

基于成对约束的不完整多视图聚类

张婉怡, 唐科威

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年9月22日; 录用日期: 2026年10月15日; 发布日期: 2026年10月23日

摘 要

不完整多视图聚类旨在处理样本在某些视图中缺失的聚类问题。Incomplete multi-view spectral clustering with adaptive graph learning (IMSC_AGL)是该领域的代表性方法, 通过联合图学习与谱聚类学习全局共识表示, 并在多个数据集上表现良好。然而, 该方法仅对共识表示施加正交约束, 难以保证清晰的聚类结构和高判别性; 同时, 视图缺失时各视图聚类指示矩阵中的噪声会干扰共识学习。为此, 本文在IMSC_AGL框架上引入结构化成对约束项, 借助辅助变量鼓励学习具有块对角结构的判别性共识表示, 同时理论分析表明, 该改进未增加额外高阶计算负担。在多个不完整多视图数据集上的实验表明, 本文方法优于IMSC_AGL及其他对比方法, 验证了改进的有效性。

关键词

不完整多视图数据, 成对约束, 子空间聚类

Incomplete Multi-View Clustering with Pairwise Constraints

Wanyi Zhang, Kewei Tang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: September 22, 2026; accepted: October 15, 2026; published: October 23, 2026

Abstract

Incomplete multi-view clustering aims to handle clustering problems where samples are missing in some views. Incomplete multi-view spectral clustering with adaptive graph learning (IMSC_AGL) is a representative method in this field, which learns a global consensus representation by jointly performing graph learning and spectral clustering, and performs well on multiple datasets. However, this method only imposes an orthogonal constraint on the consensus representation, making it difficult to ensure a clear clustering structure and high discriminability; moreover, when views are missing, noise in the cluster indicator matrices of individual views interferes with consensus learning. To this end, this paper introduces a structured pairwise constraint term into the IMSC_AGL framework, encouraging the learning of a discriminative consensus representation with a block-diagonal structure via auxiliary variables, and theoretical analysis shows that this improvement does not incur additional high-order computational burden. Experiments on multiple incomplete multi-view datasets demonstrate that the proposed method outperforms IMSC_AGL and other comparison methods, verifying the effectiveness of the improvement.

Keywords

Incomplete Multi-View Data, Subspace Clustering, Pairwise Constraints

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在现实生活中, 对象通常由多种特征共同描述, 如人的身高、体重、喜好等, 这类多特征数据称为多视图数据。不同视图在特征空间、分布和表达能力上存在差异, 使得多视图数据能更全面地刻画样本的独特性与类内共性。多视图聚类作为该领域的重要方向, 旨在无标签条件下自适应划分数据, 近年备受关注。实现优异聚类性能的关键在于保持各视图间聚类结果的一致性, 为此已提出多视图K-means [1]、谱聚类 [2]、低秩张量 [3]及深度矩阵分解 [4]等方法。然而, 数据采集

等过程中的失误常常导致部分视图数据缺失, 形成不完整多视图数据 [5], 使传统聚类方法难以直接适用。

为应对不完整多视图聚类问题, 近年来涌现出诸多解决方案, 大致可归为两类: 基于矩阵分解的方法 [6]和基于图学习的方法 [7]。前者通过矩阵分解技术学习所有视图的低维表示, 例如, DAIMC 算法采用非负矩阵分解来为所有样本学习一个统一的潜在表示 [8]; GPMVC算法同样利用矩阵分解技术从所有视图的标准化的单独表示中学习公共表示 [9]。后者则侧重于从不同视图中学习低维表示以揭示样本内部的几何结构, 例如, IMG算法利用拉普拉斯图在不完整样本间建立跨视图的结构化关联 [10]。然而, 这些方法仍存在诸多局限: 一方面, 许多方法要求至少存在一个完整视图, 或通过填充缺失视图来构造完整图, 这种填充策略在缺失率较高的情况下往往引入较大噪声, 严重影响聚类性能; 另一方面, 现有方法普遍将子空间学习与图构造视为两个独立的步骤, 无法保证学习到的共识表示为全局最优。

在此背景下, Wen等人提出了Incomplete multi-view spectral clustering with adaptive graph learning(IMSC_AGL)算法 [11], 首次将图学习与谱聚类技术整合到统一的框架中, 用于解决不完整多视图聚类问题。该算法通过低秩表示为各视图中的未缺失样本自适应构造图结构, 并引入缺失索引矩阵将其扩展为完备图, 进而通过谱聚类约束获得各视图的聚类指示矩阵, 并将其融合得到一个全局共识表示用于最终聚类。然而, IMSC_AGL算法对全局共识表示矩阵仅施加了简单的正交约束, 未能保证其本身具备清晰的聚类结构和足够的判别能力。此外, 当数据缺失率较高时, 各视图的聚类指示矩阵不可避免地含有噪声, 进而干扰共识表示的学习过程, 限制了聚类性能的进一步提升。

针对上述问题, 本文提出了一种改进的不完整多视图谱聚类模型。该模型在IMSC_AGL的基础上, 对全局共识表示矩阵引入了结构化成对约束项, 通过引入辅助变量学习一个具有块对角结构的高质量全局共识表示, 从而增强其判别能力。同时, 所引入的辅助变量更新不依赖于各视图的聚类指示矩阵, 有效提升了模型的鲁棒性。理论分析与实验验证均表明, 所提改进在保持与原始模型同一数量级计算复杂度的前提下, 显著提升了聚类性能。

本文的主要贡献总结如下:

- 针对IMSC_AGL算法中全局共识表示判别性不足的问题, 提出了一种基于结构化约束的改进模型, 通过对共识表示引入成对约束, 引导其学习具有块对角结构的判别性表示, 同时也增强了其鲁棒性。
- 理论分析了改进模型的算法复杂度, 证明了所提改进未增加额外的高阶计算负担, 保持了与原模型相当的求解效率的同时提高了聚类的准确性。

