

局部度条件下的可去树

林雨菲, 洪艳梅, 刘清海*

福州大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2026年9月28日; 录用日期: 2026年10月21日; 发布日期: 2026年10月29日

摘要

设 G 为图, $\rho_G(v) = \nu(G[N_G(v)])$, ν 为匹配数。本文证明: 对 $k \geq 1$ 、 $m \geq 2$, 若 k -连通图 G 对所有顶点 v 满足 $d_G(v) - \rho_G(v) \geq 2k + 3m - 4$, 则 G 含与任意给定 m 阶树同构的可去子树, 删去后仍 k -连通, 这恢复了Chu等的无三角形界; 当邻域匹配数不超过 r 时, 给出充分条件 $\delta(G) \geq 2k + 3m + r - 4$, 用Liu等的高连通三元组及顶点依赖匹配引理证明。

关键词

可去子树, 顶点连通度, 匹配, 禁用子图

Connectivity Keeping Trees under a Local Degree Condition

Yufei Lin, Yanmei Hong, Qinghai Liu*

School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: September 28, 2026; accepted: October 21, 2026; published: October 29, 2026

Abstract

For a graph G , let $\rho_G(v) = \nu(G[N_G(v)])$, where ν is the matching number. We prove

* 通讯作者。

that for $k \geq 1$, $m \geq 2$, if a k -connected graph G satisfies $d_G(v) - \rho_G(v) \geq 2k + 3m - 4$ for all vertices v , then G contains a connectivity keeping subtree isomorphic to any prescribed tree of order m , whose deletion leaves G k -connected. This recovers the triangle-free bound of Chu et al.; when all neighborhood matching numbers are at most r , we also obtain the sufficient condition $\delta(G) \geq 2k + 3m + r - 4$. The proof uses the highly connected triples of Liu et al. and a vertex-dependent matching lemma.

Keywords

Connectivity Keeping Subtree, Vertex Connectivity, Matching, Forbidden Subgraph

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文只考虑有限、简单、无向图。设 G 为 k -连通图, T 为树, T' 为 G 中与 T 同构的子树。若 $G - V(T')$ 是 k -连通的, 则称 T' 为可去子树。Mader [1]猜想: 对任意 m 阶树 T , 只要

$$\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{3k}{2} \right\rfloor + m - 1,$$

则 G 含有与 T 同构的可去子树。Hong和Liu [2]证明了该猜想在 $k \leq 3$ 时成立。对于一般的 k , Liu、Ying 和Hong [3]利用高连通三元组证明了 $\delta(G) \geq 3k + 4m - 6$ 是充分条件。Chu、Fujita、Park 和Ryu [4]在无三角形图中将这一界改进到 $2k + 3m - 4$ 。Hasunuma [5]则证明了该猜想对cograph成立。此外, Hong、Liu、Lu 和Ye [6]在2-连通图中研究了毛虫树和蜘蛛树的连通性保持嵌入; Liu、Liu 和Hong [7]进一步在3-连通或3-边连通图中验证了相应的结果。最近, Ma、Liu、Zhang 和Hong [8]证明了Mader 猜想对路径加一个悬挂点得到的树类成立。此外, Luo、Tian 和Wu [9]研究了二部图中路径的连通性保持问题; Hasunuma [10]则将结果推广到边连通性的情形。

记 $\nu(H)$ 为 H 的匹配数, 并令

$$\rho_G(v) = \nu(G[N_G(v)]), \quad \mu_{\text{loc}}(G) = \max_{v \in V(G)} \rho_G(v).$$

这里 $N_G(v)$ 表示开邻域, 匹配和子树均不要求是诱导的。于是 $\mu_{\text{loc}}(G) = 0$ 当且仅当 G 不含三角

形。更一般地, $\mu_{\text{loc}}(G) \leq r$ 表示 G 中不存在这样的子图: 它由 $r+1$ 个三角形组成, 这些三角形共用一个顶点, 除公共顶点外, 其余顶点两两不交。这里并不要求该子图是诱导的。

