Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(11), 365-373**
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511456

Hans汉斯

随机环境中非减乘积受控分枝过程的退火小值概率

李　弈*，张钰京，张家香

湘南学院数学与信息科学学院，湖南　郴州

收稿日期：2026 年 10 月 25 日；录用日期：2026 年 11 月 18 日；发布日期：2026 年 11 月 25 日

摘　要

在独立同分布随机环境、独立正整数乘积控制和无零后代条件下，研究从单个个体出发的非减分枝过程的退火小值概率。利用繁殖项分组、**Jensen** 不等式和 **Markov** 不等式建立负阶矩估计及有限代概率界，并证明当 $\pi_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 1) \in (0,1)$ 时，次指数阈值下的小值概率具有指数衰减率 $-\log \pi_1$。

关键词

随机环境，乘积受控分枝过程，小值概率，负阶矩，指数衰减率

Annealed Small Value Probabilities for Nondecreasing Multiplicatively Controlled Branching Processes in Random Environments

Yi Li*, Yujing Zhang, Jiaxiang Zhang

College of Mathematics and Information Science，Xiangnan University, Chenzhou Hunan

* 通讯作者。

文章引用: 李弈, 张钰京, 张家香. 随机环境中非减乘积受控分枝过程的退火小值概率 [J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 365-373. DOI: 10.12677/aam.2026.1511456

Received: October 25, 2026; accepted: November 18, 2025; published: November 25, 2026

Abstract

We study annealed small value probabilities for a nondecreasing branching process starting from one individual in an independent and identically distributed random environment, with independent positive-integer multiplicative control and no zero offspring. Grouping reproduction terms and applying Jensen's and Markov's inequalities yield negative-moment estimates and finite-generation probability bounds. When $\pi_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 1) \in (0,1)$, we prove that the small value probability below any subexponential threshold has exponential decay rate $-\log \pi_1$.

Keywords

Random Environment, Multiplicative Controlled Branching Process, Small Value Probability, Negative Moment, Exponential Decay Rate

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

经典分枝过程及其极限理论见 Athreya 和 Ney 的专著 [1]。随机环境分枝过程允许后代分布随代际环境变化 [2]。围绕这一模型，Hambly [3] 研究了规范化极限的分布函数与 Laplace 变换，Huang 和 Liu [4] 讨论了矩及偏差性质。

乘积控制通过随机倍数改变参与繁殖的单元数量。Dion 和 Essebbar [5] 研究了相关受控模型及其统计问题；陈祁欢和张鑫 [6] 讨论了随机环境中乘积受控分枝过程的对数矩存在性。本文考虑正整数控制与无零后代条件下的非减模型，研究对环境、控制和繁殖共同取平均后的退火概率。

小值问题既包括有限代种群的下偏差，也包括规范化极限的零点附近尾部。前者在经典分枝过程中的研究见 Fleischmann 和 Wachtel [7]，后者的分枝树方法见 Mörters 和 Ortgiese [8]。在随机环境下，Bansaye 和 Berestycki [9] 研究了下偏差，并给出了固定阈值及部分多项式阈值的小值概率指数率；Bansaye 和 Böinghoff [10] 进一步处理了允许零后代的情形。

文献 [9] 在条件均值与二阶矩一致有界的假设下，利用路径分解和环境随机游动研究指数阈值；本文采用 Jensen 不等式和负阶矩递推，给出独立乘积控制下的有限代界，并统一处理 $b_n \geq 1$、$\log b_n = o(n)$ 的次指数阈值，无须有限正阶矩或有限对数均值。相对于文献 [9] 引理 7 及其后对固定阈值和 n^a（$0 < a < 1$）的讨论，本文涵盖所有 n^d（$d > 0$）及 $\exp(n^\gamma)$（$0 < \gamma < 1$）等次指数阈值。该引理本身也不要求正阶矩，故矩条件的比较针对其指数阈值主定理。文献 [10] 允许零后代，本文则限于非减模型。

2. 模型的引入

设 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ 为独立同分布的随机环境。给定环境后，随机变量族 $\{X_{n,i} : n \geq 0,\ i \geq 1\}$ 相互独立，且对每一代 n 有

$$\mathbb{P}(X_{n,i} = j \mid \xi) = p_j(\xi_n), \qquad j \geq 1, \qquad \sum_{j \geq 1} p_j(\xi_n) = 1. \tag{1}$$