2. 相关工作

2.1. 谱聚类算法

谱聚类算法是一种基于图论的经典聚类算法, 其核心思想是通过对数据构造的相似度图进行谱分解, 将原始高维数据映射到低维表示空间, 从而使得在低维空间中数据的聚类结构更加清

晰 [12]。具体而言, 给定包含 n 个样本的数据集, 谱聚类首先构造一个非负的相似度矩阵 $\mathbf{W}$, 该矩阵刻画了样本间的局部邻接关系; 进而构建拉普拉斯图 $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ 或 $\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1/2}$) [13], 并求解如下优化问题:

$$\min_{\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}} \text{Tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{L} \mathbf{F}) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{D}$ 是对角阵, 对角元为 $\mathbf{W}$ 的行和, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times c}$ 为样本在 c 维低隐空间中的表示, $\text{Tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹运算。该问题本质上是一个特征值分解问题, 其最优解为拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 对应前 c 个最小特征值的特征向量 [14]。

2.2. 回顾IMSC_AGL算法

为克服传统谱聚类算法在处理不完整多视图数据时的固有局限, 后续涌现出诸多改进方法, 其中IMSC_AGL算法较具代表性。该算法首次将图学习与谱聚类有机结合, 旨在学习一个统一的共识表示。其核心思路为: 首先, 利用低秩表示为各视图中的未缺失样本构造图结构; 随后进一步引入缺失索引矩阵将其扩展为完备图; 然后, 通过谱聚类约束获得各视图的聚类指示矩阵, 并施加共识约束以融合得到全局共识表示; 最后, 对其施以K-means聚类, 获得最终结果。该算法的优化模型如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{U}} \quad & \sum_{v=1}^V \|\mathbf{Z}^{(v)}\|_* + \lambda_3 (c - \text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)} (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T)) + \\ & \lambda_1 \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}^{(v)} \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}) + \lambda_2 \|\mathbf{E}^{(v)}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Y}^{(v)} = \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{Z}^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, 0 \leq \mathbf{Z}^{(v)} \leq \mathbf{1}, \mathbf{Z}_{ii}^{(v)} = 0, \\ & (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{I}, \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2)$$

然而, IMSC_AGL算法中对全局共识表示矩阵 $\mathbf{U}$ 仅施加了正交约束, 协同项 $\text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)T} \mathbf{U} \mathbf{U}^T)$

虽能引导各视图的聚类指示矩阵 $\mathbf{F}^{(v)}$ 向 $\mathbf{U}$ 靠拢, 却无法保证 $\mathbf{U}$ 本身具备清晰的聚类结构和高质量的判别能力。因此, 即便 $\mathbf{U}$ 作为全局共识表示, 其判别性仍显不足。此外, $\mathbf{U}$ 的更新优化高度依赖于 $\mathbf{F}^{(v)}$, 当数据缺失率较高时, $\mathbf{F}^{(v)}$ 中不可避免地引入较多噪声, 进而干扰 $\mathbf{U}$ 的学习过程。基于上述分析, 本文对IMSC_AGL算法进行改进, 通过对全局共识表示矩阵 $\mathbf{U}$ 施加额外约束, 以增强其判别性与鲁棒性。

3. 提出算法

对于不完整多视图数据 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_v\}$, 将每个视图的数据划分为 $\mathbf{X}_v = [\mathbf{Y}_v, \mathbf{Q}_v]$, 其中 $\mathbf{Y}_v$ 为第 v 个视图中未缺失的数据样本, $\mathbf{Q}_v$ 为第 v 个视图中缺失的数据样本。

为弥补IMSC_AGL算法存在的局限性, 本文对全局共识表示矩阵 $\mathbf{U}$ 引入成对约束项, 具体形式如下:

$$\alpha \|\mathbf{U}\mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2, \quad s.t. \|\mathbf{M}_i\|_2^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

在原始IMSC_AGL算法中, $\mathbf{U}$ 的优化是通过取矩阵 $\sum_{v=1}^V \lambda_3 \mathbf{F}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)T}$ 的前 c 个最大特征值所对应的特征向量来构造的。而在引入上述成对约束项之后, $\mathbf{U}$ 的优化目标变为取矩阵

$$2\alpha \mathbf{M} + \sum_{v=1}^V \lambda_3 \mathbf{F}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)T} \quad (4)$$

的前 c 个最大特征值对应的特征向量。通过引入辅助矩阵 $\mathbf{M}$, 模型能够更加灵活地增强或抑制原始聚类结构, 从而提升 $\mathbf{U}$ 的判别能力。更为关键的是, $\mathbf{M}$ 的更新不依赖于 $\mathbf{F}^{(v)}$, 因此在 $\mathbf{F}^{(v)}$ 因高缺失率而含有大量噪声的情况下, $\mathbf{M}$ 仍可保持相对准确, 进而使得最终学习到的全局共识表示 $\mathbf{U}$ 具有更强的鲁棒性。

此外, 对引入的辅助矩阵 $\mathbf{M}$ 施加行归一化约束 $\|\mathbf{M}_i\|_2^2 = 1$, 可促使 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 趋近于理想的块对角结构, 从而引导全局共识表示 $\mathbf{U}$ 学习更具判别性的聚类嵌入, 进一步增强模型的聚类性能。这一现象可从谱图理论与矩阵优化两方面解释。谱图理论下, 理想聚类指示矩阵 $\mathbf{U}$ 对应的相似度矩阵 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 呈严格块对角结构, 类内为1、类间为0, 每行 ℓ_2 范数为1; 对 $\mathbf{M}$ 施加行归一化约束 $\|\mathbf{M}_i\|_2^2 = 1$, 等价于将其限制在“类指示相似度矩阵”的可行流形上, 最小化 $\|\mathbf{U}\mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2$ 则驱动 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 逼近该流形, 压缩非对角块能量。矩阵优化下, 该近端项与 $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ 构成交替投影: $\mathbf{M}$ 逐行归一化增强类内、抑制类间相似度, $\mathbf{U}$ 特征分解融合各视图判别信息, 二者交替使 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 收敛至块对角结构。且 $\mathbf{M}$ 更新仅依赖 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 而非含噪的 $\mathbf{F}^{(v)}$, 故高缺失率下仍能稳定引导 $\mathbf{U}$, 增强鲁棒性。