本文之所以采用 $d_G(v) - \rho_G(v)$ 作为度量, 是因为 $\rho_G(v)$ 反映了 v 的邻域内部的边数。当 v 的邻居之间存在较多不相交的边时, 这些边在一定程度上“占用”了 v 的度: 它们使邻居彼此关联, 使得 v 的度无法完全用于连接外部顶点。因此, $d_G(v) - \rho_G(v)$ 可以看作 v 的一个有效度, 兼顾了顶点的度数与邻域的稀疏程度。特别地, 当 G 不含三角形时, $\rho_G(v) = 0$, 此时条件 $d_G(v) - \rho_G(v) \geq 2k + 3m - 4$ 恰好退化为无三角形情形下的已知条件 $d_G(v) \geq 2k + 3m - 4$ 。这说明本文的局部条件是无三角形条件的一种自然推广。

定理1 设 $k \geq 1$ 、 $m \geq 2$ 为整数, T 为 m 阶树。若 G 是 k -连通的, 且对每个 $v \in V(G)$ 都有

$$d_G(v) - \rho_G(v) \geq 2k + 3m - 4,$$

则 G 包含与 T 同构的子树 T' , 使得 $G - V(T')$ 是 k -连通的。

推论1 设 $k \geq 1$ 、 $m \geq 2$ 、 $r \geq 0$ 为整数。若 k -连通图 G 满足 $\mu_{\text{loc}}(G) \leq r$ 且 $\delta(G) \geq 2k + 3m + r - 4$, 则 G 含有与任意给定 m 阶树同构的可去子树。

证明 对任意顶点 v , 都有 $d_G(v) - \rho_G(v) \geq \delta(G) - r \geq 2k + 3m - 4$ 。 □

当 $r = 0$ 时, 推论 1 即为 [4] 的无三角形结果; 当 $r = 1$ 时, 对应的界是 $2k + 3m - 3$ 。只要 $r < k + m - 2$, 这一结果就优于 [3] 的一般充分条件。至于 $k \leq 3$ 的情形, 已被 [2] 中更强的结论所覆盖。定理 1 允许度数较大的顶点具有较大的邻域匹配数, 因此严格强于条件 $\delta(G) - \mu_{\text{loc}}(G) \geq 2k + 3m - 4$, 具体例子见第 3 节。

2. 证明

设 H 为图, u, v 为其中两个不同顶点。用 $p_H(u, v)$ 表示内部顶点不相交的 $u-v$ 路径的最大条数。下面沿用 [3] 的定义和存在性引理。在集合运算中, 分支也用来表示其顶点集。

定义1 (Liu, Ying and Hong) 图 G 的一个 p -连通三元组是指三元组 (S_1, S_2, F) , 满足: $S_1, S_2 \subseteq V(G)$ 且不相交, $|S_1 \cup S_2| \leq 2p - 1$; F 是 $G - (S_1 \cup S_2)$ 的一个连通分支, 且至少有两个顶点; S_1 中每个顶点在 F 中至多有 p 个邻点; 并且

$$p_{G[S_1 \cup S_2 \cup F]}(u, v) \geq p + 1$$

对任意两个不同顶点 $u, v \in S_2 \cup F$ 成立。

引理1 (引理2.1 [3]) 设 $p \geq 1$, $\delta(G) \geq 2p$ 。若 $S_0 \subseteq V(G)$ 且 $|S_0| \leq 2p - 1$, 则 $G - S_0$ 的每个连通分支 C 都含有 G 的某个 p -连通三元组的第三成员 F 。

下面给出一个关于匹配的简单结论。

引理2 若 $\nu(J) \leq r$, 则 J 中度数至少为 $2r + 1$ 的顶点至多有 r 个。

证明 反之, 可取 $r + 1$ 个这样的顶点组成集合 X 。由于每个顶点在 X 外至少有 $r + 1$ 个邻点, 可将 X 中所有顶点贪心地匹配到 X 外的不同顶点, 从而得到大小为 $r + 1$ 的匹配, 矛盾。□

