

一个实数域上不等式在矩阵理论中的拓展形式

李雪娇, 吴佳浩, 海泽琦, 阿尔孜古丽·阿布莱提, 何奇, 蔡学鹏

新疆农业大学数理学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年8月7日; 录用日期: 2026年9月1日; 发布日期: 2026年9月10日

摘要

本文以实数基本二次不等式为核心, 将其严格推广至复正规矩阵范畴, 依托谱分解定理与Frobenius范数酉不变性, 系统建立迹不等式、单矩阵范数不等式、乘积型广义不等式、加权不等式及多矩阵和式不等式, 形成完整推广链条。

关键词

实数不等式, 正规矩阵, Frobenius范数, 酉不变性, 迹不等式

Generalization of a Real Inequality in Matrix Theory

Jiahao Wu, Xuejiao Li, Zeqi Hai, Arziguli Abulaiti, Qi He, Xuepeng Cai

College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi Xinjiang

Received: August 7, 2026; accepted: September 1, 2026; published: September 10, 2026

Abstract

Taking the fundamental quadratic inequality over real numbers as the starting point,

this paper rigorously generalizes it to the class of complex normal matrices. Based on the spectral decomposition theorem and the unitary invariance of the Frobenius norm, we systematically establish a series of inequalities including trace inequalities, single-matrix norm inequalities, generalized product-type inequalities, weighted inequalities and sum inequalities for multiple matrices, which constructs a complete generalization framework.

Keywords

Real Inequality, Normal Matrix, Frobenius Norm, Unitary Invariance, Trace Inequality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

不等式是分析、运筹、概率、经济数学的核心工具 [1]。矩阵广泛应用于数值计算、信号处理、机器学习，矩阵不等式是矩阵论的核心研究内容 [1, 2]。将实数不等式提升为矩阵不等式，是基础数学与应用数学的重要交叉方向。

詹兴致将算术 - 几何均值不等式推广为矩阵酉不变范数不等式 [1]；Bhatia引入任意矩阵完成拓展 [2]；Ando建立Young不等式的矩阵形式 [3]；Sababheh进一步细化 [4]。Frobenius范数因酉不变、易计算、物理意义明确，被广泛用于矩阵度量与算法评估 [5-7]。

现有研究多聚焦均值类、Young型不等式 [8-12]，对基础二次不等式的系统化矩阵推广较少。本文以二次基本不等式为基础，对 n 阶复方正正规矩阵给出多层次严格推广，修正文献 [13]中的推导疏漏，丰富证明体系。

2. 预备知识

定义2.1 (矩阵范数). 对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，若 $\|\cdot\|_F$ 满足：

1. 非负性： $A \neq 0 \implies \|A\|_F > 0$ ； $A = 0 \iff \|A\|_F = 0$ ；
2. 齐次性： $\forall k \in \mathbb{C}$ ， $\|kA\|_F = |k|\|A\|_F$ ；
3. 三角不等式： $\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$ ；

4. 乘法相容性: $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

则 $\|\cdot\|_F$ 为 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的矩阵范数。

定义2.2 (Frobenius范数).

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A)}$$

若 A 为正规矩阵, 则 $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$, 即

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2}.$$

定义2.3 (正规矩阵). 若 $A^H A = A A^H$, 则 A 可酉对角化:

$$A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^H, \quad U^H U = I.$$

引理2.1. Frobenius范数是酉不变范数: $\forall$ 酉矩阵 U, V , $\|UAV\|_F = \|A\|_F$, 且满足全部范数公理 [1, 7].

3. 主要结论

引理3.1 (实数不等式). 对任意实数 x 、非负实数 t , 有

$$x^2 + t \geq 2\sqrt{t}|x|.$$

证明. 将左侧配方得

$$x^2 - 2\sqrt{t}|x| + t = (|x| - \sqrt{t})^2.$$

由实数平方的非负性, $(|x| - \sqrt{t})^2 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 、 $t \geq 0$ 恒成立, 移项即得原不等式。当且仅当 $|x| = \sqrt{t}$ 时等号成立。□

定理3.1 (正规矩阵迹不等式). 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为正规矩阵, $t \geq 0$, 则

$$\text{tr}(A^2 + tI) \geq 2\sqrt{t}|\text{tr} A|.$$

证明. 由正规矩阵谱分解, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $A^2 + tI$ 的特征值为 $\lambda_i^2 + t$.

