

无限凸优化问题的Lagrange对偶

夏 爽

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2026年8月11日; 录用日期: 2026年9月5日; 发布日期: 2026年9月16日

摘 要

借助共轭上图方法, 引入新的约束规范条件, 刻画了无限凸优化问题与对偶问题之间的 Lagrange 强对偶, 并推导出互补松弛条件与近似最优性条件, 推广了现有凸优化对偶相关结论.

关键词

无限凸优化, 强对偶, 最优性条件

Lagrange Duality of Infinite Convex Optimization

Shuang Xia

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: August 11, 2026; accepted: September 5, 2026; published: September 16, 2026

Abstract

By virtue of the epigraph method of conjugates, this paper introduces new constraint qualification conditions, characterizes Lagrange strong duality between the infinite

convex optimization problem and its dual problem, derives complementary slackness conditions and approximate optimality conditions, and generalizes the existing conclusions related to duality in convex optimization.

Keywords

Infinite Convex Optimization, Strong Duality, Optimality Conditions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

假设 X 为 Banach 空间, T 为任意非空指标集, 映射 $f, f_t : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 均为空间 X 上的真凸下半连续函数, 考虑以下无限凸优化问题

$$(P) \quad \begin{aligned} & \inf f(x), \\ & \text{s.t. } f_t(x) \leq 0 \quad \forall t \in T. \end{aligned}$$

此类问题及其对偶理论在函数逼近, 工程, 经济等领域均有重要应用, 因而一直受到广大学者的关注(参看文 [1–8]). 当指标集 T 为有限集时, Zalinescu 在文 [9] 中通过斯莱特条件, 建立了 Lagrange 强对偶, Correa 等人在文 [10] 研究了有限凸优化的对偶理论与最优性条件. 当指标集 T 为无限集时, Dinh 等人在文 [11] [12] 将强对偶理论推广至一类紧连续半无限优化问题, Fang 等人在文 [13] [14] 针对局部凸空间中无下半连续假设的凸无限规划, 提出新型约束规范条件, 分别刻画了推广 Farkas 引理, 强稳定对偶, KKT 条件及全拉格朗日对偶成立的充要条件, 弱化了已有理论的前提假设. 特别的, Hantoute 等人在文 [15] 中, 松弛了经典拉格朗日对偶乘子, 建立了两类全新 Lagrange 对偶问题, 并通过 Slater 条件建立了强对偶性定理.

受上述文献启发, 本文将继续研究无限凸优化问题, 通过引入新的约束规范条件, 刻画无线凸优化问题与对偶问题之间的 Lagrange 强对偶, 并推导出互补松弛条件. 最后结合一致下半连续与次微分性质, 建立了近似最优性条件. 由于新的约束规范条件无需下半连续的前提假设, 因此, 本文弱化了文 [15] 的条件, 改进了文 [15] 中强对偶理论的相关结果.

2. 记号与定义

设 X 为 Banach 空间, X^* 是其拓扑对偶空间, $\langle x^*, x \rangle$ 表示泛函 $x^* \in X^*$ 在 $x \in X$ 处的

值, 即 $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$. $\|x\|$ 表示元素 $x \in X$ 的范数, 任取 $x, y \in X$, 由范数诱导的距离定义为 $d(x, y) = \|x - y\|$. 空间 X 的开单位球和闭单位球记为 $B_X, \overline{B}_X$, 相应地, 拓扑对偶空间 X^* 的开单位球记作 B_{X^*} , 对任意 $x \in X, \delta > 0$, 记 $B(x, \delta), \overline{B}(x, \delta)$ 为以 x 为球心、 δ 为半径的开球与闭球. 记 $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 本文约定: $0 \cdot (+\infty) = +\infty, (+\infty) - (+\infty) = +\infty$. 空集(可带下标)记作 $\emptyset$, 满足 $\inf \emptyset_\mathbb{R} = +\infty, \sup \emptyset_{\mathbb{R}_+} = 0$. 对集合 $U \subset X$, 我们用 $\text{cl } U$ 表示 U 的闭包, $\text{diam } U$ 表示集合 U 的直径, 即 $\text{diam } U := \sup_{x_1, x_2 \in U} d(x_1, x_2)$. 进一步, 若 U 是 X 的凸子集, 则 $N_U(u_0)$ 表示 U 在 u_0 点的法锥:

$$N_U(u_0) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, u - u_0 \rangle \leq 0, \forall u \in U\}.$$

