

无爪图中分支顶点与叶子顶点总数不超过6的生成树

张 跃

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年8月7日; 录用日期: 2026年9月1日; 发布日期: 2026年9月14日

摘 要

树的叶子是度数为1的顶点, 树的分支顶点是度数至少为3的顶点。Hanh提出猜想: 对任意非负整数 k , 满足 $\sigma_{2k+3}(G) \geq n - 2$ 的 n 阶连通无爪图必存在生成树 T , 满足 $|B(T)| + |L(T)| \leq 2k + 3$, 并且证明了当 $k = 1$ 时该猜想成立。本文证明: 任意 n 阶连通无爪图 G , 若满足 $\sigma_6(G) \geq n - 2$, 则 G 中存在一棵生成树, 其叶子与分支顶点的总数不超过6。并且该度和条件是最优的。

关键词

生成树, 无爪图, 叶子, 分支顶点

Spanning Trees with at Most Six Branch Vertices and Leaves in Total of Claw-Free Graphs

Yue Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: August 7, 2026; accepted: September 1, 2026; published: September 14, 2026

Abstract

A leaf of a tree is a vertex of degree one and a branch vertex of a tree is a vertex of degree at least three. Hanh conjectured that for any nonnegative integer k , every connected claw-free graph of order n with $\sigma_{2k+3}(G) \geq n - 2$ contains a spanning tree T with $|B(T)| + |L(T)| \leq 2k + 3$ and proved that the conjecture holds when $k = 1$. In this paper, we show that every n -vertex connected claw-free graph G with $\sigma_6(G) \geq n - 2$ contains a spanning tree with at most six leaves and branch vertices in total. Moreover, the degree sum condition is best possible.

Keywords

Spanning Trees, Claw-Free, Leaves, Branch Vertices

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文只讨论简单图,简单图不含环与重边.设图 G 的顶点集为 $V(G)$,边集为 $E(G)$.对任意顶点 $u \in V(G)$,分别用 $N_G(u)$ 与 $\deg_G(u)$ 表示顶点 u 在图 G 中的邻点集合和顶点度数. $G - uv$ 表示在 G 中删去边 $uv \in E(G)$ 后得到的图;若 u, v 是 G 中一对不相邻顶点,则 $G + uv$ 表示在两点间添加边 uv 后得到的图.对任意顶点子集 $X \subseteq V(G)$, $|X|$ 代表集合 X 的元素个数. $G - X$ 表示删去 X 内所有顶点以及这些顶点关联的全部边所得到的图,由顶点集 X 诱导产生的子图记作 $G[X]$.

若顶点子集 $X \subseteq V(G)$ 中任意两个顶点在图 G 内均互不相邻,则称 X 为图 G 的独立集.对任意正整数 k ,作如下定义:

$$\sigma_k(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k \deg_G(v_i) \mid \{v_1, \dots, v_k\} \text{ 为 } G \text{ 的独立集} \right\}.$$

设 T 为一棵树.度数为1的顶点称作树 T 的叶子,度数至少为3的顶点称作树 T 的分支顶点.分别用 $L(T)$ 与 $B(T)$ 表示树 T 的叶子集合和分支顶点集合.对于本文中未定义的术语与记号,可参阅文

献 [1] 和文献 [2].

定义1. 树 T 中任意两个顶点 u, v 之间有且仅有一条路相连, 该路记为 uTv . 我们将集合 $S_T = \bigcup_{u, v \in B(T)} uTv$ 称作树 T 的内部子树.

定义2. 设 T 为图 G 的一棵生成树, $v \in V(T)$, $e \in E(T)$. 记边 e 上朝向顶点 v 一侧的关联顶点为 e_v , 树 T 内边上距离 v 最远的关联顶点为 $g(e, v)$. 若 $vg(e, v) \in E(G)$, 则称 v 是边 e 相对于生成树 T 的隐邻点.

定义3. 设 T 为图 G 的一棵生成树. 若存在边 $e \in E(T)$, 使得两个顶点同为边 e 关于 T 的隐邻点, 则称这两个顶点相对于 T 伪相邻. 同理, 若一个顶点集合内任意两点相对于 T 均不伪相邻, 则称该顶点集合相对于 T 伪独立.

定义4. 对任意 $x \in L(T)$, 从树 T 中移除路径 xTb_x , 将所得图记作 H . 此时 H 是一棵树, 并且 $L(T) \subseteq B(T)$. 这里 $H = S_T$ 为树 T 的内部子树. 我们称 H 的叶子为树 T 的外围分支顶点.

设 t 为正整数, 若一个图不以 $K_{1,t}$ 作为诱导子图, 则称该图为无 $K_{1,t}$ 图. 无 $K_{1,3}$ 图称作无爪图. 我们用 K_n 表示 n 阶完全图.