通过上述分析, 本文算法的最终模型为如下形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{U}, \mathbf{M}} \quad & \sum_{v=1}^V \|\mathbf{Z}^{(v)}\|_* + \lambda_3 (c - \text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)} (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{U}\mathbf{U}^T)) + \\ & \lambda_1 \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}^{(v)} \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}) + \lambda_2 \|\mathbf{E}^{(v)}\|_1 + \alpha \|\mathbf{U}\mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2, \\ s.t. \quad & \mathbf{Y}^{(v)} = \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{Z}^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, 0 \leq \mathbf{Z}^{(v)} \leq \mathbf{1}, \mathbf{Z}_{ii}^{(v)} = 0, \\ & (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{I}, \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}, \|\mathbf{M}_i\|_2^2 = 1, 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (5)$$

4. 模型求解

本文采用ADMM算法 [15]对公式 (5) 进行优化求解, 为简化 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 的求解过程, 我们引入了两个

辅助变量 $\mathbf{W}^{(v)}$ 与 $\mathbf{S}^{(v)}$ 对 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 进行变量替换, 如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{U}, \mathbf{M}, \mathbf{S}^{(v)}, \mathbf{W}^{(v)}} & \sum_{v=1}^V \|\mathbf{S}^{(v)}\|_* + \lambda_3(c - \text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T)) + \\ & \lambda_1 \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}_W^{(v)} \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}) + \lambda_2 \|\mathbf{E}^{(v)}\|_1 + \alpha \|\mathbf{U} \mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2, \\ \text{s.t. } & \mathbf{Y}^{(v)} = \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, \mathbf{Z}^{(v)} = \mathbf{S}^{(v)}, \mathbf{Z}^{(v)} = \mathbf{W}^{(v)}, \mathbf{W}^{(v)} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \\ & 0 \leq \mathbf{W}^{(v)} \leq \mathbf{1}, \mathbf{W}_{ii}^{(v)} = 0, (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{I}, \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}, \|\mathbf{M}_i\|_2^2 = 1, 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (6)$$

将其写成增广拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L = & \sum_{v=1}^V \|\mathbf{S}^{(v)}\|_* - \lambda_3 \text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T) + \lambda_1 \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}_W^{(v)} \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}) + \\ & \lambda_2 \|\mathbf{E}^{(v)}\|_1 + \alpha \|\mathbf{U} \mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{v=1}^V (\|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{S}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_1}{\mu}\|_F^2 + \|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{W}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_2}{\mu}\|_F^2 + \\ & \|\mathbf{Y}^{(v)} - \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_3}{\mu}\|_F^2) - \sum_{v=1}^V (\psi^{(v)})^T (\mathbf{W}^{(v)} \mathbf{1} - \mathbf{1}), \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ 与 $\psi^{(v)}$ 为拉格朗日乘子, μ 为拉格朗日参数。对于待优化的变量, 本文采用逐变量优化的策略, 即先固定其余变量, 仅针对其中一个变量进行更新优化。具体的优化过程如下所示。

4.1. 更新变量 $\mathbf{Z}^{(v)}$

固定 $\mathbf{S}^{(v)}$, $\mathbf{W}^{(v)}$, $\mathbf{E}^{(v)}$, $\mathbf{F}^{(v)}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{M}$, 关于 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 的子问题可以写成以下形式:

$$\min_{\mathbf{Z}^{(v)}} \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{S}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_1}{\mu}\|_F^2 + \|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{W}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_2}{\mu}\|_F^2 + \|\mathbf{Y}^{(v)} - \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_3}{\mu}\|_F^2), \quad (8)$$

对 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 求偏导并令导数为零即可求得其解:

$$\mathbf{Z}^{(v)} = (2\mathbf{I} + (\mathbf{Y}^{(v)})^T \mathbf{Y}^{(v)})^{-1} (\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 + (\mathbf{Y}^{(v)})^T \mathbf{G}_1), \quad (9)$$

其中, $\mathbf{G}_1 = \mathbf{Y}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_3}{\mu}$, $\mathbf{G}_2 = \mathbf{S}^{(v)} - \frac{\mathbf{C}_1}{\mu}$, $\mathbf{G}_3 = \mathbf{W}^{(v)} - \frac{\mathbf{C}_2}{\mu}$.

4.2. 更新变量 $\mathbf{S}^{(v)}$

固定 $\mathbf{Z}^{(v)}$, $\mathbf{W}^{(v)}$, $\mathbf{E}^{(v)}$, $\mathbf{F}^{(v)}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{M}$, 关于 $\mathbf{S}^{(v)}$ 的子问题可以写成以下形式:

$$\min_{\mathbf{S}^{(v)}} \|\mathbf{S}^{(v)}\|_* + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{S}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_1}{\mu}\|_F^2, \quad (10)$$

令 $\mathbf{A} = \mathbf{Z}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_1}{\mu}$, 则上述问题可利用奇异值阈值 (SVT) 收缩算子 [16] 求得闭式解。

4.3. 更新变量 $\mathbf{W}^{(v)}$

固定 $\mathbf{Z}^{(v)}$, $\mathbf{S}^{(v)}$, $\mathbf{E}^{(v)}$, $\mathbf{F}^{(v)}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{M}$, 关于 $\mathbf{W}^{(v)}$ 的子问题可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}^{(v)}} \quad & \lambda_1 \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}_W^{(v)} \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{W}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_2}{\mu}\|_F^2 - (\boldsymbol{\psi}^{(v)})^T (\mathbf{W}^{(v)} \mathbf{1} - \mathbf{1}), \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \mathbf{W}^{(v)} \leq \mathbf{1}, \mathbf{W}_{ii}^{(v)} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}$, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Z}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_2}{\mu}$, 并记 $[\mathbf{H}]_{i,j} = \|[\mathbf{Q}_1]_{i,\cdot} - [\mathbf{Q}_1]_{\cdot,j}\|_2^2$, 将上述问题按行分解为独立子问题后, 结合行和约束, 可推导出 $\mathbf{W}^{(v)}$ 的闭式解为:

$$\mathbf{W}_{i,j}^{(v)} = \begin{cases} 0, & j = i \\ [\mathbf{K}]_{i,j} + \frac{(1 - \sum_{j \neq i} [\mathbf{K}]_{i,j})}{n_v - 1}, & j \neq i \end{cases} \quad (12)$$

其中, $[\mathbf{K}]_{i,j} = [\mathbf{Q}_2]_{i,j} - \frac{\lambda_1}{2\mu} [\mathbf{H}]_{i,j}$.