集合 U 的示性函数定义为

$$\delta_U(x) = \begin{cases} 0, & x \in U, \\ +\infty, & x \notin U. \end{cases}$$

对扩充实值函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, 其定义域与上图分别为

$$\text{dom } f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}, \quad \text{epi } f := \{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \mu\}.$$

若函数 f 的上图 $\text{epi } f$ 为闭集, 则称函数 f 下半连续. 若函数 f 的上图 $\text{epi } f$ 为凸集, 则称函数 f 为凸函数. 对 $\bar{x} \in \text{dom } f$, f 在 $\bar{x}$ 处的次微分为

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in X\}.$$

设 $\varepsilon \geq 0$, 集合

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + \varepsilon \geq 0, \forall x \in X\}$$

称为 f 在 $\bar{x}$ 处的 ε -次微分.

设 T 为任意非空指标集(可以是无限集, 不可数集), 集合 T 的全体有限子集构成的族记作

$$\mathcal{F}(T) := \{S \subset T \mid |S| < \infty\},$$

其中 $|S|$ 表示集合 S 的基数. 在子集包含偏序下, $\mathcal{F}(T)$ 构成定向集. 给定一族函数 $\{f_t\}_{t \in T}$, 我们引入文 [16] 的无穷和:

$$\left(\overline{\sum_{t \in T} f_t}\right)(x) := \limsup_{S \uparrow T, |S| < \infty} \sum_{t \in S} f_t(x), \quad x \in X. \quad (2.1)$$

定义 2.1 [16] 设 $U \subset X$ 为子集, T 为任意指标集, $\{f_t\}_{t \in T}$ 是定义在空间 X 上的扩充实值函数族. 称

$$\Lambda_U(\{f_t\}_{t \in T}) := \liminf_{\substack{S \uparrow T, |S| < \infty \\ \text{diam}\{x_t\}_{t \in S} \rightarrow 0}} \inf_{x_t \in U (\forall t \in S)} \sum_{t \in S} f_t(x_t), \quad (2.2)$$

为函数族在集合 U 上的一致下确界.

定义 2.2 [16] 若函数族 $\{f_i\}_{i \in T}$ 满足

$$\inf_U \overline{\sum_{t \in T} f_t} \leq \Lambda_U(\{f_t\}_{t \in T}), \quad (2.3)$$

则函数族在集合 U 上一致下半连续.

对任意 $x \in X$, 极限 $\lim_{S \uparrow T, |S| < \infty} \sum_{t \in S} f_t(x)$ 存在, 则简记该极限为 $\sum_{t \in T} f_t$. 显然有

$$\Lambda_U(\{f_t\}_{t \in T}) \leq \inf_U \overline{\sum_{t \in T} f_t}. \quad (2.4)$$

因此, 式(2.3)可以取等号.

引理 2.1 [15] 函数族 $\{f_t\}_{t \in T}$ 在集合 U 上一致下半连续, 当且仅当:

$$\limsup_{S \uparrow T, |S| < \infty} \left(\inf_U \sum_{t \in S} f_t - \Lambda_U(\{f_t\}_{t \in S}) \right) \leq 0,$$

$$\inf_U \overline{\sum_{t \in T} f_t} \leq \liminf_{S \uparrow T, |S| < \infty} \inf_U \sum_{t \in S} f_t.$$

引理 2.2 [15] 设 $\bar{x} \in \text{dom} \overline{\sum_{t \in T} f_t}$ 是无穷和函数 $\overline{\sum_{t \in T} f_t}$ 的极小点. 若存在常数 $\delta > 0$, 使得对任意 $t \in T$, f_t 为凸下半连续函数且在 $B(\bar{x}, \delta)$ 上有下界, 同时函数族 $\{f_t\}_{t \in T}$ 在 $B(\bar{x}, \delta)$ 上一致下半连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意有限子集 $S_0 \in \mathcal{F}(T)$, 存在有限子集 $S \in \mathcal{F}(T)$ 满足 $S_0 \subset S$, 以及点 $x_t \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ ($\forall t \in S$), 使得下述两式成立.

$$\sum_{t \in S} (f_t(x_t) - f_t(\bar{x})) \leq 0, \quad (2.5)$$

$$0 \in \sum_{t \in S} \partial f_t(x_t) + B_{X^*}.$$

若 T 是有限集, 式(2.5)可替换为更经典的形式:

$$|f_t(x_t) - f_t(\bar{x})| \leq 0 \quad (t \in T).$$

3. 无限凸优化问题的对偶性

考虑以下无限凸优化问题

$$(P) \quad \begin{aligned} & \inf f(x), \\ & \text{s.t. } f_k(x) \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_+. \end{aligned}$$