现在有许多成果围绕无 $K_{1,4}$ 图与无爪图中叶子或分支顶点数量较少的生成树的存在性展开研究. 对于连通无 $K_{1,4}$ 图, Kyaw得到了如下两个结论. 在文献 [2]中他验证了: 任意 n 阶连通无 $K_{1,4}$ 图 G 满足 $\sigma_4(G) \geq n - 1$ 时, G 必存在叶子数不超过3的生成树. 另外, 他在文献 [3]中证明: 任意 n 阶连通无 $K_{1,4}$ 图 G , 在 $\sigma_3(G) \geq n$ 的条件下存在哈密顿路; 对于满足 $m \geq 3$ 的整数 m , 条件 $\sigma_{m+1}(G) \geq n - \frac{m}{2}$ 可保证 G 存在叶子数至多为 m 的生成树. 文献 [4]中, Kano等人证明: 对任意非负整数 k , 若 n 阶连通无爪图 G 满足 $\sigma_{k+3}(G) \geq n - k - 2$, 则 G 存在一棵叶子数不超过 $k + 2$ 的生成树. Gould与Shull在文献 [5]中指出: 对任意非负整数 k , 若 n 阶连通无爪图 G 满足 $\sigma_{2k+3}(G) \geq n - 2$, 则 G 有分支顶点数不超过 k 的生成树. 基于有关生成树叶子数量或分支顶点数量的已有结论上, 已有部分成果研究图具备叶子与分支顶点之和有界的生成树存在性问题. 文献 [6]中, Ha证明: 设 m, k 为两个非负整数且满足 $m \leq k + 1$, 若 n 阶连通无 $K_{1,4}$ 图 G 满足 $\sigma_{m+2}(G) \geq n - k$, 则 G 存在一棵生成树, 其叶子与分支顶点总数不超过 $m + k + 2$. Pham Hoang Ha与Nguyen Hoang Trang在文献 [7]中证明: 若 n 阶连通无 $K_{1,5}$ 图 G 满足 $\sigma_4(G) \geq n - 1$, 则 G 存在一棵生成树, 它的叶子和分支顶点总数至多为5. Hanh在文献 [8]中提出猜想: 对任意非负整数 k , 满足 $\sigma_{2k+3}(G) \geq n - 2$ 的 n 阶连通无爪图必存在生成树 T , 满足 $|B(T)| + |L(T)| \leq 2k + 3$, 并且证明了当 $k = 1$ 时该猜想成立, 从而得到以下结果.

定理1.1. ([8]) 设 G 是 n 阶连通无爪图. 若 G 满足 $\sigma_5(G) \geq n - 2$, 则 G 存在生成树 T , 满足 $|B(T)| + |L(T)| \leq 5$.

本文进一步研究连通无爪图, 给出连通无爪图存在叶子与分支顶点总数为6的生成树的充分条件. 即证明如下定理.

定理1.2. 设 G 是 n 阶连通无爪图. 若 G 满足 $\sigma_6(G) \geq n - 2$, 则 G 存在生成树 T , 满足 $|B(T)| + |L(T)| \leq 6$.

本节最后构造一个例子, 以此说明定理中的度和条件“ $\sigma_6(G) \geq n - 2$ ”是紧的. 令 D_0, D_1, D_2, D_3 为图 K_2 的四份拷贝. 对 $i = 1, 2, 3$, 设三角形 T_i 满足 $V(T_i) = \{x_i, y_i, z_i\}$, 将 y_i 与 D_i 的所有顶点连边, 将 x_1 与 D_0 所有顶点连边. 当 $1 \leq i \leq 2$ 时, 连接 z_i 与 x_{i+1} . 最终构造出的图 G 为无爪图. 计算可

得 $|V(G)| = 17 = n$, 且 $\sigma_6(G) = n - 3$, 然而 G 不存在满足 $|B(T)| + |L(T)| \leq 6$ 的生成树 T .

2. 定理1.2的证明

为证明定理1.2, 本节需要使用下面的引理和论断.

引理2.1 ([8]). 设 T 是一棵树, 则 T 的叶子数满足:

$$|L(T)| = \sum_{x \in B(T)} (\deg_T(x) - 2) + 2.$$

引理2.2 ([8]). 设 T 为图 G 的一棵生成树, 若 $L(T)$ 为独立集, 并且 $L(T)$ 相对于 T 伪独立.

此引理用来约束叶子顶点的邻接结构, 排除叶子之间以及叶子路径上的多余连边, 以此保证后文隐邻点定义与树变换操作的合理性.

定理1.2 设 G 是 n 阶连通无爪图. 若 G 满足 $\sigma_6(G) \geq n - 2$, 则 G 存在生成树 T , 满足 $|B(T)| + |L(T)| \leq 6$.

证明: 设图 G 满足定理1.2的条件. 对任意 $s \in L(T)$, 选取 $b_s \in B(T)$, 使得 $(V(sTb_s) \setminus \{b_s\}) \cap B(T) = \emptyset$. 记 $v_s = N_T(b_s) \cap V(sTb_s)$, $z_b = N_T(b) \cap S_T$. 设 $e \in E(G)$, $X \subseteq V(G)$. 若 X 中存在一个顶点, 该顶点是边 e 关于 T 的隐邻点, 则称边 e 在集合 X 内含有隐邻点.

假设 G 不存在叶子和分支顶点总数不超过6的生成树. 选取 G 的一棵生成树 T , 满足:

(T1) $|B(T)| + |L(T)|$ 最小;

(T2) 在条件(T1)成立的基础上, $|S_T|$ 最小.

易知 $|B(T)| + |L(T)| \geq 7$, 故 $|B(T)| \geq 1$.

引理2.3 ([8]). 设 T 是图 G 的一棵生成树, 任取 $s, t \in L(T)$, 若 $v_s v_t \in E(G)$, 则 $sb_s \notin E(G)$, $tb_t \notin E(G)$.

此引理刻画了两片叶子的对应顶点一旦在原图相邻, 则两片叶子各自不能连接到对方叶子对应的分支顶点, 用来排除叶子之间跨分支的额外连边.

引理2.4 ([8]). 设 T 是图 G 的一棵生成树, 对任意 $s, t \in L(T)$, 成立 $sv_t \notin E(G)$ 且 $tv_s \notin E(G)$.