设 $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 0}$ 为独立同分布的正整数值随机变量序列，并与随机对象 $(\xi, \{X_{n,i} : n \geq 0,\ i \geq 1\})$ 独立。定义乘积受控分枝过程

$$Z_0 = 1, \qquad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{\alpha_n Z_n} X_{n,i}, \qquad n \geq 0. \tag{2}$$

其中 α_n 表示第 n 代的控制倍数。全文用 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{E}$ 表示同时对环境、控制和繁殖取平均的退火概率与期望。由于 $\alpha_n \geq 1$ 且 $X_{n,i} \geq 1$，有 $Z_{n+1} \geq Z_n \geq 1$，因而不存在灭绝事件。本文研究的是种群大小 Z_n 的小值概率，而非规范化鞅极限在零点附近的尾概率。

非减假设表示每个繁殖单元至少产生一个后代，可近似描述无损复制。本文 α_n 按固定分布逐代独立抽取，并与环境、后代变量独立，不根据种群规模作反馈调整；这里不作反馈调整的是倍数，繁殖单元总数 $\alpha_n Z_n$ 仍随 Z_n 变化。这些假设排除灭绝，并使负阶矩可逐代估计。允许零后代或零控制时须处理灭绝；引入种群反馈时则需重新建立递推估计。

记 $a_1 = \mathbb{P}(\alpha_0 = 1)$，定义一代保持概率并作非退化假设：

$$\pi_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 1) = a_1 \mathbb{E}[p_1(\xi_0)], \qquad 0 < \pi_1 < 1. \tag{3}$$

式(3)的乘积表达式来自事件等价关系 $\{Z_1 = 1\} = \{\alpha_0 = 1, X_{0,1} = 1\}$ 及控制的独立性。这里 π_1 表示一代保持在单个个体的概率，而本模型的灭绝概率为 0。其中 $0 < \pi_1 < 1$ 是另加的非退化假设，表示种群既可能保持为 1，也可能增长。除非另有说明，不对后代数和控制倍数附加正阶矩条件。

为利用分枝结构，对任意 $j \geq 1$ 定义

$$Y_{n,j}=\sum_{i=(j-1)\alpha_n+1}^{j\alpha_n}X_{n,i},\qquad Z_{n+1}=\sum_{j=1}^{Z_n}Y_{n,j}. \tag{4}$$

式(4)将繁殖单元分为 Z_n 组，每组含 α_n 个单元，$Y_{n,j}$ 为该组的有效后代数。给定扩展环境 $\eta_n=(\xi_n,\alpha_n)$ 后，各组独立同分布，其概率母函数为 $g_{\eta_n}(s)=f_{\xi_n}(s)^{\alpha_n}$，其中 $f_{\xi_n}(s)=\sum_{k\geq1}p_k(\xi_n)s^k$。因此该模型是独立同分布扩展环境中的普通分枝过程；对环境取平均后，各组通常不独立。

为说明与上临界情形的关系，记 $m(\xi_n)=\sum_{k\geq1}kp_k(\xi_n)$、$M_n=\alpha_n m(\xi_n)$。本文假设给出 $M_0\geq1$ 且 $\mathbb{P}(M_0>1)>0$，故 $\mu:=\mathbb{E}\log M_0\in(0,\infty]$。当 $\mu<\infty$ 时，模型属于通常意义下的不灭绝上临界情形 [4]；以下结果不需要该可积条件，因而也涵盖 $\mu=\infty$ 的情况。

3. 基本结果及证明

对任意 $r>0$，记一代种群的负阶矩为

$$\beta_r=\mathbb{E}[Z_1^{-r}]=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{\alpha_0}X_{0,i}\right)^{-r}\right]. \tag{5}$$

由 $Z_1\geq1$ 及式(3)，可知 $\pi_1<\beta_r<1$，且 β_r 总是有限。

引理 1. 对任意 $r>0$ 及整数 $n\geq0$，有

$$\mathbb{E}[Z_n^{-r}]\leq\beta_r^n. \tag{6}$$

证明. 令 $\mathcal{H}_n=\sigma(\xi_k,\alpha_k,X_{k,i}:0\leq k<n,\ i\geq1)$，其中 $\mathcal{H}_0$ 为平凡 σ 代数。由函数 $x\mapsto x^{-r}$ 的凸性，对任意正数 $y_1,\dots,y_z$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^{z}y_j\right)^{-r}\leq z^{-r}\frac{1}{z}\sum_{j=1}^{z}y_j^{-r}. \tag{7}$$