4.4. 更新变量 $\mathbf{E}^{(v)}$

固定 $\mathbf{Z}^{(v)}$, $\mathbf{W}^{(v)}$, $\mathbf{S}^{(v)}$, $\mathbf{F}^{(v)}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{M}$, 关于 $\mathbf{E}^{(v)}$ 的子问题可以写成以下形式:

$$\min_{\mathbf{E}^{(v)}} \lambda_2 \|\mathbf{E}^{(v)}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Y}^{(v)} - \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{E}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_3}{\mu}\|_F^2, \quad (13)$$

记 $\mathbf{P} = \mathbf{Y}^{(v)} - \mathbf{Y}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \frac{\mathbf{C}_3}{\mu}$, $\tau = \frac{\lambda_2}{\mu}$, 上述问题即为标准的稀疏优化问题 [17], 可求得闭式解。

4.5. 更新变量 $\mathbf{F}^{(v)}$

固定 $\mathbf{Z}^{(v)}$, $\mathbf{W}^{(v)}$, $\mathbf{S}^{(v)}$, $\mathbf{E}^{(v)}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{M}$, 关于 $\mathbf{F}^{(v)}$ 的子问题可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}^{(v)}} \quad & -\lambda_3 \text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)} (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T) + \lambda_1 \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}_W^{(v)} \mathbf{G}^{(v)} \mathbf{F}^{(v)}) \\ \text{s.t.} \quad & (\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{F}^{(v)} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (14)$$

令 $\mathbf{R} = \lambda_3 \mathbf{U} \mathbf{U}^T - \lambda_1 (\mathbf{G}^{(v)})^T \mathbf{L}_W^{(v)} \mathbf{G}^{(v)}$, 应用迹的相关性质, 上述目标函数可等价地表示为:

$$\max_{\mathbf{F}^{(v)}} \text{Tr}((\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{R} \mathbf{F}^{(v)}), \quad (15)$$

此子问题的最优解 $\mathbf{F}^{(v)}$ 可通过取矩阵 $\mathbf{R}$ 的前 c 个最大特征值所对应的特征向量得到。

4.6. 更新变量 $\mathbf{U}$

固定 $\mathbf{Z}^{(v)}$, $\mathbf{W}^{(v)}$, $\mathbf{S}^{(v)}$, $\mathbf{E}^{(v)}$, $\mathbf{F}^{(v)}$, $\mathbf{M}$, 关于 $\mathbf{U}$ 的子问题可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}} \quad & \sum_{v=1}^V -\lambda_3 \text{Tr}(\mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{F}^{(v)})^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T) + \alpha \|\mathbf{U} \mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (16)$$

将后一项展开为迹的形式, 并结合迹的性质将两项合并。令 $\mathbf{T} = 2\alpha \mathbf{M} + \sum_{v=1}^V \lambda_3 \mathbf{F}^{(v)}(\mathbf{F}^{(v)})^T$, 则上述目标函数可等价表示为:

$$\max_{\mathbf{U}} \text{Tr}(\mathbf{U}^T \mathbf{T} \mathbf{U}), \quad (17)$$

因此, $\mathbf{U}$ 的最优解由矩阵 $\mathbf{T}$ 的前 c 个最大特征值对应的特征向量所构成。

4.7. 更新变量 $\mathbf{M}$

固定其他变量后, 关于 $\mathbf{M}$ 的子问题仅包含一项, 即

$$\min_{\mathbf{M}} \alpha \|\mathbf{U} \mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2 \quad \text{s.t.} \|\mathbf{M}_{i,\cdot}\|_2^2 = 1, 1 \leq i \leq n, \quad (18)$$

采用逐元素求解的策略, 并结合约束条件, 可推导出 $[\mathbf{M}]_{i,j}$ 的闭式解为:

$$\mathbf{M}_{i,j} = \sqrt{\frac{[\mathbf{U} \mathbf{U}^T]_{i,j}^2}{\sum_r [\mathbf{U} \mathbf{U}^T]_{i,r}^2}}. \quad (19)$$

在依次更新上述各变量之后, 进一步更新拉格朗日乘子及参数, 并判断算法是否满足收敛条件。完整的优化求解流程如算法1所示。算法收敛后, 根据最终输出的全局共识表示矩阵 $\mathbf{U}$ 执行 K-means 聚类, 即可获得数据集最终的划分结果。

4.8. 复杂性分析

IMSC-AGL 模型的计算复杂度主要来源于变量 $\mathbf{Z}^{(v)}$ 的矩阵乘法、变量 $\mathbf{S}^{(v)}$ 的奇异值分解以及变量 $\mathbf{F}^{(v)}$ 和 $\mathbf{U}$ 的特征值分解, 其整体复杂度为 $O\left(\tau \left(kn^3 + n^3 + \sum_{v=1}^k n_v^3\right)\right)$, 其中 τ 为迭代次数, k 为视图数, n 为样本总数, n_v 为第 v 个视图中未缺失样本数。而我们的模型只新增了一项 $\alpha \|\mathbf{U} \mathbf{U}^T - \mathbf{M}\|_F^2$, 只涉及到变量 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{U}$ 的更新, 对于变量 $\mathbf{U}$ 的更新并没有增加额外的高阶计算负担; 对于变量 $\mathbf{M}$ 的更新, 在求解时只需计算矩阵乘法 $\mathbf{U} \mathbf{U}^T$, 计算复杂度为 $O(n^2 c)$, 由于聚类数 $c \ll n$, 该复杂度远低于 $O(n^3)$, 同样未增加额外的高阶计算负担。综上, 本文改进模型的总计算复杂度仍为 $O\left(\tau \left(kn^3 + n^3 + \sum_{v=1}^k n_v^3\right)\right)$, 与原始模型保持在同一数量级, 这表明所提出的改进在提升聚类性能的同时并未牺牲计算效率。