此引理限制了叶子顶点与另一叶子的路径顶点之间的连边, 避免出现会改变分支顶点数量的边.

论断2.5 ([8]). 设 T 为图 G 的一棵生成树, 记 $z_b = N_T(b) \cap S_T$. 对于 T 的任一外围分支顶点 b , $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 内与 z_b 相邻的顶点至多有 $\deg_T(b) - 3$ 个.

依据文献 [8]中的论证, 可直接推出论断2.5成立.

论断2.6 ([8]). 设 T 是图 G 的一棵生成树, $z_b = N_T(b) \cap S_T$. 对于 T 的任意外围分支顶点 b , $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 中存在一对相邻顶点.

依据文献 [8]中的论证, 可直接推出论断2.6成立.

由于 $|B(T)| + |L(T)| \geq 7$, 故 $|B(T)| \geq 1$. 从分支顶点数量为切入点, 先限制 $|B(T)| = 1$, 则 $|L(T)| \geq 6$. 接下来考虑 $|B(T)| \geq 2$, 则 $|L(T)| \geq 5$, 在此分为 $|B(T)| \geq 2$ 且 $|L(T)| \geq 6$; $|B(T)| = 2$ 且 $|L(T)| = 5$ 两种情况, 而 $|B(T)| = 1$, 或者 $|B(T)| \geq 2$ 均有 $|L(T)| \geq 6$, 所以两者放在一起证明. 接下来考虑 $|B(T)| = 3$ 则 $|L(T)| = 5$, 但是 $|B(T)| = 4$ 且 $|L(T)| = 5$ 的树是不存在的, 因此定理1.2分成三种情况证明. 接下来证明情况1

情况1. $|B(T)| = 1$, 或者 $|B(T)| \geq 2$ 并且 $|L(T)| \geq 6$.

若 $|B(T)| = 1$, 则 $k = |L(T)| \geq 7 - |B(T)| = 6$. 令 $B(T) = \{b\}$, $L(T) = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. 因为 $G[b, v_{s_1}, v_{s_2}, v_{s_3}]$ 为无爪图, 不失一般性, 可设 $v_{s_1}v_{s_2} \in E(G)$. 根据引理2.3与引理2.4可得 $s_1b, s_2b \notin E(G)$, 且对任意 $j \in \{3, 4, \dots, k\}$, 满足 $s_jv_{s_1}, s_jv_{s_2} \notin E(G)$. 故边 bv_{s_1} 与 bv_{s_2} 在 $L(T)$ 中均无隐邻点. 设 $X \subseteq L(T)$ 且 $|X| = 6$, 则 X 是 $V(G)$ 的独立集, 并且边 bv_{s_1} 与 bv_{s_2} 在 X 中均不存在隐邻点.

若 $|B(T)| \geq 2$ 且 $|L(T)| \geq 6$, 由论断2.6, $N_T(p) \setminus \{z_p\}$ 中存在两个顶点 v, v' 满足 $vv' \in E(G)$. 结合 $|B(T)| \geq 2$ 可知 T 至少存在两个外围分支顶点, 设 p, q 为 T 的两个外围分支顶点. 取 $s, s' \in L(T)$ 满足 $b_s = b_{s'} = p, v_s = v, v_{s'} = v'$. 根据引理2.3与引理2.4可得 $ps, ps', sv', s'v \notin E(G)$, 且对任意 $t \in L(T) \setminus \{s, s'\}$, 都有 $tv, tv' \notin E(G)$. 由此, 边 pv 与 pv' 在 $L(T)$ 中均无隐邻点. 设 $X \subseteq L(T)$ 且 $|X| = 6$, 则 X 是 $V(G)$ 的独立集, 并且边 pv 与 pv' 在 X 中均不存在隐邻点.

对任意 $v, x \in V(G)$, $vx \in E(G)$ 的充要条件是 v 为边 xx_v 的隐邻点, 其中 $x_v = V(xTv) \cap N_T(x)$. 因此, 将 v 视作隐邻点的 T 中边的数量等于顶点 v 在图 G 里的度数. 由上述证明可得, 图 G 中存在一个大小为6的伪独立集 X , 同时在 $E(T)$ 中存在两条边, 二者在 X 内都不存在隐邻点. 结合 X 的伪独立性以及这两条边在 X 中无隐邻点的性质, 有

$$\deg_G(X) = \sum_{v \in X} |\{e \in E(T) : v \text{ 为 } e \text{ 的隐邻点}\}| \leq |E(T)| - 2.$$

于是推出

$$\sigma_6(G) \leq \deg_G(X) \leq |E(T)| - 2 = |V(T)| - 1 - 2 = n - 3,$$

这与定理1.2的题设条件构成矛盾.

接下来证明情况2 $|B(T)| = 2$ 且 $|L(T)| = 5$. 依据论断2.5分两种子情况展开证明, 这两种子情况均要先找到 G 的一个独立集 X , 接下来证明 X 关于 T 伪独立. 之后在树 T 中找到两条边, 且这两条边在 X 中均不存在隐邻点, 最后采用类似情况1最后的证明, 得出矛盾.

情况2. $|B(T)| = 2$ 且 $|L(T)| = 5$.

依据论断2.5, $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 至多有1个顶点与 z_b 相邻, 那么有两种情况 $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 内没有顶点与 z_b 相邻或 $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 中存在一个顶点与 z_b 相邻. 因此分两种子情况展开证明.

子情况1. $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 内没有顶点与 z_b 相邻.

