Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(11), 349-364**
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.1511455

Hans汉斯

$\mathbb{R}^N$ 上带凹凸项的退化 p-Kirchhoff 方程在可积权条件下的无穷多解

刘立华

盐城师范学院数学与统计学院，江苏　盐城

收稿日期：2026 年 10 月 25 日；录用日期：2026 年 11 月 18 日；发布日期：2026 年 11 月 25 日

摘　要

本文研究全空间上一类带有凹凸项的 p-Kirchhoff 方程的无穷多解问题，其中 Kirchhoff 函数允许退化，即其常数项系数可以为零；两个权函数均允许变号，且仅满足可积型条件. 利用喷泉定理与对偶喷泉定理，按凸项的幂指数高于与低于 Kirchhoff 项增长幂指数两类情形，分别证明该方程存在无穷多解：前者得到一列能量趋于正无穷的解，后者得到一列能量趋于零的非零解。

关键词

p-Kirchhoff 方程，凹凸项，加权函数，变分法，喷泉定理

Infinitely Many Solutions for Degenerate p-Kirchhoff Equations with Concave-Convex Terms in $\mathbb{R}^N$ under Integrable Weight Conditions

Lihua Liu

School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng Jiangsu

文章引用: 刘立华. $\mathbb{R}^N$ 上带凹凸项的退化 p-Kirchhoff 方程在可积权条件下的无穷多解 [J]. 应用数学进展, 2026, 15(11): 349-364. DOI: 10.12677/aam.2026.1511455

Received: October 25, 2026; accepted: November 18, 2026; published: November 25, 2026

Abstract

This paper deals with the existence of infinitely many solutions for a class of p-Kirchhoff equations with concave–convex terms on the whole space, where the Kirchhoff function is allowed to be degenerate, that is, the coefficient of its constant term may vanish, and the two weight functions are allowed to change sign and satisfy only integrable type conditions. By means of the Fountain Theorem and the Dual Fountain Theorem, the existence of infinitely many solutions is established in two cases, according as the power exponent of the convex term is higher or lower than the growth exponent of the Kirchhoff term: in the first case a sequence of solutions whose energies tend to positive infinity is obtained, and in the second case a sequence of nontrivial solutions whose energies tend to zero is obtained.

Keywords

p-Kirchhoff Equation, Concave-Convex Terms, Weight Function, Variationa Method, Fountain Theorem

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言与主要结果

考虑 $\mathbb{R}^N$ 上的 p-Kirchhoff 型方程

$$\begin{cases} M\big(\|u\|_p^p\big)\big(-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u\big) = \lambda H(x)|u|^{m-2}u + \mu K(x)|u|^{q-2}u, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $-\Delta_p u = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)$ 为 p-Laplace 算子，$1 < p < N$，

$$M(t) = a + ct^{\tau}, \quad a \geq 0, \ c > 0, \ \tau > 0,$$

λ,μ 为实参数，$V,H,K:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 为可测权函数，$V\geq 0$ 几乎处处（下文记作 a.e.），H,K 允许变号. 称 $1<m<p$ 的项为凹（次线性）项，$p<q$ 的项为凸（超线性）项. 当 $a=0$ 时 $M(0)=0$，问题 (1) 由非退化 Kirchhoff 型变为退化 Kirchhoff 型.

Kirchhoff 模型最早由 Kirchhoff 在振动理论中提出，其变分解法与后续进展可见 [1–6]. 在全空间 $\mathbb{R}^N$ 中研究无穷多解，主要困难是 Sobolev 嵌入不紧. 一类通行做法是对势函数或权函数施加“在无穷远处退化（或权比一致消失）”的条件以恢复紧性 [7–9]；文 [4] 首次将喷泉定理与对偶喷泉定理用于 p-Kirchhoff 方程（有界区域），凹凸项情形的加权紧性可见 [10]；近来，对偶喷泉定理也被用于有界区域上的 p-Kirchhoff 型问题：文 [11] 处理带临界指数的情形，文 [12] 处理带 Hardy 位势的情形，两者所得小能量解列均满足 $J(u_n)<0$ 且 $J(u_n)\to 0$，但其对 Kirchhoff 函数的假设（如 $M(t)\geq m_0>0$ 或 $K(0)=1$）均排除退化情形，且未涉及变号权. 作者此前的工作 [13] 亦在 $\mathbb{R}^N$ 上研究过带凹凸项与上述一致衰减权的同一问题. 本文沿此线索推进，把 [13] 中的紧性假设换为**可积性假设**，并把 Kirchhoff 函数推进到退化情形；定理 1.1 与定理 1.2 的论证均独立给出，不沿用 [13] 的结论.