当前一代的分组变量与 $\mathcal{H}_n$ 独立，且对每个 $j\geq1$，$\mathbb{E}[Y_{n,j}^{-r}\mid\mathcal{H}_n]=\beta_r$。在 $Z_n=z$ 上，将式(7)用于式(4)并取条件期望，得

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}^{-r}\mid\mathcal{H}_n]\leq Z_n^{-r}\beta_r. \tag{8}$$

取期望后迭代即得式(6)。此处仅用到各组的条件边际分布相同及期望的线性性，并未假定各组在退火意义下独立。

□

定理 1. 在上述假设下，对任意整数 $n\geq0$、实数 $x\geq1$ 及 $r>0$，有

$$\pi_1^n \le \mathbb{P}(Z_n \le x) \le \min\{1,\ x^r \beta_r^n\}. \tag{9}$$

证明. 由引理 1及 Markov 不等式，$\mathbb{P}(Z_n \le x) \le x^r \mathbb{E}[Z_n^{-r}] \le x^r \beta_r^n$。另一方面，由种群非减性及各代随机机制的独立同分布性，$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \pi_1^n$，从而得到下界。

□

注 1. 若直接计算 β_r 不便，可再次使用式(7)，得到容易分解的上界

$$\beta_r \le \rho_r := \mathbb{E}[\alpha_0^{-r}]\, \mathbb{E}\left[\sum_{j\ge 1} p_j(\xi_0) j^{-r}\right]. \tag{10}$$

因此式(9)中的 β_r 可换为 ρ_r，代价是上界可能变宽。式(10)的乘积分解使用了控制序列与环境、后代变量族的独立性。

推论 1. 对任意固定的 $r > 0$，若 $0 \le c < -\log \beta_r / r$，则

$$\mathbb{P}(Z_n \le e^{cn}) \le \exp\{-n(-\log \beta_r - rc)\}. \tag{11}$$

该推论直接来自式(9)，给出的是指数上界，未确定一般指数阈值下的精确衰减率。

定理 2. 在第 2 节的假设下，设确定性阈值序列 $b_n \ge 1$ 满足 $\log b_n / n \to 0$。则

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(Z_n \le b_n) = \log \pi_1. \tag{12}$$

特别地，对任意固定 $K \ge 1$ 以及任意 $d > 0$，阈值 $b_n = K$ 或 $b_n = n^d$（$n \ge 1$）对应的小值概率均具有指数衰减率 $-\log \pi_1$。

证明. 固定 $r > 0$，对 $n \ge 1$，由式(9)得到

$$\log \pi_1 \le \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \le b_n) \le \frac{r \log b_n}{n} + \log \beta_r. \tag{13}$$

先令 $n \to \infty$，得上极限不超过 $\log \beta_r$，下极限不小于 $\log \pi_1$。对正整数 k，有 $0 \le 1 - Z_1^{-k} \uparrow \mathbf{1}_{\{Z_1 > 1\}}$，由单调收敛定理，

$$1 - \beta_k = \mathbb{E}[1 - Z_1^{-k}] \uparrow \mathbb{P}(Z_1 > 1) = 1 - \pi_1.$$

再由 β_r 关于 r 非增及 $\beta_{k+1} \le \beta_r \le \beta_k$（$k \le r < k+1$），得到

$$\lim_{r\to\infty} \beta_r = \mathbb{P}(Z_1 = 1) = \pi_1. \tag{14}$$

再令 $r\to\infty$ 即得式(12)。这里先固定 r 令 $n\to\infty$，随后才令 $r\to\infty$，无需交换极限。

□

注 2. 定理 2仅给出 $\mathbb{P}(Z_n\le b_n)=\exp\{n\log\pi_1+o(n)\}$。例如，取控制恒为 1，并令环境以概率 π_1 使每个个体确定性地产生一个后代、以概率 $1-\pi_1$ 确定性地产生两个后代，则 $\mathbb{P}(Z_n\le 2)=\pi_1^n+n(1-\pi_1)\pi_1^{n-1}$。因此不能一般地断言 $\mathbb{P}(Z_n\le b_n)/\pi_1^n\to 1$。固定阈值结论也可由分组表示及文献 [9] 的引理 7 获得。