令 $L(T) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. 取 $B(T) = \{p, q\}$, $\deg_T(p) = 3, \deg_T(q) = 4, b_{s_1} = b_{s_2} = p, b_{s_3} = b_{s_4} = b_{s_5} = q$. 记 $v_i = v_{s_i}$, 其中 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 由论断2.5与论断2.6可知 $z_pv_1, z_pv_2, z_qv_3, z_qv_4, z_qv_5 \notin E(G)$, 且 $v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_3v_5 \in E(G)$.

对任意 $j \in \{3, 4, 5\}$, 若 $qs_j \in E(G)$, 取 $i \in \{3, 4, 5\} \setminus \{j\}$, 构造树 $T' = T + \{ps_j, v_i v_j\} - \{qv_j, qv_i\}$, 则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_j\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$. 因此 T' 违反了条件 (T1), 于是 $qs_3, qs_4, qs_5 \notin E(G)$. 同理可得 $ps_3, ps_4, ps_5 \notin E(G)$.

对任意 $j \in \{1, 2\}$, 若 $qs_j \in E(G)$, 构造树 $T' = T + qs_j - pv_j$, 则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_j\}) \cup \{v_j\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件 (T1), 故 $qs_1, qs_2 \notin E(G)$. 由于 $v_1 v_2 \in E(G)$, 根据引理 2.3 可得 $ps_1, ps_2 \notin E(G)$. 因此 $X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, q\}$ 是 G 的独立集.

论断 2.7 X 关于 T 伪独立.

根据引理 2.2, $L(T) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ 关于 T 伪独立. 因此只需证明: 对任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $\{q, s_i\}$ 关于 T 伪独立. 运用反证法, 假定存在 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 使得 q 与 s_i 相对于 T 伪相邻, 则存在边 $e \in E(T)$, 满足 $qg(e, q) \in E(G)$, $s_i g(e, s_i) \in E(G)$. 接下来分两种情况讨论.

(i) $g(e, q) \neq g(e, s_i)$.

显然有 $e_q = g(e, s_i)$ 且 $e_{s_i} = g(e, q)$, 于是 $qe_{s_i}, s_i e_q \in E(G)$.

对 $i \in \{1, 2\}$, 由 $ps_i \notin E(G)$ 可得 $e \neq pv_i$. (否则, 若 $e = pv_i$, 则推出 $ps_i \in E(G)$, 矛盾.) 构造树 $T' = T + \{qe_{s_i}, s_i e_q\} - \{e, pv_i\}$, 则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_i\}$, 即 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件 (T1).

对 $i \in \{3, 4, 5\}$, 取 $k \in \{3, 4, 5\} \setminus \{i\}$, 则 $e \in qTs_i$. (否则, 若 $e \notin qTs_i$, 则 $e_q = e_{s_i}$, 产生矛盾.) 再由 $qs_i \notin E(G)$ 可知 $e \neq qv_i$. 构造树 $T' = T + \{qe_{s_i}, s_i e_q, v_i v_k\} - \{e, qv_i, qv_k\}$, 则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件 (T1).

(ii) $g(e, q) = g(e, s_i)$.

令 $a := g(e, q) = g(e, s_i)$, 则 $as_i \in E(G)$, $aq \in E(G)$. 由于 $L(T)$ 是独立集, 可得 $a \notin L(T)$. 此外, 若 $i \in \{3, 4, 5\}$, 则必有 $a \neq p$. (否则, 假设 $a = p$ 就会推出 $ps_i \in E(G)$, 产生矛盾.) 若 $a \in pTq$, 则取 $i \in \{3, 4, 5\}$, $k \in \{3, 4, 5\} \setminus \{i\}$, 构造树 $T' = T + \{as_i, v_i v_k\} - \{qv_i, qv_k\}$, 则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{q\}) \cup \{a\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$ 且 $|L(T')| < |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件 (T1). 于是 $a \notin pTq$, 故存在 $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{i\}$, 使得顶点 $a \in s_j Tb_{s_j}$. 记 $c = N_T(a) \cap aTs_j$. 因为 $G[a, s_i, q, c]$ 为无爪图, 且已知 $qs_i \notin E(G)$, 因此必有 $cs_i \in E(G)$ 或者 $cq \in E(G)$. 下面分两种子情况讨论.

(ii-a) $i \in \{3, 4, 5\}$.

若 $j \in \{1, 2\}$, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cq\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_j\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$. 因此 T' 违反了条件 (T1). 故 $j \in \{3, 4, 5\} \setminus \{i\}$.

若 $cs_i \in E(G)$, 构造树 $T' = T + \{aq, v_i v_j, cs_i\} - \{qv_i, qv_j, ac\}$, 则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件 (T1). 于是必有 $cq \in E(G)$. 由

于 $G[q, z_q, v_i, c]$ 为无爪图,且 $z_q v_i \notin E(G)$,故 $cv_i \in E(G)$ 或 $cz_q \in E(G)$.

若 $cv_i \in E(G)$,构造树 $T' = T + \{cv_i, as_i\} - \{qv_i, ac\}$,则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$,所以 T' 违反了条件(T1).因此 $cv_i \notin E(G)$,进而推出 $cz_q \in E(G)$.

取 $k \in \{3, 4, 5\} \setminus \{i, j\}$,构造树 $T' = T + \{cz_q, as_i, v_i v_k\} - \{qv_k, qv_i, ac\}$,则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{q\}) \cup \{z_q\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).

(ii-b) $i \in \{1, 2\}$.