其中函数 $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ 是定义在 X 上的真凸函数, $\mathbb{N}_+$ 是全体正整数集. 记可行域为

$$C := \text{dom } f_0 \cap \{x \in X \mid f_k(x) \leq 0, \forall k \in \mathbb{N}_+\} \neq \emptyset.$$

下面引入文 [15] 中的两类 Lagrange 函数, 对任意 $x \in X$, 非负乘子 $\lambda_\infty, \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}_+$, 以及任意 $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$L(x, \lambda, \lambda_\infty) := f(x) + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k(x)} + \lambda_\infty f_\infty(x), \quad (3.1)$$

$$L_m(x, \lambda) := f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k f_k^+(x). \quad (3.2)$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $f_k^+ := \max\{f_k, 0\}$ 表示函数 f_k 的正部, $\lambda^\infty f^\infty$ 为无限指标约束框架下拉格朗日函数对应的无穷渐近项, 且

$$f_\infty(x) := \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad (x \in X). \quad (3.3)$$

约定当 $m = 0$ 时, 式(3.2) 中的第一项有限和取值为 0. 对任意 $x \in X$, $j \in \mathbb{N}_+$, 无穷和记号定义为

$$\overline{\sum_{k > j} \lambda_k f_k(x)} := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=j+1}^n \lambda_k f_k(x). \quad (3.4)$$

根据 Lagrange 函数(3.1)和(3.2), 可以得到原问题(P) 的两个对偶问题

$$(D) \quad \sup_{\lambda \in \ell_+^1, \lambda_\infty \in \mathbb{R}_+} \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \lambda_\infty),$$

$$(D_m) \quad \sup_{\lambda \in \ell_+^\infty} \inf_{x \in X} L_m(x, \lambda).$$

其中

$$\ell^1 = \left\{ \lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < +\infty \right\},$$

$$\ell^\infty = \left\{ \lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \sup_{k \in \mathbb{N}_+} |\lambda_k| < +\infty \right\}.$$

ℓ_+^1 , ℓ_+^∞ 分别代表 ℓ^1 , ℓ^∞ 空间内所有非负元素构成的子集. 记 $v(D)$ 和 $v(D_m)$ 分别为对偶问题(D)和(D_m) 的最优值.

为研究无限凸优化问题与其对偶问题之间的 Lagrange 对偶, 本文首先引入以下约束规范条件.

定义 3.1 若

$$\text{epi}(f + \delta_C)^* = \bigcup_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1 \\ \lambda_\infty \in \mathbb{R}_+}} \text{epi} \left(f + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty \right)^*,$$

则称系统 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ 满足 conical (WEHP) $_f$ 条件.

下面的定理建立了问题(P), 问题(D)和问题(D) $_m$ 之间的联系.

定理 3.1 设原问题最优值 $v(P) > -\infty$. 则对任意 $m = 0, 1, \dots$, 有

$$v(D) \leq v(D_m) \leq v(P). \quad (3.5)$$

此外, 若系统 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ 满足 conical (WEHP) $_f$ 条件, 则强对偶成立, 即 $v(D) = v(D_m)$, 且对偶问题(D) 与(D) $_m$ 均存在最优解. 此时

$$\begin{aligned} v(P) &= \max_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1, \lambda_\infty \in \mathbb{R}_+} \inf \left(f_0 + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty \right) \\ &= \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^\infty} \inf \left(f_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k f_k^+ \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

若 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1$, $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$ 是(D) 的最优解, 则

$$\hat{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} + \lambda_\infty + \alpha, \lambda_{m+2} + \lambda_\infty + \alpha, \dots) \quad (3.7)$$

为(D) $_m$ 的最优解, 其中若 $\lambda_\infty > 0$, 则 $\alpha = 0$. 反之则 $\alpha = 1$.

Proof. 式(3.5)中的最后一个不等式自然成立, 现证明第一个不等式.

