K_n, 2P_3 \cup (t+1)P_2)$. 因此 K_n 中存在同构于 $2P_3 \cup (t+1)P_2$ 的彩虹子图, 记为 H' . 令 $H' = H'_1 \cup H'_2$, 其中 $H'_1 = (t+1)P_2$ 且 $E(H'_1) = \{e'_i \mid e'_i = x'_i y'_i, 1 \leq i \leq t+1\}$. 令 $H'_2 = 2P_3$, 其中 $P_3^3 = a_1 a_2 a_3$ 且 $P_3^4 = a_4 a_5 a_6$. 取 K_n 的一个边数为 $|c(K_n)|$ 的彩虹生成子图 G' 且满足 $H' \subseteq G'$. 令 $D' = K_n - V(H')$, 有 $|V(D')| \geq 3$.

假设 K_n 中不存在同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图. 根据归纳假设可知, K_{n-1} 中不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图. 因此 $|c(K_{n-1})| \leq (t+2)(2t+5) + 1$. 对任意的 $v \in V(K_n)$, 有

$$\begin{aligned} |l(v)| &\geq (t+1)(n - \frac{t}{2} - 1) + 2 - (t+2)(2t+5) - 1 \\ &= (t+1)n - \frac{5}{2}t^2 - \frac{21}{2}t - 10 \\ &= \begin{cases} 4, & \text{若 } t = 2, \\ t - 1, & \text{若 } t \text{ 是偶数且 } t \geq 4, \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } 3 \leq t \leq 5, \\ \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}, & \text{若 } t \text{ 是奇数且 } t \geq 7. \end{cases} \end{aligned}$$

由 $t \geq 2$ 可得, 对任意 $v \in V(K_n)$, 有 $|l(v)| \geq 2$. 显然 $[x'_1, V(H'_2)]_{G'} = \emptyset$ 且 $[x'_1, V(H'_1 - y'_1)]_{G'} = \emptyset$. 因此 $V(D')$ 中存在一个顶点 w , 使得 x'_1 饱和 w . 由 $[w, V(H' - V(e'_1))]_{G'} = \emptyset$ 且 $[w, V(D')]_{G'} = \emptyset$ 可得, $|l(w)| = 2$ 且 x'_1 和 y'_1 为 w 的饱和点. 显然, $D' - w$ 中不存在顶点饱和 x'_1 , 否则 $G[V(D') \cup \{x'_1, y'_1, w\}]$ 包含同构于 P_4 的彩虹子图, 且该子图与 $P_3^3, H'_1 - e'_1$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $|l(x'_1)| = 2$ 且 y'_1 和 w 为 x'_1 的饱和点.

取 $w' \in V(D') \setminus \{w\}$. 显然 $c(ww') \in c(H')$. 由 y'_1 饱和 x'_1 可知, $c(ww') \neq c(e'_1)$. 假设存在 $2 \leq i \leq t+1$, 使得 $c(ww') = c(e'_i)$. 此时, $x'_1 y'_1 ww', P_3^3$ 与 $H'_1 - e'_1 - e'_i + a_4 a_5$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾. 因此 $c(ww') \in c(H'_2)$. 根据 H'_2 的对称性, 不妨令 $c(ww') = c(a_1 a_2)$. 此时, $x'_1 y'_1 ww', P_3^4$ 与 $H'_1 - e'_1$ 的并图形成同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 矛盾.

2.2.3. $n > \lfloor n_4(t) \rfloor + 1$.

取 $|c(K_n)| = (t+1)(n - \frac{t}{2} - 1) + 2$, 根据定理 1.1, $|c(K_n)| > AR(K_n, 2P_3 \cup (t+1)P_2)$. 因此 K_n 中包含同构于 $2P_3 \cup (t+1)P_2$ 的彩虹子图, 记为 H' . 令 $H' = H'_1 \cup H'_2$, 其中 $H'_1 = (t+1)P_2$ 且 $E(H'_1) = \{e'_i \mid e'_i = x'_i y'_i, 1 \leq i \leq t+1\}$. 令 $H'_2 = 2P_3$, 其中 $P_3^3 = a_1 a_2 a_3$ 且 $P_3^4 = a_4 a_5 a_6$. 取 K_n 的一个边数为 $|c(K_n)|$ 的彩虹生成子图 G' , 且满足 $H' \subseteq G'$. 令 $D' = K_n - V(H')$, 有 $|V(D')| \geq 3$.