若 $j = \{1, 2\} \setminus \{i\}$,构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cq\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = \{q\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_j\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).于是 $j \in \{3, 4, 5\}$.

接下来取 $k \in \{3, 4, 5\} \setminus \{j\}$,构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i, v_j v_k\} - \{ac, qv_j, qv_k\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cq, v_j v_k\} - \{ac, qv_j, qv_k\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$,故 T' 违反了条件(T1).

论断2.8 边 pv_1 与 pv_2 是树 T 的边,且两条边在 X 中均不存在隐邻点.

若对 $j \in \{1, 2\}$ 有 $qv_j \in E(G)$,构造树 $T' = T + qv_j - pv_j$,则有 $B(T') = \{q\}$, $L(T') = L(T)$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).故 $qv_1, qv_2 \notin E(G)$.此外已知 $v_1 v_2 \in E(G)$,结合引理2.3与引理2.4可得 $ps_1, ps_2 \notin E(G)$,并且对任意 $i \in \{3, 4, 5\}$ 与 $j \in \{1, 2\}$,都有 $s_i v_j \notin E(G)$.由此可知,边 pv_1 与 pv_2 在 X 内均无隐邻点.

接下来的证明与情况1同理,从而与定理1.2的题设条件相矛盾.

子情况2.2 $N_T(b) \setminus \{z_b\}$ 中存在一个顶点与 z_b 相邻.

令 $L(T) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.不妨设 $B(T) = \{p, q\}$, $\deg_T(p) = 3$, $\deg_T(q) = 4$, $b_{s_1} = b_{s_2} = p$, $b_{s_3} = b_{s_4} = b_{s_5} = q$,且 $z_q v_5 \in E(G)$.对任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,记 $v_i = v_{s_i}$.由论断2.5与论断2.6可得 $z_p v_1, z_p v_2, z_q v_3, z_q v_4 \notin E(G)$,并且 $v_1 v_2, v_3 v_4 \in E(G)$.

对 $j \in \{1, 2\}$,若 $qs_j \in E(G)$,构造树 $T' = T + qs_j - pv_j$,则有 $B(T') = \{q\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_j\}) \cup \{v_j\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1),故 $qs_1, qs_2 \notin E(G)$.

对 $i \in \{3, 4\}$,构造树 $T' = T + \{ps_i, v_3 v_4\} - \{qv_3, qv_4\}$,则有 $B(T') = B(T) \setminus \{q\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$,所以 T' 违反了条件(T1),因此 $ps_3, ps_4 \notin E(G)$.结合 $v_3 v_4 \in E(G)$ 与引理2.3,得到 $qs_3, qs_4 \notin E(G)$.

下面证明 $qs_5 \notin E(G)$,运用反证法,假设 $qs_5 \in E(G)$.由论断2.5可知 $z_b v_4 \notin E(G)$,由于 $G[q, s_5, v_4, z_q]$

是无爪图,则必有 $s_5z_q \in E(G)$ 或 $s_5v_4 \in E(G)$. 若 $s_5z_q \in E(G)$,构造树 $T' = T + s_5z_q - qz_q$,则有 $B(T') = B(T), L(T') = L(T) \setminus \{s_5\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,所以 T' 违反了条件(T1),因此 $s_5z_q \notin E(G)$. 于是 $s_5v_4 \in E(G)$,构造树 $T' = T + s_5v_4 - qv_4$,则有 $B(T') = B(T), L(T') = L(T) \setminus \{s_5\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,所以 T' 违反了条件(T1). 综上 $qs_5 \notin E(G)$,故 $X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, q\}$ 是 G 的独立集.

论断2.9 X 关于树 T 伪独立.

根据引理2.2, $L(T) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ 相对于树 T 伪独立.因此只需证明:对任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{q, s_i\}$ 相对于树 T 伪独立. 运用反证法,假设存在 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,使得顶点 q 与 s_i 相对于树 T 伪相邻,则存在边 $e \in E(T)$,满足 $qg(e, q) \in E(G)$ 且 $s_i g(e, s_i) \in E(G)$.下面分两种情况讨论.

(i) $g(e, q) \neq g(e, s_i)$.

显然有 $e_q = g(e, s_i), e_{s_i} = g(e, q)$,于是 $qe_{s_i} \in E(G), s_i e_q \in E(G)$.

对 $i \in \{1, 2\}$,由 $ps_i \notin E(G)$ 可得 $e \neq pv_i$.构造树 $T' = T + \{qe_{s_i}, s_i e_q\} - \{e, pv_i\}$,则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_i\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|, |L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).

对 $i \in \{3, 4, 5\}$,必有 $e \in qTs_i$.结合 $qs_i \notin E(G)$ 可知 $e \neq qv_i$.对 $i \in \{3, 4, 5\}$,构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{qe_{s_i}, s_i e_q, v_3 v_4\} - \{e, qv_3, qv_4\}, & i \in \{3, 4\} \\ T + \{z_q v_5, s_5 e_q, qe_{s_5}\} - \{e, qz_q, qv_5\}, & i = 5 \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T), L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,故 T' 违反了条件(T1).

(ii) $g(e, q) = g(e, s_i)$.