取 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1$, $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$ 和 $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1} + \lambda_\infty + \alpha, \lambda_{m+2} + \lambda_\infty + \alpha, \dots)$ (其中若 $\lambda_\infty > 0$, 则 $\alpha = 0$. 反之则 $\alpha = 1$), 显然 $\hat{\lambda} \in \ell_+^\infty$. 任取 $x \in \text{dom } f_\infty$, 若 $\lambda_\infty = 0$, 则

$$L(x, \lambda, \lambda_\infty) \leq f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (\lambda_k + \alpha) f_k^+(x) = L_m(x, \hat{\lambda}).$$

若 $\lambda_\infty > 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在下标 $j > m$ 满足 $f_\infty(x) < f_j(x) + \varepsilon/\lambda_\infty$, 于是

$$\lambda_j f_j(x) + \lambda_\infty f_\infty(x) < (\lambda_j + \lambda_\infty) f_j(x) + \varepsilon.$$

若 $x \notin \text{dom } f_\infty$, 则 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$, 因此

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \lambda_\infty) &< f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x) + \sum_{\substack{k > m, \\ k \neq j}} \lambda_k f_k(x) + (\lambda_j + \lambda_\infty) f_j(x) + \varepsilon \\ &\leq f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (\lambda_k + \lambda_\infty) f_k^+(x) + \varepsilon \\ &= L_m(x, \hat{\lambda}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 可得 $L(x, \lambda, \lambda_\infty) \leq L_m(x, \hat{\lambda})$, 从而

$$L_m(x, \hat{\lambda}) = f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (\lambda_k + \alpha + \lambda_\infty) f_k^+(x) = +\infty.$$

综上三种情形, 均有 $L(x, \lambda, \lambda_\infty) \leq L_m(x, \hat{\lambda})$. 由此可推出 $v(D) \leq v(D_m)$.

接下来证明当系统 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ 满足 conical (WEHP) $_f$ 条件时, $v(P) \leq v(D)$. 不妨设 $v(P) = r \in \mathbb{R}$, 由原问题最优值定义, 对任意 $x \in X$, 有

$$(f + \delta_C)(x) \geq r, \quad \forall x \in X.$$

因此

$$(0, -r) \in \text{epi}(f + \delta_C)^*.$$

由于族 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+; f_\infty\}$ 满足 conical (WEHP) $_f$ 条件, 有

$$\text{epi}(f + \delta_C)^* = \bigcup_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1 \\ \lambda_\infty \in \mathbb{R}_+}} \text{epi} \left(f + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty \right)^*.$$

于是存在一组乘子 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1$, $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$, 使得

$$(0, -r) \in \text{epi} \left(f + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty \right)^*.$$

根据上图定义, 共轭函数满足

$$\left(f + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty \right)^*(0) \leq -r.$$

再由共轭函数定义可得

$$\inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k(x)} + \lambda_\infty f_\infty(x) \right\} \geq r.$$

根据对偶问题最优值定义, $v(D) \geq r = v(P)$. 结合上述已证不等式链 $v(D) \leq v(D_m) \leq v(P)$, 联立得

$$v(D) = v(D_m) = v(P).$$

因此 λ, λ_∞ 是对偶问题(D) 的最优解. $\hat{\lambda}$ 是对偶问题(D $_m$) 的最优解. □

推论 3.1 假设 x 是问题(P) 的一个解, 若系统 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ 满足 conical (WEHP) $_f$ 条件, 则

(i) 对偶问题(D) 存在最优解 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, λ_∞ , 使得

$$f_0(\bar{x}) = \inf \left(f_0 + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty \right). \quad (3.8)$$

进一步, 对问题(D) 的任意最优解, 上述下确界均可在 $\bar{x}$ 处取到, 且互补松弛条件成立:

$$\lambda_k f_k(\bar{x}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}. \quad (3.9)$$

(ii) 对任意 $m = 0, 1, \dots$, 对偶问题(D_m) 存在最优解 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, 使得

$$f_0(\bar{x}) = \inf \left(f_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k f_k^+ \right). \quad (3.10)$$

进一步, 对问题(D_m) 的任意最优解, 上述下确界均可在 $\bar{x}$ 处取到, 且部分互补松弛条件成立:

$$\lambda_k f_k(\bar{x}) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Proof. 两个结论的第一部分均为定理 3.1 的直接推论, 下面证明第二部分.

由于 $\bar{x} \in X$ 是原问题(P) 的最优解, 故对任意 $k \in \mathbb{N}_+$ 有 $f_k(\bar{x}) \leq 0$, 且

$$f_\infty(\bar{x}) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(\bar{x}) \leq 0.$$

设 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1$, $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$ 是对偶问题(D) 的一组最优解, 结合式(3.8)可得

$$f_0(\bar{x}) \leq f_0(\bar{x}) + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k(\bar{x})} + \lambda_\infty f_\infty(\bar{x}),$$

整理得

$$\overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k(\bar{x})} + \lambda_\infty f_\infty(\bar{x}) \geq 0.$$

结合 $\lambda_k \in \ell_+^1$, $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$, 且每一项 $\lambda_k f_k(\bar{x}) \leq 0$, $\lambda_\infty f_\infty(\bar{x}) \leq 0$, 因此只能

$$\lambda_k f_k(\bar{x}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\},$$

同时式(3.8)中的下确界在 $\bar{x}$ 处取到.