下一个引理基于文献 [3] 中定理3.1 的断言1 的最小三元组论证, 同时推广了文献 [4] 中引理3.3 在无三角形图中的细化。

引理3 设 $p \geq 1$, 且对每个 $v \in V(G)$ 都有 $d_G(v) - \rho_G(v) \geq 2p$ 。选取 $|F|$ 最小的 p -连通三元组 (S_1, S_2, F) 。则对任意非空子集 $S \subseteq S_1$,

$$|N_G(S) \cap F| \geq |S| + 1.$$

于是 $|F| > |S_1|$, 并且存在一个从 S_1 到 F 的匹配 M , 饱和 S_1 (即 S_1 中每个顶点都在 M 中), 且 $F \setminus V(M)$ 非空。此外, $|S_2 \cup F| \geq p + 1$ 。

证明 由 $\delta(G) \geq 2p$ 及引理 1 可知所需三元组存在。令 $B = S_1 \cup S_2$ 。对任意 $v \in F$, 其全部邻点都在 $F \cup B$ 中, 因此

$$d_{G[F]}(v) \geq d_G(v) - |B| \geq \rho_G(v) + 1.$$

假设存在非空 $S \subseteq S_1$, 使得 $K = N_G(S) \cap F$ 且满足 $|K| \leq |S|$ 。若 $\emptyset \neq K \neq F$, 令

$$S_0 = (S_1 \setminus S) \cup S_2 \cup K.$$

此时 $F - K$ 的每个连通分支都是 $G - S_0$ 的连通分支, 且 $|S_0| \leq 2p - 1$ 。由引理 1 可得到第三成员更小的三元组, 矛盾。若 $K = \emptyset$, 取 $x \in F$, 改令

$$S_0 = (S_1 \setminus S) \cup S_2 \cup \{x\},$$

同理, 对 $F - x$ 的任一连通分支进行分析, 矛盾;

剩下 $K = F$ 的情形, 此时 $|F| \leq |S| \leq |B|$ 。取 $v \in F$ 使得 $\rho_G(v)$ 最小, 记 $a = \rho_G(v)$ 。由 $d_{G[F]}(v) \geq a + 1$, 对 $J = G[N_G(v)]$ 应用引理 2, 可得 v 在 F 中的邻点 u 满足 $d_J(u) \leq 2a$ 。因此

$$|N_G(u) \cap N_G(v)| \leq 2a.$$

另一方面, 由 v 的取法知 $\rho_G(u) \geq a$ 。两个邻域都落在 $B \cup F$ 中, 于是

$$\begin{aligned} 4p + 2a &\leq (2p + \rho_G(u)) + (2p + \rho_G(v)) \\ &\leq d_G(u) + d_G(v) \leq |B| + |F| + 2a \leq 4p + 2a - 2, \end{aligned}$$

矛盾。由Hall 定理即得所需匹配。当 $S_1 \neq \emptyset$ 时, 在严格不等式中取 $S = S_1$, 便得 $|F| > |S_1|$;

当 $S_1 = \emptyset$ 时, 取空匹配, 并注意 $F \neq \emptyset$ 。最后令 $q = |S_2 \cup F|$ 。由 F 中某顶点的度数可得

$$2p + 1 \leq |B| + |F| = |S_1| + q \leq 2q - 1,$$

故 $q \geq p + 1$ 。 □

定理 1 的证明 令 $p = k + m - 1$ 。此时对每个顶点 v , 都有

$$d_G(v) - \rho_G(v) \geq 2p + m - 2 \geq 2p.$$

取引理 3 中的三元组和匹配, 记 $F_M = V(M) \cap F$, $U = F \setminus F_M$ 。由引理 3 知 $U \neq \emptyset$ 。

对 $v \in U$, M 中至多有 $\rho_G(v)$ 条边的两个端点都与 v 相邻, 因为这样的边在 $G[N_G(v)]$ 中构成匹配。逐边计算 v 的邻点数, 得

$$|N_G(v) \cap (S_1 \cup F_M)| \leq |M| + \rho_G(v) = |S_1| + \rho_G(v).$$

又 $N_G(v) \subseteq F \cup S_1 \cup S_2$, 故

$$d_{G[U]}(v) \geq d_G(v) - \rho_G(v) - |S_1 \cup S_2| \geq (2p + m - 2) - (2p - 1) = m - 1.$$