令 $a := g(e, q) = g(e, s_i)$,则 $as_i \in E(G)$ 与 $aq \in E(G)$. 由于 $L(T)$ 是独立集,因此 $a \notin L(T)$.除此之外,若 $i \in \{3, 4, 5\}$,则必有 $a \neq p$. (否则,倘若 $a = p$, 当 $i \in \{3, 4\}$ 时,构造树 $T' = T + \{ps_i, v_3 v_4\} - \{qv_3, qv_4\}$,则有 $B(T') = \{p\}, L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,所以 T' 违反了条件(T1). 当 $i = 5$ 时, $G[p, q, s_5, v_2]$ 为无爪图,且已知 $qs_5 \notin E(G)$,故 $s_5 v_2 \in E(G)$ 或 $qv_2 \in E(G)$. 若 $s_5 v_2 \in E(G)$,构造树 $T' = T + s_5 v_2 - pv_2$,则有 $B(T') = \{q\}, L(T') = L(T) \setminus \{s_5\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,所以 T' 违反了条件(T1). 若 $qv_2 \in E(G)$,构造树 $T' = T + qv_2 - pv_2$,则有 $B(T') = \{q\}, L(T') = L(T)$,从而 $|B(T')| < |B(T)|, |L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1). 综上推出 $pq \in E(G)$ 或 $ps_5 \in E(G)$,产生矛盾.因此对任意 $i \in \{3, 4, 5\}$,都有 $a \neq p$.)

若 $a \in pTq$, 则 $i \in \{3, 4\}$,构造树 $T' = T + \{v_3 v_4, as_i\} - \{qv_3, qv_4\}$,则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{q\}) \cup \{a\}, L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).

对 $i = 5$,记 $a^- = N_T(a) \cap aTp, a^+ = N_T(a) \cap aTq$. 由于 $G[a, a^-, q, s_5]$ 是无爪图,且 $qs_5 \notin E(G)$,因此 $a^- s_5 \in E(G)$ 或者 $a^- q \in E(G)$. 若 $a^- s_5 \in E(G)$,构造树 $T' = T + \{a^- s_5, aq, z_q v_5\} - \{a^- a, qz_q, qv_5\}$,则有 $B(T') = B(T), L(T') = L(T) \setminus \{s_5\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|, |L(T')| < |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1). 若 $a^- q \in E(G)$,构造树 $T' = T + \{a^- q, aq, z_q v_5, as_5\} - \{a^- a, qz_q, qv_5, aa^+\}$,则有 $B(T') = B(T), L(T') = L(T)$,且 $S_{T'} \subsetneq S_T$,故 T' 违反了条件(T2). 于是 $a^- q \notin E(G)$,进而得到 $aq \notin E(G)$ 或 $as_5 \notin E(G)$,产生矛盾.

由此可知 $a \notin pTq$, 故存在 $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{i\}$, 使得 $a \in s_j T b_j$. 记 $c = N_T(a) \cap aT s_j$. 由于 $G[a, s_i, q, c]$ 为无爪图, 且 $q s_i \notin E(G)$, 可得 $c s_i \in E(G)$ 或 $c q \in E(G)$. 下面分两种子情况讨论.

(ii-a) $i \in \{3, 4, 5\}$.

若 $j \in \{1, 2\}$, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cq\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = \{q\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_j\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1). 故 $j \in \{3, 4, 5\} \setminus \{i\}$.

当 $j \in \{3, 4\} \setminus \{i\}$ 时, 若 $cs_i \in E(G)$, 构造树 $T' = T + \{aq, cs_i, v_3 v_4\} - \{ac, qv_3, qv_4\}$, 则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件(T1). 若 $cq \in E(G)$, 对于 $i \in \{3, 4\}$, 由于 $G[q, z_q, v_i, c]$ 为无爪图, 且 $z_p v_i \notin E(G)$, 所以 $cv_i \in E(G)$ 或 $cz_q \in E(G)$. 若 $cv_i \in E(G)$, 构造树 $T' = T + \{as_i, cv_i\} - \{qv_i, ac\}$, 则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件(T1). 因此 $cz_q \in E(G)$. 构造树 $T' = T + \{cz_q, as_i, v_3 v_4\} - \{qv_3, qv_4, ac\}$, 则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{z_q\}) \cup \{p\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件(T1). 对于 $i \in \{5\}$, 构造树 $T' = T + \{as_5, z_q v_5, cq, v_3 v_4\} - \{ac, qv_3, qv_4, qv_5\}$, 则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{z_q\}) \cup \{p\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_5\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件(T1).

当 $j = 5 \setminus \{i\}$ 时, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i, z_q v_5\} - \{ac, qz_q, qv_5\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_5, z_q v_5, cq\} - \{ac, qz_q, qv_5\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件(T1).

(ii-b) $i \in \{1, 2\}$.

若 $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cq\} - \{ac, pv_j\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = \{q\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_j\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1). 于是 $j \in \{3, 4, 5\}$.

当 $j \in \{3, 4\}$ 时, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{aq, cs_i, v_3 v_4\} - \{ac, qv_3, qv_4\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, v_3 v_4, cq\} - \{ac, qv_3, qv_4\} & \text{若 } cq \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件(T1).

当 $j = \{5\}$ 时,若 $cs_i \in E(G)$,构造树 $T' = T + \{aq, z_qv_5, cs_i\} - \{qz_q, qv_5, ac\}$,则有 $B(T') = B(T)$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$,从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).

若 $cq \in E(G)$,构造树 $T' = T + \{cq, as_i, v_1v_2\} - \{pv_1, pv_2, ac\}$,则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{p\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).

论断2.10 边 pv_1 与 pv_2 为树 T 中的边,且两条边在 X 中均不存在隐邻点.