同理, 对 $m = 0, 1, \dots$, 若 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^\infty$ 是对偶问题(D_m) 的最优解, 结合式(3.10)有

$$f_0(\bar{x}) \leq f_0(\bar{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(\bar{x}) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k f_k^+(\bar{x}),$$

化简得

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(\bar{x}) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k f_k^+(\bar{x}) \geq 0.$$

对所有 $k = m+1, m+2, \dots$, $f_k^+(\bar{x}) = \max\{f_k(\bar{x}), 0\} = 0$, 于是

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(\bar{x}) \geq 0.$$

而对 $k = 1, \dots, m$, 有 $\lambda_k \in \ell_+^\infty$, $f_k(\bar{x}) \leq 0$, 故 $\lambda_k f_k(\bar{x}) \leq 0$. 联立可得

$$\lambda_k f_k(\bar{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

且式(3.10)中的下确界在 $\bar{x}$ 处取到. □

4. 无限凸优化问题的最优性条件

定理 4.1 设 $\bar{x}$ 是原问题(P) 的最优解. 若系统 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ 满足 conical (WEHP)_f 条件, 且对偶问题(D) 存在最优解 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, λ_∞ , 满足下述两条条件:

- (i) f 以及 $\lambda_k f_k$ ($k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$) 在 $\bar{x}$ 的某邻域内下半连续且有下界,
- (ii) 函数族 $\{f, \lambda_k f_k \mid k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}\}$ 在 $\bar{x}$ 的某邻域内一致下半连续,

则互补松弛条件成立.

且对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意正整数 M , 总存在正整数 $n > M$, 以及点 $x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $x_\infty \in B(\bar{x}, \varepsilon)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x_k) + \lambda_\infty f_\infty(x_\infty) &\leq f_0(\bar{x}), \\ 0 \in \partial f(x_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \partial f_k(x_k) + \lambda_\infty \partial f_\infty(x_\infty) + \varepsilon B_{X^*}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中约定当 $(k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\})$ 时

$$\lambda_k \partial f_k(x_k) = N_{\text{dom } f_k}(x_k).$$

Proof. 取满足条件(i)和(ii) 的问题(D) 的一组解 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^1$, $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$. 根据推论3.1, $\bar{x}$ 是函数 $f + \overline{\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \lambda_k f_k} + \lambda_\infty f_\infty$ 在 X 上的全局极小点, 且互补松弛条件成立.

由引理2.2, 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 及点 $x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $x_\infty \in B(\bar{x}, \varepsilon)$, 使得 $n > M$ 且

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x_k) + \lambda_\infty f_\infty(x_\infty) - f_0(\bar{x}) - \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(\bar{x}) - \lambda_\infty f_\infty(\bar{x}) \leq 0,$$

$$0 \in \partial f(x_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \partial f_k(x_k) + \lambda_\infty \partial f_\infty(x_\infty) + \varepsilon B_{X^*}.$$

即

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x_k) + \lambda_\infty f_\infty(x_\infty) \leq f(\bar{x}),$$

$$0 \in \partial f(x_0) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \partial f_k(x_k) + \lambda_\infty \partial f_\infty(x_\infty) + \varepsilon B_{X^*}.$$

□

定理 4.2 设 $\bar{x}$ 是原问题(P) 的最优解. 若系统 $\{f_k : k \in \mathbb{N}_+\}$ 满足 conical (WEHP)_f 条件, 且存在非负整数 m , 使得对偶问题 (D_m) 存在最优解 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_+^\infty$, 满足下述两条条件:

- (i) $f, \lambda_k f_k (k = 1, \dots, m), \lambda_k f_k^+ (k = m+1, m+2, \dots)$ 在 $\bar{x}$ 的某邻域内下半连续,
- (ii) 函数集 $\{f, \lambda_k f_k (k = 1, \dots, m), \lambda_k f_k^+ (k = m+1, \dots)\}$ 在 $\bar{x}$ 的某邻域内一致下半连续,

则部分互补松弛条件成立.