Algorithm 1 优化过程

输入: 不完整多视图数据 $\mathbf{X}^{(v)}$, 缺失索引矩阵 $\mathbf{G}^{(v)}$, 视图数 v , 类别数 c , 参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha$, 最大迭代次数 500, $\mu = 0.01$, $\rho = 1.1$, $\tau = 10^{-6}$ 。

初始化: 利用每个视图的 k -近邻图初始化 $\mathbf{Z}^{(v)}$, 随后构建拉普拉斯矩阵并进行特征值分解来初始化 $\mathbf{F}^{(v)}$, 利用(17)初始化 $\mathbf{U}$, $\mathbf{M}$ 初始化为单位阵, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ 初始化为零矩阵。

迭代开始

对每个视图

- 1: 利用公式 (9) 更新变量 $\mathbf{Z}^{(v)}$,
- 2: 利用公式 (12) 更新变量 $\mathbf{W}^{(v)}$,
- 3: 利用公式 (10) 更新变量 $\mathbf{S}^{(v)}$,
- 4: 利用公式 (15) 更新变量 $\mathbf{F}^{(v)}$,
- 5: 利用公式 (13) 更新变量 $\mathbf{E}^{(v)}$,
- 6: 更新拉格朗日乘子 $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$.

对整体

- 7: 利用公式 (17) 更新变量 $\mathbf{U}$,
- 8: 利用公式 (19) 更新变量 $\mathbf{M}$,
- 9: 更新拉格朗日参数 μ

直至同时满足:

$$\|\mathbf{Y}_v - \mathbf{Y}_v \mathbf{Z}_v - \mathbf{E}_v\|_\infty < \tau, \|\mathbf{Z}_v - \mathbf{S}_v\|_\infty < \tau, \|\mathbf{Z}_v - \mathbf{W}_v\|_\infty < \tau, \|\mathbf{W}_v \mathbf{1} - \mathbf{1}\|_\infty < \tau$$

输出: $\mathbf{U}$

5. 实验

5.1. 数据集

为评估所提算法的性能, 我们在3个多视图数据集上开展实验, 并在每个数据集中设置不同的缺失率, 以考察其对聚类效果的影响。所选数据集分别为MSRCV1、Reuters和Yale, 具体描述如下:

(1) MSRCV1: 该数据集包含6个视图、7个类别, 共210 张彩色图像, 每幅图像提取多种手工特征作为不同视图。(2) Reuters: 该数据集包含5个视图、6个类别, 共600篇新闻文档。5个视图分别对应同一篇新闻的英语、法语、德语、意大利语和西班牙语版本, 各视图的特征维度均较高。(3) Yale: 该数据集包含15个人、共165张人脸图像, 每个人对应11张图像。根据不同光照条件、表情变化和拍摄姿态所对应的特征, 构建了三视图数据集。

上述数据集的详细信息汇总于表 1。为模拟真实场景中多视图数据存在缺失的情况, 我们在完整的多视图数据基础上构造不完整版本, 分别生成缺失率为10%、20%、30% 和40%的不完整多视图数据。

Table 1. Statistics of the datasets

表 1. 数据集信息统计

数据集	视图数	类别数	样本数	各个视图的特征维度
MSRCV1	6	7	210	1302 / 48 / 512 / 100 / 256 / 210
Reuters	5	6	600	21531 / 24892 / 34251 / 15506 / 11547
Yale	3	15	165	4096 / 3304 / 6750

5.2. 对比方法

我们选取的7种对比方法, 具体介绍如下:

(1) BSV [18]: 通过将每个视图中缺失样本做均值填充的处理, 随后独立地对所有视图执行K-means 聚类, 并报告最佳聚类结果。(2) Concat [10]: 与BSV算法类似, 该算法对缺失样本的处理方式同样是采用均值填充, 随后将所有视图连接成一个长维的单一视图, 然后执行K-means聚类来获得聚类结果。(3) DAIMC [8]: 该方法基于加权半非负矩阵分解框架, 利用样本对齐信息为所有视图学习统一的潜在表示, 同时建立共识基矩阵以抑制缺失样本的干扰。(4) PIC [19]: 该方法利用矩阵补全技术重构完整相似度矩阵, 将数据缺失问题迁移至相似度层面, 同时从理论上建立了扰动风险界与多视图融合质量之间的关联, 并以此为依据指导各视图的融合策略。(5) IMG [10]: 通过将数据投影至一个完整的隐空间, 获得完备的数据表示; 同时引入图拉普拉斯项, 在不完整样本间构建跨视图的结构化关联。(6) GPMVC [9]: 该方法以非负矩阵分解为基础, 将原有的双视图PVC算法扩展至多视图场景, 并通过引入视图特定的图拉普拉斯正则化来保留各视图内部的数据几何结构。(7) IMSC_AGL [11]: 利用低秩表示为每个视图的未缺失样本构建图结构并将其拓展为覆盖全部样本的完整图, 随后通过谱约束获取各视图的低维表示, 并引入协同正则化项学习所有视图的公共样本表示。

本文采用三个评价指标来评估各个算法的聚类性能, 分别为准确率(ACC), 归一化互信息(NMI)和召回率(Recall) [20]。此外, 为保证公平性, 对于同一个数据集, 我们在每种缺失率下对所有的算法均固定相同的初始中心进行计算, 统计各个数据集在缺失率为10%, 20%, 30%, 40%时的各项指标值, 并计算整体缺失的均值与方差进行对比分析。