于是可在 $G[U]$ 中依次嵌入 T , 得到子树 T' 。令 $R = V(T')$ 。下面沿用文献 [3] 中定理 3.1 的证明里的割论证。

思路如下: 若 $G - R$ 不是 k -连通的, 则存在一个大小不超过 $k - 1$ 的割集 A 。由三元组的高连通性, $S_2 \cup F$ 的剩余顶点必落在同一连通分支中。取另一个连通分支 C , 则 $C \cap S_1$ 满足 $|C \cap S_1| \leq |A \cap F|$; 而 $C \setminus S_1$ 若非空, 则会给出一个更小的割集, 与 G 的 k -连通性矛盾; 若 $C \subseteq S_1$, 则 C 中顶点的度数过小, 与最小度条件矛盾。具体细节如下。

反设 $G - R$ 不是 k -连通的。则存在集合 $A \subseteq V(G) \setminus R$, $|A| \leq k - 1$, 使得 $G - (A \cup R)$ 不连通。此时 $|A \cup R| \leq p$ 。由三元组性质, $S_2 \cup F$ 的剩余顶点落在同一连通分支中; 又因 $|S_2 \cup F| \geq p + 1$, 至少有一个顶点剩余。取另一个连通分支 C , 它与 $S_2 \cup F$ 不交。令

$$C_1 = C \cap S_1, \quad C_2 = C \setminus S_1, \quad A_1 = A \cap F, \quad A_2 = A \setminus F.$$

对 C_1 中每个顶点, 其所在匹配边的另一个端点属于 $F_M \cap A_1$: 该端点既不在 R 中, 也不在 C 中。于是 $|C_1| \leq |A_1|$ 。若 $C_2 \neq \emptyset$, 由于 C_2 在 F 中没有邻点, 有 $N_G(C_2) \subseteq A_2 \cup C_1$, 从而

$$|N_G(C_2)| \leq |A_2| + |C_1| \leq |A| \leq k - 1.$$

这样就把 C_2 与 F 在 G 中分离开来, 与 G 的 k -连通性矛盾。因此 $C = C_1$ 。对任意 $w \in C$, 有

$$d_G(w) \leq |C| - 1 + |A \cup R| \leq k - 2 + p < 2p \leq \delta(G),$$

矛盾;

□

3. 局部条件的适用范围

本节构造一批图, 它们满足定理 1, 但在任何取值范围内的 r 下, 都不满足推论 1 中的统一条件。固定 $k \geq 4$, $m \geq 3$, 令 $n = 2k + 3m - 4$ 。取两个不相交的完全二部图 $K_{n,n}$, 其二部划分分别为 (A_i, B_i) , $i = 1, 2$ 。在每个完全二部图中加入一个顶点 z_i , 使其与该完全二部图的所有顶点相邻。再将 A_1 中 k 个顶点与 A_2 中 k 个顶点一一合并, 记公共顶点集为 S 。不再添加其他边, 所得图记为 G 。

各类顶点的度数、邻域匹配数及差值如下:

- z_i : $d_G(v) = 2n$, $\rho_G(v) = n$, $d_G(v) - \rho_G(v) = n$;
- $v \in (A_i \setminus S) \cup B_i$: $d_G(v) = n + 1$, $\rho_G(v) = 1$, $d_G(v) - \rho_G(v) = n$;
- $v \in S$: $d_G(v) = 2n + 2$, $\rho_G(v) = 2$, $d_G(v) - \rho_G(v) = 2n$ 。

这是因为: z_i 的邻域诱导出 $K_{n,n}$; 不在 S 中的普通顶点的邻域诱导出星; S 中顶点的邻域诱导出两个不相交的星。因此

$$\min_{v \in V(G)} (d_G(v) - \rho_G(v)) = n, \quad \delta(G) - \mu_{\text{loc}}(G) = (n + 1) - n = 1.$$