4. 例题

例 1.（两状态随机环境下的小值概率）在第 2 节的模型中，设 $Z_0=1$，环境序列独立同分布，且每代以相同概率取 A 和 B 两个状态。每个繁殖单元只产生 1 个或 2 个后代，其中 $p_1(A)=3/4$、$p_1(B)=1/4$，且 $p_2(e)=1-p_1(e)$。控制序列与环境及后代变量族独立，并满足 $\mathbb{P}(\alpha_n=1)=3/4$、$\mathbb{P}(\alpha_n=2)=1/4$。

求该过程的一代保持概率、负阶矩 β_r 以及 $\mathbb{P}(Z_n\le 5)$ 的指数衰减率，并计算 $n=5,10,20,40$ 时的小值概率及定理 1在 $r=1,3$ 时给出的上下界。

解 **（1）一代保持概率与负阶矩。** 由式(3)，$\pi_1=(3/4)(1/2)=3/8$。先在给定环境下计算后代数的卷积，再对环境与控制平均，得到

$$\big(\mathbb{P}(Z_1=j)\big)_{j=1}^{4}=\left(\frac{3}{8},\frac{29}{64},\frac{3}{32},\frac{5}{64}\right). \tag{15}$$

于是

$$\beta_r=\frac{3}{8}+\frac{29}{64}\,2^{-r}+\frac{3}{32}\,3^{-r}+\frac{5}{64}\,4^{-r},\qquad \beta_1=\frac{167}{256}. \tag{16}$$

（2）小值概率的指数衰减率。 本例中 $m(A)=5/4$、$m(B)=7/4$，故 $\mu=\frac14\log 2+\frac12\log(5/4)+\frac12\log(7/4)\approx 0.564666>0$，属于有限对数均值的上临界情形。由定理 2，固定阈值 5 对应的指数衰减率为 $-\log\pi_1=\log(8/3)\approx 0.980829$，即

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(Z_n\le 5)=\log\frac{8}{3}.$$

（3）有限代概率及其界。 令 $Q=(Q_{zk})_{1\le z,k\le 5}$，其中 $Q_{zk}=\mathbb{P}(Z_{n+1}=k\mid Z_n=z)$。记 $w_1=3/4$、$w_2=1/4$，以 $[s^k]$ 表示取多项式中 s^k 的系数，则

$$Q_{zk}=\sum_{a=1}^{2}\frac{w_a}{2}\sum_{p\in\{1/4,3/4\}}[s^k]\big(ps+(1-p)s^2\big)^{az}. \tag{17}$$

给定 $Z_n=z$、$\alpha_n=a$ 和 $p_1(\xi_n)=p$ 后，下一代服从 $az+\mathrm{Bin}(az,1-p)$。据此计算式(17)，得到

$$Q=\frac{1}{2048}\begin{pmatrix}768 & 928 & 192 & 160 & 0\\ 0 & 480 & 576 & 562 & 120\\ 0 & 0 & 336 & 432 & 432\\ 0 & 0 & 0 & 246 & 360\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 183\end{pmatrix}.$$

以 Q_{24} 为例：当 $\alpha_n=1$ 时，两个繁殖单元均须产生 2 个后代，概率为 $(1-p)^2$；当 $\alpha_n=2$ 时，四个单元均须产生 1 个后代，概率为 p^4，其中 $p=p_1(\xi_n)$。按式(17)对环境和控制加权，得

$$\begin{aligned}Q_{24}&=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\right]\\&\quad+\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^4\right]\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{41}{256}\\&=\frac{15}{64}+\frac{41}{1024}=\frac{281}{1024}=\frac{562}{2048}.\end{aligned}$$

同代繁殖单元共享环境，因此须先计算条件概率再取平均，不能直接代入 $p=1/2$。

这是状态 $1,\dots,5$ 上的转移子矩阵，行和小于 1 的部分对应转移到大于 5 的状态。由于种群非减，超过 5 后不能返回，故表 **??**的递推概率恰为

$$\mathbb{P}(Z_n\le 5)=v_0Q^n\mathbf{1},\qquad v_0=(1,0,0,0,0),\quad \mathbf{1}=(1,1,1,1,1)^{\mathsf{T}}.$$