由迹的定义:

$$\text{tr}(A^2 + tI) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 + t), \quad \text{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

对每个特征值，由引理3.1得逐项不等式：

$$\lambda_i^2 + t \geq 2\sqrt{t}|\lambda_i|.$$

对 $i = 1, \dots, n$ 逐项求和：

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 + t) \geq 2\sqrt{t} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

由复数三角不等式：

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \geq \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| = |\operatorname{tr} A|.$$

联立放缩即得

$$\operatorname{tr}(A^2 + tI) \geq 2\sqrt{t} |\operatorname{tr} A|.$$

□

定理3.2 (单矩阵Frobenius范数不等式). 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为正规矩阵, $t \geq 0$, 则

$$\|A^2 + tI\|_F \geq \|2\sqrt{t}A\|_F.$$

证明. 由正规矩阵酉对角化, 存在酉矩阵 U 使得

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^H.$$

计算得

$$A^2 + tI = U \operatorname{diag}(\lambda_1^2 + t, \dots, \lambda_n^2 + t) U^H.$$

由Frobenius范数酉不变性：

$$\|A^2 + tI\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i^2 + t|^2}, \quad \|2\sqrt{t}A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |2\sqrt{t}\lambda_i|^2}.$$

由引理3.1, $|\lambda_i^2 + t| \geq |2\sqrt{t}\lambda_i|$, 平方求和并开方即证.

□

定理3.3 (乘积型广义范数不等式). 设 $A, X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为正规矩阵, $t \geq 0$, 则

$$\|A^2X + tX\|_F \geq \|2\sqrt{t}AX\|_F.$$

证明. 左侧提取公因子: $A^2X + tX = (A^2 + tI)X$.

对 A 酉对角化 $A = U\Lambda U^H$, 则 $A^2 + tI = U(\Lambda^2 + tI)U^H$, 代入得

$$(A^2 + tI)X = U(\Lambda^2 + tI)U^H X.$$

由酉不变性, 令 $B = U^H X$, 则

$$\|(A^2 + tI)X\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |\lambda_i^2 + t|^2 |b_{ij}|^2}.$$

同理右侧:

$$\|2\sqrt{t}AX\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |2\sqrt{t}\lambda_i|^2 |b_{ij}|^2}.$$

由 $|\lambda_i^2 + t|^2 \geq |2\sqrt{t}\lambda_i|^2$ 且 $|b_{ij}|^2 \geq 0$, 逐项求和后不等号保持, 故原不等式成立。□

定理3.4 (双参数加权范数不等式). 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为正规矩阵, $t_1, t_2 \geq 0$, 则

$$\|t_1 A^2 + t_2 I\|_F \geq 2\sqrt{t_1 t_2} \|A\|_F.$$

证明. 由双参数基本不等式: $t_1 x^2 + t_2 \geq 2\sqrt{t_1 t_2} |x|$.

代入特征值得 $t_1 |\lambda_i|^2 + t_2 \geq 2\sqrt{t_1 t_2} |\lambda_i|$.

由酉不变性:

$$\|t_1 A^2 + t_2 I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |t_1 \lambda_i^2 + t_2|^2}, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2}.$$

平方求和后开方即证。□

定理3.5 (多矩阵和式范数不等式). 设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为同阶正规矩阵, $t \geq 0$, 则

$$\sum_{k=1}^m \|A_k^2 + tI\|_F \geq 2\sqrt{t} \left\| \sum_{k=1}^m A_k \right\|_F.$$

证明. 由定理3.2, 对每个 A_k 有 $\|A_k^2 + tI\|_F \geq 2\sqrt{t} \|A_k\|_F$.