若存在 $j \in \{1, 2\}$ 使得 $qv_j \in E(G)$,构造树 $T' = T + qv_j - pv_j$,则有 $B(T') = \{q\}$, $L(T') = L(T)$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).由此可知 $qv_1, qv_2 \notin E(G)$.另外已知 $v_1v_2 \in E(G)$,结合引理2.3与引理2.4能够推出 $ps_1, ps_2 \notin E(G)$,并且对任意 $i \in \{3, 4, 5\}$ 与 $j \in \{1, 2\}$,均有 $s_iv_j \notin E(G)$. 综上,边 pv_1 与边 pv_2 在 X 中都不存在隐邻点.

接下来的证明与情况1同理,从而与定理1.2的题设条件相矛盾.

接下来证明情况3 $|B(T)| = 3$ 且 $|L(T)| = 5$.先找到 G 的一个独立集 X , 接下来证明 X 关于 T 伪独立.之后在树 T 中找到两条边,且这两条边在 X 中均不存在隐邻点,最后采用类似情况1最后的证明,得出矛盾.

情况3 $|B(T)| = 3$ 且 $|L(T)| = 5$.

令 $L(T) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.不妨设 $B(T) = \{p, q, b\}$, $\deg_T(p) = \deg_T(q) = \deg_T(b) = 3$, $b_{s_1} = b_{s_2} = p$, $b_{s_3} = b_{s_4} = q$, $b_{s_5} = b$.对任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 记 $v_i = v_{s_i}$.由论断2.5与论断2.6可得 $z_pv_1, z_pv_2, z_qv_3, z_qv_4 \notin E(G)$,且 $v_1v_2, v_3v_4 \in E(G)$.对 $j \in \{3, 4, 5\}$,若 $ps_j \in E(G)$,构造树 $T' = T + ps_j - b_{s_j}v_j$,则有 $B(T') = B(T) \setminus \{b_{s_j}\}$, $L(T') = L(T)$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1),故 $ps_3, ps_4, ps_5 \notin E(G)$.同理可证 $qs_1, qs_2, qs_5 \notin E(G)$.结合 $v_1v_2 \in E(G)$ 与引理2.3,可得 $ps_1, ps_2 \notin E(G)$.于是 $X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, p\}$ 是 G 的独立集.

论断2.11 X 相对于树 T 是伪独立的.

根据引理2.2, $L(T) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ 关于树 T 伪独立.因此只需证明:对任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{p, s_i\}$ 关于树 T 伪独立.运用反证法,假设存在某个 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 使得顶点 p 与 s_i 关于树 T 伪相邻,则存在边 $e \in E(T)$,满足 $pg(e, p) \in E(G)$ 且 $s_ig(e, s_i) \in E(G)$.下面分两种情况讨论.

(i) $g(e, p) \neq g(e, s_i)$.

显然有 $e_p = g(e, s_i)$ 和 $e_{s_i} = g(e, p)$, 从而有 $pe_{s_i}, s_ie_p \in E(G)$.

记 $b^- = N_T(b) \cap bTp$, $b^+ = N_T(b) \cap bTq$.由于 $G[b, b^-, b^+, v_5]$ 为无爪图,故 $b^-b^+ \in E(G)$, $b^-v_5 \in E(G)$, $b^+v_5 \in E(G)$ 三者必有其一成立. 若 $b^-b^+ \in E(G)$,构造树 $T' = T + b^-b^+ - bb^+$,则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{b\}) \cup \{b^-\}$, $L(T') = L(T)$,并且 $S_{T'} \subsetneq S_T$,因此 T' 违反了条件(T2).于是只能有 $b^-v_5 \in E(G)$ 或 $b^+v_5 \in E(G)$,由对称性,不妨设 $b^+v_5 \in E(G)$.

若 $bs_5 \in E(G)$,构造树 $T' = T + \{bs_5, b^+v_5\} - \{bv_5, bb^+\}$,则有 $B(T') = B(T) \setminus \{b\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_5\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).

对 $i \in \{1, 2\}$,构造树 $T' = T + bs_i - pv_i$,则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_i\}$,从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$,因此 T' 违反了条件(T1).同理可证对 $j \in \{3, 4\}$, $bs_j \notin E(G)$.

对 $i \in \{3, 4, 5\}$, 结合 $qs_i \notin E(G)$ 与 $bs_i \notin E(G)$ 可知 $e \neq b_{s_i}v_i$. 构造树 $T' = T + \{pe_{s_i}, e_{ps_i}\} - \{e, b_{s_i}v_i\}$, 则有 $B(T') = B(T) \setminus \{b_{s_i}\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_i\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1).

对 $i \in \{1, 2\}$, 有 $e \in pTs_i$, 由于 $ps_i \notin E(G)$ 可得 $e \neq pv_i$. 构造树 $T' = T + \{pe_{s_i}, e_{ps_i}, v_1v_2\} - \{e, pv_1, pv_2\}$, 则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1).

(ii) $g(e, p) = g(e, s_i)$.

令 $a := g(e, p) = g(e, s_i)$, 则 $as_i \in E(G)$ 与 $ap \in E(G)$. 由于 $L(T)$ 是独立集, 因此 $a \notin L(T)$. 此外, 当 $i \in \{1, 2\}$ 时, $a \notin \{b, q\}$. 若 $a \in pTq$, 则必有 $i \in \{1, 2\}$, 此时构造树 $T' = T + \{as_i, v_1v_2\} - \{pv_1, pv_2\}$, 则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{p\}) \cup \{a\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{p\}$, 并且满足 $S_{T'} \subsetneq S_T$, 因此 T' 违反了条件(T2). 由此可知 $a \notin pTq$, 故一定存在 $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{i\}$, 使得 $a \in s_jTb_j$. 记 $c = N_T(a) \cap aTs_j$. 因为 $G[a, s_i, p, c]$ 为无爪图, 且 $qs_i \notin E(G)$, 所以 $cs_i \in E(G)$ 或者 $cp \in E(G)$ 成立. 下面分两种子情况展开讨论.