从应用背景看，把权函数由“一致衰减”放宽为“可积”并非单纯的技术性放松：在 (1) 的振弦/弹性解释中，H,K 为反应项或耦合系数的空间分布，可积性条件恰好容纳“能量集中于有限区域、尾部平均消失”的非一致衰减分布——既包括高度无界但支撑迅速缩小的尖峰型权（见注 1.4），也包括逐点极限不存在的振荡型权；这两类权均不属于 [13] 的比值型一致衰减类.

在方法层面，本文把“紧性的恢复”与“喷泉几何的核验”解耦处理：用可积权下的加权紧嵌入（引理 2.2、2.3）建立 (PS) 条件，用不依赖 Borsuk–Ulam 定理的交叠性质（引理 4.1）替代对半径次序的逐条比对. 这一路线可望推广到分数阶 Kirchhoff 方程（临界指标换为 $p_s^*=\frac{Np}{N-sp}$，可积权指数随之改写）及 Heisenberg 群等非欧空间上的相应问题.

1.1. 预备工作

记 $p^*=\frac{Np}{N-p}$，$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于范数 $\big(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\big)^{1/p}$ 的完备化，并设工作空间

$$X=\Big\{u\in\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N):\ \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^p\,\mathrm{d}x<\infty\Big\},\quad \|u\|=\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\big(|\nabla u|^p+V(x)|u|^p\big)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p},\tag{2}$$

在 (V) 之下 X 是自反可分的 Banach 空间：嵌入 $u\mapsto(\nabla u,V^{1/p}u)$ 将 X 等距映入 $L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)\oplus L^p(\mathbb{R}^N,V\,\mathrm{d}x)$，后两者均可分（前者以 C_0^∞ 为稠密集，后者因 $V\,\mathrm{d}x$ 是 σ-有限 Radon 测度）；且 $X\hookrightarrow\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 连续. 带权范数记为 $\|u\|_{s,W}=\big(\int_{\mathbb{R}^N}|W(x)||u|^s\,\mathrm{d}x\big)^{1/s}$. 全文假设：

(V) $V\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 且 $V>0$ a.e.（非负性已由 $V>0$ a.e. 蕴含，不再单列；容许 V 无界或在无穷远处趋于零）. 局部可积性保证 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\subset X$，从而使 (1) 的弱解表述有意义.

(H) $1<m<p$，H 可测变号，且

$$|H|\in L^{\frac{p^*}{p^*-m}}(\mathbb{R}^N).\tag{3}$$

(K) $p<q<p^*$，K 可测变号，且

$$|K|\in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N).\tag{4}$$

由 Markushevich 定理 [14]，X 中存在总双正交系 $\{e_j\}\subset X$ 与 $\{e_j^*\}\subset X^*$：

$$e_j^*(e_i)=\delta_{ij},\qquad \overline{\operatorname{span}}\{e_j\}=X,\qquad \bigcap_j \ker e_j^*=\{0\};$$

. 记

$$Y_k=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_k\}\quad(\dim Y_k=k),\qquad Z_k=\bigcap_{i=1}^{k-1}\ker e_i^*\quad(k\in\mathbb{N},\ Z_1=X);$$

Z_k 是闭子空间，且 $\operatorname{codim} Z_k=k-1$：$e_1^*,\dots,e_{k-1}^*$ 线性无关，而映射 $u\mapsto (e_i^*(u))_{i<k}$ 把 $\sum_{i<k}a_ie_i$ 映为 $(a_i)_{i<k}$，是满射. 又 $Y_k\cap Z_k=\operatorname{span}\{e_k\}\neq\{0\}$（$u=\sum_{i\le k}a_ie_i\in Z_k$ 蕴含 $a_i=e_i^*(u)=0$，$i<k$）. 下文把这一特征称为**重叠性质**（即有限维子空间 Y_k 与尾子空间 Z_k **非平凡相交**，与后文引理 4.1 的**交叠性质**同义），而非单纯的记号约定——它正是喷泉与对偶喷泉两定理赖以成立的几何前提：一方面 $\operatorname{codim} Z_k=k-1\le k=\dim Y_k$ 保证引理 3.2 所需的维数不等式；另一方面 $Y_k\cap Z_k\neq\{0\}$ 提供了 e_k 这一公共方向，使得引理 4.1 的交叠性 (18) 对一切 $h\in\mathcal{H}_k$ 成立，并迫使对偶喷泉采用半径次序 $\rho_k\le\gamma_k$（详见注 4.3）。 我们还需要两个加权半范数在每个有限维 Y_k 上非退化. 我们把这一点列为一条独立假设：