因此局部条件成立, 而统一条件 $\delta(G) - \mu_{\text{loc}}(G) \geq 2k + 3m - 4$ 不成立。

此外, $\kappa(G) = k$ 。事实上, S 是一个割集; 而删去少于 k 个顶点时, 两个完全二部部分仍然连通, 并通过 S 中某个未被删去的顶点相连。每个剩余的 z_i 在其所在部分中仍有邻点。该图含有三角形, 并且对 $u \in A_1 \setminus S$, $b_i \in B_i$ 和 $s \in S$, 顶点 u, b_1, s, b_2 诱导出一条 4 个顶点的路径 (即 P_4)。因此 G 既不是无三角形图, 也不是 cograph。其最小度 $\delta(G) = 2k + 3m - 3 < 3k + 4m - 6$ 。这些例子表明本文的假设与直接比较的结果有所不同; 它们既未证明条件是最优的, 也不排除这个图族存在更简单的证明。

引理 3 之所以能采用顶点依赖的假设, 关键在于在三元组的第三成员 F 中选取使 $\rho_G(v)$ 最小的顶点; 后续的度数估计也只用到了单个顶点处的 $\rho_G(v)$ 。本文并未声称条件已达到最优。

4. 结论与展望

本文在局部度条件下证明了 k -连通图中可去子树的存在性, 所得的界为 $2k + 3m - 4$ 。该结果涵盖了无三角形图的已知界, 并通过将邻域匹配数局部化, 改进了相应的统一条件。

这一界与 Mader 猜想中的 $\lfloor 3k/2 \rfloor + m - 1$ 仍有一定差距。对于较大的 k , 本文的条件约为 $2k + 3m$ 。如何缩小这一差距, 仍有待进一步研究。

回顾定理 1 的证明, 可以看到整个论证只依赖于三元组第三成员 F 中使 $\rho_G(v)$ 最小的那个顶点, 而并未用到 F 中其余顶点的局部匹配数, 这里的条件可能还有减弱的可能性。例如, 是否可以只要在嵌入树所在的邻域中存在一个 ρ_G 较小的顶点, 而对其余顶点不作要求。

基金项目

国家自然科学基金(编号: 12671401)。

参考文献

- [1] Mader, W. (2010) Connectivity Keeping Paths in k -Connected Graphs. *Journal of Graph Theory*, **65**, 61-69. <https://doi.org/10.1002/jgt.20465>
- [2] Hong, Y. and Liu, Q. (2022) Mader's Conjecture for Graphs with Small Connectivity. *Journal of Graph Theory*, **101**, 379-388. <https://doi.org/10.1002/jgt.22831>
- [3] Liu, Q., Ying, K. and Hong, Y. (2024) Highly Connected Triples and Mader's Conjecture. *Journal of Graph Theory*, **107**, 478-484. <https://doi.org/10.1002/jgt.23144>
- [4] Chu, H., Fujita, S., Park, B. and Ryu, H. (2025) Connectivity Keeping Trees in Triangle-Free Graphs. arXiv: 2511.06622.
- [5] Hasunuma, T. (2025) Mader's Conjecture and Its Variants for Cographs. arXiv: 2511.12499.
- [6] Hong, Y., Liu, Q., Lu, C. and Ye, Q. (2021) Connectivity Keeping Caterpillars and Spiders in 2-Connected Graphs. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112236. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112236>
- [7] Liu, H., Liu, Q. and Hong, Y. (2023) Connectivity Keeping Trees in 3-Connected or 3-Edge-Connected Graphs. *Discrete Mathematics*, **346**, Article ID: 113679. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113679>
- [8] Ma, M., Liu, Q., Zhang, L. and Hong, Y. (2026) Connectivity Keeping Pendant Extensions of Paths in k -Connected Graphs and Triangle-Free Graphs. arXiv: 2610.20101.
- [9] Luo, L., Tian, Y. and Wu, L. (2022) Connectivity Keeping Paths in k -Connected Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 112788. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112788>
- [10] Hasunuma, T. (2023) Connectivity Preserving Trees in k -Connected or k -Edge-Connected Graphs. *Journal of Graph Theory*, **102**, 423-435. <https://doi.org/10.1002/jgt.22878>