由式(16)得 $\beta_1=167/256$、$\beta_3=16085/36864$。表 1的其余三列分别按 $L_n=\pi_1^n$、$U_{n,1}=\min\{1,5\beta_1^n\}$ 和 $U_{n,3}=\min\{1,125\beta_3^n\}$ 计算。矩阵递推与幂运算均使用精确分数，结果统一保留五位有效数字；其中 $U_{5,3}=1$ 是对大于 1 的上界作截断所得。

Table 1. Probability of small values and theoretical bounds when the threshold is 5

表 1. 阈值为 5 时的小值概率及理论界

代数 n	下界 π_1^n	递推概率	上界 $r=1$	上界 $r=3$
5	7.4158×10^{-3}	1.3150×10^{-1}	5.9068×10^{-1}	1
10	5.4994×10^{-5}	1.3550×10^{-3}	6.9781×10^{-2}	3.1268×10^{-2}
20	3.0243×10^{-9}	7.7280×10^{-8}	9.7387×10^{-4}	7.8214×10^{-6}
40	9.1464×10^{-18}	2.3380×10^{-16}	1.8968×10^{-7}	4.8939×10^{-13}

表中递推值是确定性计算结果。不同的 r 可以给出不同精度的上界；有限代概率界与真实概率仍有明显差距，这与对数渐近结论并不矛盾。

5. 结论与讨论

在独立同分布环境、独立正整数控制、无零后代及 $0 < \pi_1 < 1$ 的条件下，负阶矩递推给出了退火小值概率的有限代界，并确定了次指数阈值下的指数衰减率 $-\log \pi_1$。证明不依赖有限正阶矩或有限对数均值条件；分组表示使这些结论与普通随机环境分枝过程的已有结果相衔接。

结论的适用范围限于上述非减模型。若允许零后代或零控制，须另行分析灭绝与正的小值事件。当前独立控制模型中，$\pi_1 = 0$ 时有 $Z_n \geq 2^n$，次指数阈值事件最终为空；$\pi_1 = 1$ 时则 $Z_n \equiv 1$。一般指数阈值下的精确率函数及带前因子的渐近等价式不在本文结论之内。

后续可固定原始环境序列 ξ，研究保留控制随机性的淬火小值概率及所需可积条件；允许零后代、零控制或种群反馈，分别处理灭绝与正的小值事件；在附加条件下结合转移子矩阵的谱结构，研究固定阈值的渐近前因子，并探索一般指数阈值的精确率函数。

基金项目

湘南学院大学生创新训练计划项目（项目名称：乘积受控分枝过程的小值概率研究，项目编号：X2024048）。

参考文献

[1] Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972) Branching Processes. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65371-1

[2] Smith, W.L. and Wilkinson, W.E. (1969) On Branching Processes in Random Environments. *The Annals of Mathematical Statistics*, **40**, 814-827. https://doi.org/10.1214/aoms/1177697589

[3] Hambly, B. (1992) On the Limiting Distribution of a Supercritical Branching Process in a Random Environment. *Journal of Applied Probability*, **29**, 499-518. https://doi.org/10.2307/3214889

[4] Huang, C. and Liu, Q. (2012) Moments, Moderate and Large Deviations for a Branching Process in a Random Environment. *Stochastic Processes and their Applications*, **122**, 522-545. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.09.001

[5] Dion, J. and Essebbar, B. (1995) On the Statistics of Controlled Branching Processes. In: Heyde, C.C., Ed., *Branching Processes*, Springer, 14-21. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2558-4_2

[6] 陈祁欢, 张鑫. 随机环境中乘积受控分枝过程矩的存在性 [J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 4049-4054.

[7] Fleischmann, K. and Wachtel, V. (2007) Lower Deviation Probabilities for Supercritical Galton-Watson Processes. *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, **43**, 233-255. https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2006.03.001

[8] Mörters, P. and Ortgiese, M. (2008) Small Value Probabilities via the Branching Tree Heuristic. *Bernoulli*, **14**, 277-299. https://doi.org/10.3150/07-bej107

[9] Bansaye, V. and Berestycki, J. (2009) Large Deviations for Branching Processes in Random Environment. *Markov Processes and Related Fields*, **15**, 493-524.

[10] Bansaye, V. and Böinghoff, C. (2013) Lower Large Deviations for Supercritical Branching Processes in Random Environment. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **282**, 15-34. https://doi.org/10.1134/s0081543813060035