5.3. 实验结果及分析

表 2~4 展示了MSRCV1, Yale与Reuters这三个数据集在缺失率为10%, 20%, 30%与40%的情况下各个指标的整体均值与方差, 其中加粗的值所有方法在当前指标下的最优值, 加下划线的值为所有方法在当前指标下的次优值。图 1描述了三个数据集上所有方法在不同缺失率下对应的ACC值变化情况。

Table 2. Overall mean and variance of ACC for each algorithm on three datasets under four missing rates

表 2. 各算法在三个数据集上于四种缺失率下的ACC总体均值与方差

算法	MSRCV1	Yale	Reuters
BSV	0.642857(± 0.003159)	0.601515(± 0.006988)	0.419583(± 0.017175)
Concat	0.680952(± 0.005941)	0.459091(± 0.00356)	0.36875(± 0.032369)
DAIMC	0.805952(± 0.001729)	0.65(± 0.000474)	0.388333(± 0.004924)
PIC	0.85(± 0.00158)	0.739394(± 0.001053)	0.43(± 0.0036)
IMSC_AGL	0.898810(± 0.000565)	0.65(± 0.027141)	0.497917(± 0.001075)
IMG	0.629762(± 0.013717)	0.556061(± 0.009021)	0.496667(± 0.000346)
GPMVC	0.759524(± 0.002094)	0.612121(± 0.005265)	0.229167(± 0.000019)
Ours	0.933333(± 0.000257)	0.746970(± 0.000548)	0.60375(± 0.000147)

Table 3. Overall mean and variance of NMI for each algorithm on three datasets under four missing rates
表 3. 各算法在三个数据集上于四种缺失率下的NMI总体均值与方差

算法	MSRCV1	Yale	Reuters
BSV	0.534083(± 0.008308)	0.587830(± 0.005128)	0.229438(± 0.014243)
Concat	0.577520(± 0.009979)	0.453324(± 0.002892)	0.187481(± 0.025948)
DAIMC	0.701844(± 0.001803)	0.656068(± 0.000842)	0.205016(± 0.00406)
PIC	0.758608(± 0.002083)	0.717877(± 0.000283)	0.485740(± 0.006546)
IMSC_AGL	0.815480(± 0.000974)	0.664139(± 0.014665)	0.317402(± 0.001002)
IMG	0.493688(± 0.00908)	0.590965(± 0.004748)	0.315065(± 0.000513)
GPMVC	0.669176(± 0.00099)	0.627524(± 0.00207)	0.019113(± 0.000013)
Ours	0.866860(± 0.001049)	0.716059(± 0.000656)	0.393718(± 0.00042)

Table 4. Overall mean and variance of Recall for each algorithm on three datasets under four missing rates
表 4. 各算法在三个数据集上于四种缺失率下的Recall总体均值与方差

算法	MSRCV1	Yale	Reuters
BSV	0.450689(± 0.012294)	0.275527(± 0.014414)	0.259024(± 0.004387)
Concat	0.482162(± 0.016718)	0.140321(± 0.001172)	0.254383(± 0.010219)
DAIMC	0.653082(± 0.004006)	0.440551(± 0.000929)	0.251005(± 0.001326)
PIC	0.735514(± 0.002546)	0.519161(± 0.001266)	0.470762(± 0.006638)
IMSC_AGL	0.800491(± 0.001802)	0.447115(± 0.020326)	0.335789(± 0.00055)
IMG	0.475839(± 0.009412)	0.348990(± 0.006997)	0.310492(± 0.000085)
GPMVC	0.611885(± 0.001287)	0.395676(± 0.003607)	0.169735(± 0.000004)
Ours	0.865496(± 0.00091)	0.533594(± 0.000768)	0.417817(± 0.000033)

从表 2 可以看出, 本文改进算法在三个数据集上的 ACC 总体均值与方差均显著优于其他对比算法, 充分验证了引入成对约束项的有效性。次优结果大多由 IMSC_AGL 算法取得, 表明其将图学习与谱约束相融合的基本框架是合理且有效的。由表 3 与表 4 可知, 本文改进算法在三个数据集上的 NMI 与 Recall 总体均值与方差亦整体优于对比算法, 尽管个别最优值由 PIC 算法获得。PIC 同样采用补全策略构建覆盖全样本的相似度矩阵, 这从侧面印证了本文所采用的算法框架在处理不完整多视图数据时具有较好的适用性与有效性。

从图 1 可以观察到, 本文改进算法在各个缺失率下的聚类准确性整体优于其他对比算法。即使在缺失率高达 40% 的情况下, 其准确性衰减程度仍相对较小, 表明该算法具有良好的稳定性。

5.4. 参数敏感性分析

对于模型中的各个参数的取值, 本文采取如下策略: 先给定候选值集合 $\{10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^4, 10^5\}$ 。在固定 λ_1, λ_2 的情况下, 对 λ_3, α 采用上述候选集中的不同参数组合观察聚类效果, 确定 λ_3, α 的最佳组合; 随后固定 λ_3, α , 对 λ_1, λ_2 采用同样方式获取。同时将本文引入的成对约束项对应的参数的敏感性分析进行可视化, 结果如图 2 所示。从图中可以参数, 参数 α 在 $[10^0, 10^5]$ 的范围内算法的准确率较好, 尤其是在取 10^0 附近时效果最佳。