(ii-a) $i \in \{1, 2\}$.

若 $j \in \{3, 4, 5\}$, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{ap, cs_i\} - \{ac, b_{s_j}v_j\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cp\} - \{ac, b_{s_j}v_j\} & \text{若 } cp \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T) \setminus \{b_{s_j}\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_j\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1). 故 $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$.

若 $cs_i \in E(G)$, 构造树 $T' = T + \{ap, v_1v_2, cs_i\} - \{pv_1, pv_2, ac\}$, 则有 $B(T') = \{b, q\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| = |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1).

由于 $G[p, z_p, v_i, c]$ 为无爪图, 并且 $z_pv_i \notin E(G)$, 于是 $cv_i \in E(G)$ 或者 $cz_p \in E(G)$. 若 $cv_i \in E(G)$, 则构造树 $T' = T + \{as_i, cv_i\} - \{pv_i, ac\}$, 则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_i\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1). 故 $cv_i \notin E(G)$, 从而 $cz_p \in E(G)$. 构造树 $T' = T + \{cz_p, as_i\} - \{pv_i, ac\}$, 则有 $B(T') = (B(T) \setminus \{p\}) \cup \{z_p\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_i\}$, 且 $S_{T'} \subsetneq S_T$, 故 T' 违反了条件(T2).

(ii-b) $i \in \{3, 4, 5\}$.

若 $j \in \{3, 4, 5\} \setminus \{i\}$, 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{ap, cs_i\} - \{ac, b_{s_j}v_j\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cp\} - \{ac, b_{s_j}v_j\} & \text{若 } cp \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T) \setminus \{b_{s_j}\}$, $L(T') = (L(T) \setminus \{s_i\}) \cup \{v_j\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件(T1). 由此可得 $j \in \{1, 2\}$. 构造树

$$T' = \begin{cases} T + \{ap, cs_i, v_1v_2\} - \{ac, pv_1, pv_2\} & \text{若 } cs_i \in E(G), \\ T + \{as_i, cp, v_1v_2\} - \{ac, pv_1, pv_2\} & \text{若 } cp \in E(G), \end{cases}$$

则有 $B(T') = B(T) \setminus \{p\}$, $L(T') = L(T) \setminus \{s_i\}$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| < |L(T)|$, 故 T' 违反了条件 (T1).

论断2.12 边 qv_3 与 qv_4 为树 T 中的边, 且两条边在 X 内均不存在隐邻点.

若存在 $j \in \{3, 4\}, i \in \{1, 2, 5\}$ 使得 $b_{s_i}v_j \in E(G)$, 构造树 $T' = T + b_{s_i}v_j - qv_j$, 则有 $B(T') = B(T) \setminus \{b_{s_i}\}$, $L(T') = L(T)$, 从而 $|B(T')| < |B(T)|$, $|L(T')| = |L(T)|$, 因此 T' 违反了条件 (T1). 由此推出 $pv_3, pv_4, bv_3, bv_4 \notin E(G)$. 另外已知 $v_3v_4 \in E(G)$, 结合引理2.3与引理2.4可得, 对任意 $i \in \{1, 2, 5\}, j \in \{3, 4\}$, 都有 $qs_3, qs_4, s_iv_j \notin E(G)$. 综上, 边 qv_3 与边 qv_4 在 X 中均不存在隐邻点.

接下来的证明与情况1同理, 从而与定理1.2的题设条件相矛盾.

综上定理1.2得证.

参考文献

- [1] Maezawa, S., Matsubara, R. and Matsuda, H. (2019) Degree Conditions for Graphs to Have Spanning Trees with Few Branch Vertices and Leaves. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 231-238. <https://doi.org/10.1007/s00373-018-1998-1>
- [2] Kyaw, A. (2009) Spanning Trees with at Most 3 Leaves in $k_{1,4}$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6146-6148. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.04.023>
- [3] Kyaw, A. (2011) Spanning Trees with at Most k Leaves in $k_{1,4}$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **311**, 2135-2142. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.06.025>
- [4] Kano, M., Kyaw, A., Matsuda, H., Ozeki, K., Saito, A. and Yamashita, T. (2012) Spanning Trees with a Bounded Number of Leaves in a Claw-Free Graph. *Ars Combinatoria*, **103**, 137-154.
- [5] Gould, R.J. and Shull, W. (2020) On Spanning Trees with Few Branch Vertices. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111581. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.06.037>
- [6] Ha, P.H. (2025) Spanning Trees of $k_{1,4}$ -Free Graphs with a Bounded Number of Leaves and Branch Vertices. *Acta Mathematica Vietnamica*, **50**, 263-271. <https://doi.org/10.1007/s40306-025-00568-6>
- [7] Ha, P.H. and Trang, N.H. (2024) Spanning Trees with at Most 5 Leaves and Branch Vertices in Total of $k_{1,5}$ -Free Graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **28**, 847-855. <https://doi.org/10.11650/tjm/240606>
- [8] Hanh, D.D. (2022) Degree Conditions for Claw-Free Graphs to Have Spanning Trees with at Most Five Branch Vertices and Leaves in Total. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **59**, 58-66. <https://doi.org/10.1556/012.2022.01521>