对 n 作归纳法, 假设 K_n 中不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图. 根据归纳假设, K_{n-1} 中也不包含同构于 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的彩虹子图, 因此 $|c(K_{n-1})| \leq (t+1)(n-1 - \frac{t}{2} - 1) + 1$. 对任意 $v \in V(K_n)$, 有

$$|l(v)| \geq (t+1) \left(n - \frac{t}{2} - 1 \right) + 2 - (t+1) \left(n - 1 - \frac{t}{2} \right) - 1 = t + 2 \geq 4.$$

对任意 $v \in K_n$, 有 $|l(v)| \geq 4$. 与 4.2.2 中的推导类似可得, $[x'_1, V(H'_2)]_{G'} = \emptyset$, $[x'_1, V(H'_1 - y'_1)]_{G'} = \emptyset$ 且 $[x'_1, V(D')]_{G'} \neq \emptyset$, 记 $x'_1 w \in E(G')$, $w \in V(D')$. 显然 $[w, V(H' - V(e'_1))]_{G'} = \emptyset$ 且 $[w, V(D')]_{G'} = \emptyset$. 因此 $|[w, V(H')]_{G'}| = |[w, V(e'_1)]_{G'}| \leq 2$, 进而

$$4 \leq |l(w)| \leq |[w, V(H')]_{G'}| + |[w, V(D')]_{G'}| \leq 2,$$

矛盾. 证毕. □

3. 总结与展望

本文研究了完全图中匹配与 P_3, P_4 的并图所构成的线性森林的反拉姆齐数, 并给出当 $t \geq 2$ 及 $n \geq 2t + 7$ 时, $AR(K_n, P_3 \cup P_4 \cup tP_2)$ 精确值. 本文将含有两类分支的线性森林推广到含有三类不同分支的线性森林. 此外, 后续的研究可以将 $P_3 \cup P_4 \cup tP_2$ 的结果进行推广, 研究完全图中 $lP_3 \cup kP_4 \cup tP_2$ 的反拉姆齐数精确值.

参考文献

- [1] Erdős, P., Simonovits, M. and Sós, V.T. (1975) Anti-Ramsey Theorems. In: Hajnal, A., Rado, R. and Sós, V.T., Eds., *Infinite and Finite Sets: To Paul Erdős on His 60th Birthday*, North-Holland Publishing Company, 633-643.
- [2] Gilboa, S. and Roditty, Y. (2015) Anti-Ramsey Numbers of Graphs with Small Connected Components. *Graphs and Combinatorics*, **32**, 649-662.
<https://doi.org/10.1007/s00373-015-1581-y>
- [3] Bialostocki, A., Gilboa, S. and Roditty, Y. (2015) Anti-Ramsey Numbers of Small Graphs. *Ars Combinatoria*, **123**, 41-53.
- [4] Jin, Z.M. and Gu, J.Q. (2024) Rainbow Disjoint Union of Clique and Matching in Edge-Colored Complete Graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **44**, 953-970.
<https://doi.org/10.7151/dmgt.2483>
- [5] Fang, C.Q., Györi, E., Lu, M. and Xiao, J.M. (2021) On the Anti-Ramsey Number of Forests. *Discrete Applied Mathematics*, **291**, 129-142. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.08.027>
- [6] Xie, T.Y. and Yuan, L.T. (2020) On the Anti-Ramsey Numbers of Linear Forests. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 112130. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112130>
- [7] He, M.L. and Jin, Z.M. (2025) Rainbow Short Linear Forests in Edge-Colored Complete Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **361**, 523-536. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.11.002>
- [8] Jie, Q., He, M.L. and Jin, Z.M. (2025) Rainbow Forest Consisting of Short Paths in K_n . *Discrete Applied Mathematics*, **376**, 260-269. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.06.041>
- [9] Jie, Q. and Jin, Z.M. (2025) Anti-Ramsey Number of Union of 5-Path and Matching. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **45**, 1185-1210. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2579>
- [10] Jie, Q. and Jin, Z.M. (2026) Rainbow-Free Colorings for Spanning Linear Forest Consisting of Short Paths. *Discrete Applied Mathematics*, **386**, 30-57.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2026.01.016>
- [11] Jin, Z.M., Jie, Q. and Cao, Z.X. (2024) Rainbow Disjoint Union of P_4 and a Matching in Complete Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **474**, Article ID: 128679.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128679>
- [12] 徐泓坚, 潘林舒. 一类生成森林的反拉姆齐数[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 102-113.