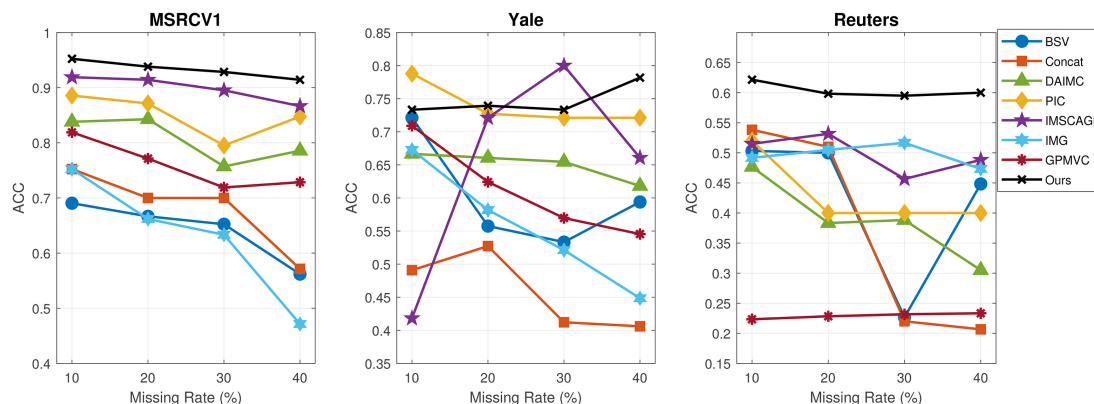


Figure 1. Variation curves of ACC for each algorithm on three datasets under different missing rates

图 1. 各算法在三个数据集上不同缺失率下的ACC值变化曲线

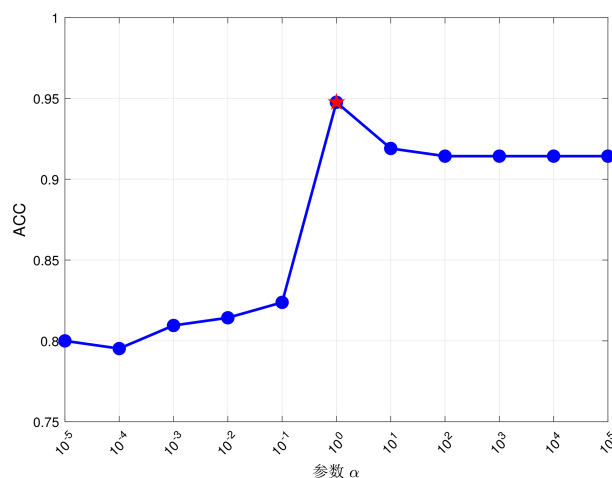


Figure 2. Sensitivity analysis of parameter α on the MSRCV1 dataset with 10% missing rate

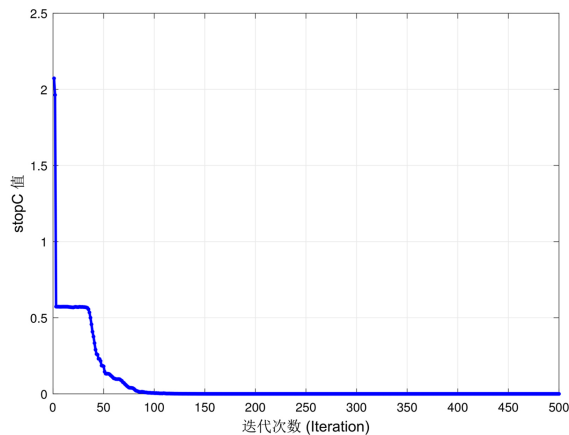
图 2. 在MSRCV1缺失率为10%数据集上参数敏感性分析

5.5. 收敛性分析与运行时间

为探究算法的收敛情况与运行时间,我们在MSRCV1数据集上缺失率为10%的情况下进行了实验,通过计算stopc值来判断算法的收敛性,其中stopc值得计算方式为:

$$\text{stopc} = \max \{ \|\mathbf{Y}_v - \mathbf{Y}_v \mathbf{Z}_v - \mathbf{E}_v\|_\infty, \|\mathbf{Z}_v - \mathbf{S}_v\|_\infty, \|\mathbf{Z}_v - \mathbf{W}_v\|_\infty, \|\mathbf{W}_v \mathbf{1} - \mathbf{1}\|_\infty \}. \quad (20)$$

从图 3中可以观察到,算法在迭代0至50次时stopc值下降幅度较大,在迭代100左右时收敛并趋于稳定。此外,通过理论解释说明了改进算法并未增加额外的计算负担,为验证这一点,我们比较了原始得IMSC_AGL算法与改进算法迭代一次所需要得时间成本,其结果如表 3所示,可以看出,两者单次迭代时间十分接近,从而验证了上述理论分析的正确性。



(a) 在MSRCV1缺失率为10%数据集上的收敛性情况

算法	IMSCAGL	Ours
时间 (秒)	0.4069	0.3363

(b) 各算法运行时间对比 (单位: 秒)

Figure 3. Convergence on the MSRCV1 dataset with 10% missing rate and comparison of running time of each algorithm

图 3. 在MSRCV1缺失率为10%数据集上的收敛性情况与各算法运行时间对比

5.6. 消融实验

为探究本文在原始IMSC_AGL算法基础上新增的结构化成对约束项是否有助于提升聚类性能,我们在MSRCV1数据集上设计了相应的消融实验。从表5可以看出,在引入成对约束项后,改进算法在MSRCV1数据集上四种缺失率下的各评价指标均较原始算法有明显提升,从而验证了该约束项在增强全局共识表示判别性方面的有效性。

Table 5. Comparison of ablation experiment results on the MSRCV1 dataset

表 5. 在MSRCV1数据集上消融实验结果对比

缺失率	IMSCAGL			Ours		
	ACC	NMI	Recall	ACC	NMI	Recall
10%	0.919048	0.838574	0.834461	0.952381	0.902968	0.901565
20%	0.914286	0.839151	0.830844	0.938095	0.875885	0.875448
30%	0.895238	0.811273	0.793457	0.928571	0.863591	0.854133
40%	0.866667	0.772924	0.743201	0.914286	0.824997	0.830839