对 $k = 1, \dots, m$ 求和:

$$\sum_{k=1}^m \|A_k^2 + tI\|_F \geq 2\sqrt{t} \sum_{k=1}^m \|A_k\|_F.$$

由Frobenius范数三角不等式 $\sum \|A_k\|_F \geq \|\sum A_k\|_F$, 联立即证。□

4. 数值算例

取二阶正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.6525 & 0.7404 \\ 0.0867 & 0.4179 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0.6592 & 0.3489 \\ 0.4808 & 0.7261 \end{bmatrix}.$$

分别取 $t = 0, 1, 2, 3, 4$ 计算Frobenius范数, 所有结果均满足定理3.1 - 3.5.

5. 结语

本文以实数域上的二次不等式为基本出发点, 系统构建了一条从标量不等式到矩阵不等式的完整推广路径: 依次涵盖迹空间中的不等式形式、单矩阵的范数型不等式、矩阵乘积结构下的不等式、含权重系数的加权不等式, 以及多个矩阵之和所满足的复合不等式。在推导过程中, 特别厘清了特征值分布与矩阵范数之间的内在关联, 修正了迹不等式中常见的过度放缩问题。全部论证均基于矩阵论的核心工具展开, 包括谱分解定理、酉不变范数性质以及逐项控制技术, 确保每一步推理严密、过程清晰、结论可靠。所得结果可直接应用于矩阵扰动理论分析、线性动力系统的稳定性判定, 以及迭代类数值算法的误差界估计等领域。

基金项目

新疆农业大学大学生创新训练项目(dxscx2025391)。

参考文献

- [1] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [2] Bhatia, R. and Kittaneh, F. (1990) On the Singular Values of a Product of Operators. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **11**, 272-277. <https://doi.org/10.1137/0611018>
- [3] Ando, T. (1995) Matrix Young Inequalities. In: Huijsmans, C.B., Kaashoek, M.A., Luxemburg, W.A.J. and de Pagter, B., Eds., *Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices*, Birkhäuser, 33-38. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9076-2_5
- [4] Sababheh, M. (2015) Interpolated Inequalities for Unitarily Invariant Norms. *Linear Algebra and Its Applications*, **475**, 240-250. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.02.026>
- [5] 陈跃鹏, 姚波, 苏晓明, 等. 具有Frobenius范数界的不确定广义系统鲁棒二次稳定完整性[J]. 沈阳工业大学学报, 2002, 24(2): 173-176.
- [6] 许可, 顾尚泰, 等. 基于Frobenius范数奇异值分解的快速ICP算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2023, 21(10): 1263-1270.
- [7] 石聪聪. 矩阵Frobenius范数不等式及次可加性研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2016.
- [8] Al-Manasrah, Y. and Kittaneh, F. (2015) A Generalization of Two Refined Young Inequalities. *Positivity*, **19**, 757-768. <https://doi.org/10.1007/s11117-015-0326-8>
- [9] Conde, C. (2013) Young Type Inequalities for Positive Operators. *Annals of Functional Analysis*, **4**, 144-152. <https://doi.org/10.15352/afa/1399899532>

-
- [10] Manjegani, S.M. and Norouzi, A. (2015) Matrix Form of the Inverse Young Inequalities. *Linear Algebra and Its Applications*, **486**, 484-493. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.08.022>
- [11] Argerami, M. and Farenick, D.R. (2003) Young's Inequality in Trace-Class Operators. *Mathematische Annalen*, **325**, 727-744. <https://doi.org/10.1007/s00208-002-0400-y>
- [12] Erlijman, J., Farenick, D.R. and Zeng, R. (2002) Young's Inequality in Compact Operators. In: Gohberg, I. and Langer, H., Eds., *Linear Operators and Matrices*, Birkhäuser, 171-184. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8181-4_13
- [13] 胡訥. 一个实数不等式在矩阵论中的推广[J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2016, 37(1): 75-77.