并且对任意 $\varepsilon > 0$, 任意满足 $M > m$ 的正整数 M , 总存在正整数 $n > M$, 以及点 $x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon) (k = 0, 1, \dots, n)$, 使得

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x_k) + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k f_k^+(x_k) \leq f(\bar{x}),$$

$$0 \in \partial f(x_0) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \partial f_k(x_k) + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \partial f_k^+(x_k) + \varepsilon B_{X^*}. \quad (4.2)$$

其中约定当 $\lambda_k = 0 (k \in \mathbb{N}_+)$ 时则

$$\lambda_k \partial f_k(x_k) = \lambda_k \partial f_k^+(x_k) = N_{\text{dom } f_k}(x_k).$$

Proof. 取满足条件(i)和(ii) 的问题 (D_m) 的一组解 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. 根据推论3.1, $\bar{x}$ 是函数 $f + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \lambda_k f_k^+$ 在 X 上的全局极小点, 且部分互补松弛条件成立. 对上述函数应用引理2.2, 即可得到所需结论.

参考文献

- [1] Li, C. and Ng, K.F. (2003) Constraint Qualification, the Strong CHIP, and Best Approximation with Convex Constraints in Banach Spaces. *SIAM Journal on Optimization*, **14**, 584-607. <https://doi.org/10.1137/s1052623402415846>
- [2] Li, C., Ng, K.F. and Pong, T.K. (2008) Constraint Qualifications for Convex Inequality Systems with Applications in Constrained Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **19**, 163-187. <https://doi.org/10.1137/060676982>
- [3] Bot, R.I. and Wanka, G. (2006) An Alternative Formulation for a New Closed Cone Constraint Qualification. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **64**, 1367-1381. <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.06.041>
- [4] Jeyakumar, V. and Mohebi, H. (2005) A Global Approach to Nonlinearly Constrained Best Approximation. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **26**, 205-227. <https://doi.org/10.1081/nfa-200063880>
- [5] Correa, R. and Hantoute, A. (2024) Integral-Type Representations for the Subdifferential of Suprema. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **203**, 1659-1685. <https://doi.org/10.1007/s10957-024-02545-9>
- [6] Fabian, M., Kruger, A.Y. and Mehlitz, P. (2024) Fuzzy Multiplier, Sum and Intersection Rules in Non-Lipschitzian Settings: Decoupling Approach Revisited. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **532**, Article ID: 127985. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127985>
- [7] Hiriarturruty, J.B. and Phelps, R.R. (1993) Subdifferential Calculus Using ε -Subdifferentials. *Journal of Functional Analysis*, **118**, 154-166. <https://doi.org/10.1006/jfan.1993.1141>
- [8] Karney, D.F. (1983) A Duality Theorem for Semi-Infinite Convex Programs and Their Finite Subprograms. *Mathematical Programming*, **27**, 75-82. <https://doi.org/10.1007/bf02591965>
- [9] Zalinescu, C. (2002) *Convex Analysis in General Vector Spaces*. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/5021>
- [10] Correa, R., Hantoute, A. and López, M.A. (2023) *Fundamentals of Convex Analysis and Optimization—A Supremum Function Approach*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-29551-5>
- [11] Dinh, N., Goberna, M.A., López-Cerdá, M.A. and Volle, M. (2022) Relaxed Lagrangian Duality in Convex Infinite Optimization: Reducibility and Strong Duality. *Optimization*, **72**, 189-214. <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2031192>
- [12] Goberna, M.A. and Volle, M. (2022) Duality for Convex Infinite Optimization on Linear Spaces. *Optimization Letters*, **16**, 2501-2510. <https://doi.org/10.1007/s11590-022-01865-x>
- [13] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2010) Constraint Qualifications for Optimality Conditions and Total Lagrange Dualities in Convex Infinite Programming. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **73**, 1143-1159. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.020>

-
- [14] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2009) Constraint Qualifications for Extended Farkas's Lemmas and Lagrangian Dualities in Convex Infinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1311-1332. <https://doi.org/10.1137/080739124>
- [15] Hantoute, A., Kruger, A.Y. and López, M.A. (2026) Strong Duality in Infinite Convex Optimization. *Applied Mathematics Optimization*, **93**, Article No. 68. <https://doi.org/10.1007/s00245-026-10385-4>
- [16] Hantoute, A., Kruger, A.Y. and López, M.A. (2026) Optimality Conditions and Subdifferential Calculus for Infinite Sums of Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **208**, Article No. 88. <https://doi.org/10.1007/s10957-025-02916-w>