6. 总结

本文针对不完整多视图聚类问题,在IMSC_AGL算法的基础上提出了一种改进模型。通过对全局共识表示矩阵引入结构化成对约束项,并借助辅助变量学习具有块对角结构的判别性共识表示,有效弥补了原始算法中共识表示判别能力不足的问题。同时,所引入的辅助变量在优化过程中不依赖于各视图的聚类指示矩阵,使得模型在存在缺失率的场景下仍能保持较为准确的引导,显著增强了算法的鲁棒性。理论分析表明,本文改进未引入额外的高阶计算负担。在多个不完整多视图数据集上的实验验证了所提方法在聚类性能上的优越性,相较于IMSC_AGL及其他对比方法均取得了显著的性能提升。

参考文献

- [1] Gao, Q., Li, F., Wang, Q., Gao, X. and Tao, D. (2025) Manifold Based Multi-View k -Means. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **47**, 3175-3182. <https://doi.org/10.1109/tpami.2024.3521022>
- [2] Sadjadi, F., Jamshidi, M. and Asadi, A. (2025) Multi-View Clustering via Consensus Coefficient Matrix and Separate Segmentation Matrices. *Journal of Information and Telecommunication*, **9**, 525-542. <https://doi.org/10.1080/24751839.2025.2479898>
- [3] Zhang, X., Guo, X. and Pan, J. (2024) A New Nonconvex Multi-View Subspace Clustering via Learning a Clean Low-Rank Representation Tensor. *Inverse Problems*, **40**, Article ID: 125007. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ad847a>
- [4] Khalafaoui, Y., Matei, B., Lovisetto, M. and Grozavu, N. (2026) Deep Matrix Factorization with Adaptive Weights for Multi-View Clustering. *Pattern Recognition*, **170**, Article ID: 112027. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2025.112027>
- [5] Liu, J., Liu, X., Zhang, Y., Zhang, P., Tu, W., Wang, S., *et al.* (2021). Self-Representation Subspace Clustering for Incomplete Multi-View Data. *Proceedings of the 29th ACM International Conference on Multimedia*, 20-24 October 2021, 2726-2734. <https://doi.org/10.1145/3474085.3475379>
- [6] Wen, J., Zhang, Z., Zhang, Z., Fei, L. and Wang, M. (2021) Generalized Incomplete Multiview Clustering with Flexible Locality Structure Diffusion. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **51**, 101-114. <https://doi.org/10.1109/tcyb.2020.2987164>
- [7] Wen, J., Zhang, Z., Xu, Y., Zhang, B., Fei, L. and Liu, H. (2019) Unified Embedding Alignment with Missing Views Inferring for Incomplete Multi-View Clustering. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, **33**, 5393-5400. <https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33015393>
- [8] Hu, M. and Chen, S. (2018) Doubly Aligned Incomplete Multi-View Clustering. *Proceedings of the Twenty-Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Stockholm, 13-19 July 2018, 2262-2268. <https://doi.org/10.24963/ijcai.2018/313>
- [9] Rai, N., Negi, S., Chaudhury, S. and Deshmukh, O. (2016) Partial Multi-View Clustering Using Graph Regularized NMF. *2016 23rd International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, Cancun, 4-8 December 2016, 2192-2197. <https://doi.org/10.1109/icpr.2016.7899961>
- [10] Zhao, H., Liu, H. and Fu, Y. (2016) Incomplete Multi-Modal Visual Data Grouping. *Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence 2016*, New York, 9-15 July 2016, 2392-23983.
- [11] Wen, J., Xu, Y. and Liu, H. (2020) Incomplete Multiview Spectral Clustering with Adaptive Graph Learning. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**, 1418-1429. <https://doi.org/10.1109/tcyb.2018.2884715>

-
- [12] Zhong, G. and Pun, C. (2023) Simultaneous Laplacian Embedding and Subspace Clustering for Incomplete Multi-View Data. *Knowledge-Based Systems*, **262**, Article ID:110244. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2022.110244>
 - [13] Gallier, J.H. (2013) Notes on Elementary Spectral Graph Theory. Applications to Graph Clustering Using Normalized Cuts. arXiv:1311.2492.
 - [14] Liang, J., Liu, X., Bai, L., Cao, F. and Wang, D. (2022) Incomplete Multi-View Clustering via Local and Global Co-Regularization. *Science China Information Sciences*, **65**, Article No. 152105. <https://doi.org/10.1007/s11432-020-3369-8>
 - [15] Wang, Y., Li, A., Lu, G., Ding, W. and Zhou, H. (2025) Nonconvex Low-Rank Tensor Approximation with Denoising Model for Multi-View Subspace Clustering. *Applied Intelligence*, **55**, Article No. 1056. <https://doi.org/10.1007/s10489-025-06905-4>
 - [16] Wen, J., Han, N., Fang, X., Fei, L., Yan, K. and Zhan, S. (2019) Low-Rank Preserving Projection via Graph Regularized Reconstruction. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 1279-1291. <https://doi.org/10.1109/tyb.2018.2799862>
 - [17] Wen, J., Fang, X., Cui, J., Fei, L., Yan, K., Chen, Y., *et al.* (2019) Robust Sparse Linear Discriminant Analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, **29**, 390-403. <https://doi.org/10.1109/tcsvt.2018.2799214>
 - [18] Shao, W., He, L. and Yu, P.S. (2015) Multiple Incomplete Views Clustering via Weighted Nonnegative Matrix Factorization with $L_{2,1}$ Regularization. In: Appice, A., Rodrigues, P., Santos Costa, V., Soares, C., Gama, J. and Jorge, A., Eds., *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, Springer, 318-334. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23528-8_20
 - [19] Wang, H., Zong, L., Liu, B., Yang, Y. and Zhou, W. (2019) Spectral Perturbation Meets Incomplete Multi-View Data. *Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Macao, 10-16 August 2019, 3677-3683. <https://doi.org/10.24963/ijcai.2019/510>
 - [20] Sokolova, M. and Lapalme, G. (2009) A Systematic Analysis of Performance Measures for Classification Tasks. *Information Processing Management*, **45**, 427-437. <https://doi.org/10.1016/j.ipm.2009.03.002>