(B) 对每个 $k\in\mathbb{N}$，

$$Y_k\cap\Big\{u\in X:\ \int_{\mathbb{R}^N}|K(x)||u|^q\,\mathrm{d}x=0\Big\}=\{0\},$$
$$Y_k\cap\Big\{u\in X:\ \int_{\mathbb{R}^N}|H(x)||u|^m\,\mathrm{d}x=0\Big\}=\{0\};$$

亦即 Y_k 中任何非零元都不可能在 $\{|K|>0\}$（或 $\{|H|>0\}$）上几乎处处为零.

因 Y_k 为有限维，(B) 等价于存在常数 $\kappa_k,\tilde\kappa_k>0$ 使

$$\|u\|_{q,K}\ge\kappa_k\|u\|,\qquad \|u\|_{m,H}\ge\tilde\kappa_k\|u\|,\quad\forall u\in Y_k.\tag{5}$$

注 1.1 (假设 (B) 的可行性与可验例)**.** 假设 (B) 只涉及有限维子空间上加权半范数的非退化，与紧性无关，且有下列可直接核验的充分条件.

（一）若 $|H(x)|>0$ a.e.、$|K(x)|>0$ a.e.，则 $\int_{\mathbb{R}^N}|K||u|^q\,\mathrm{d}x=0$ 当且仅当 $u=0$ a.e.，即 $\|\cdot\|_{q,K}$（同理 $\|\cdot\|_{m,H}$）在 X 上是范数. 因 Y_k 有限维、其单位球面紧，$u\mapsto\|u\|_{q,K}$ 连续且无零点，故 $\min_{u\in Y_k,\|u\|=1}\|u\|_{q,K}>0$，(5) 对**任意**总双正交系 $\{e_j\}$ 自动成立，无须任何谱理论假设——这就完全避开了“p-Laplacian 的特征函数系是否构成基”这一在 $p\neq2$ 时尚未解决的困难.

（二）取 $V\equiv1$、$H(x)=h_0(1+|x|)^{-\alpha}$、$K(x)=k_0(1+|x|)^{-\beta}$（$h_0,k_0>0$）. 二者 >0 a.e.，由（一）(B) 成立；而 $|H|\in L^{\sigma_H}$、$|K|\in L^{\sigma_K}$（其中 $\sigma_H=\frac{p^*}{p^*-m}$、$\sigma_K=\frac{p^*}{p^*-q}$）经计算分别等价于 $\alpha>\frac{N}{\sigma_H}=\frac{N(p^*-m)}{p^*}$、$\beta>\frac{N}{\sigma_K}=\frac{N(p^*-q)}{p^*}$. 故只要 $\alpha>\frac{N(p^*-m)}{p^*}$、$\beta>\frac{N(p^*-q)}{p^*}$，$(H)$、$(K)$、$(B)$ 同时满足. 例如 $(N,p,q,m)=(5,2,3,\frac{3}{2})$ 时 $p^*=\frac{10}{3}$、$\sigma_K=10$、$\sigma_H=\frac{20}{11}$，阈值分别为 $\frac{N}{\sigma_K}=\frac12$、$\frac{N}{\sigma_H}=\frac{11}{4}$，取 $\alpha=3>\frac{11}{4}$、$\beta=1>\frac12$ 即可，此时 (H)、(K)、(B) 全部成立.

（三）振荡变号权 $K(x)=(1+|x|)^{-\beta}\sin|x|$ 在 $\{|x|\notin\pi\mathbb{Z}\}$ 上非零，故 $|K|>0$ a.e.；又 $|K|\le(1+|x|)^{-\beta}$，于是当 $\beta>\frac{N(p^*-q)}{p^*}$ 时 (K)、(B) 同时成立. 这说明本文的可积性假设不是任何

的一致衰减类的权函数假设.

本文分别在下列两个情形下讨论：

$$(\mathcal{W}_+)\quad 1<m<p<p(\tau+1)<q<p^*; \tag{6}$$

$$(\mathcal{W}_-)\quad 1<m<p<q<p(\tau+1)<p^*. \tag{7}$$

两情形均要求 $\tau<\frac{p}{N-p}$（等价于 $p(\tau+1)<p^*$）；$(\mathcal{W}_\pm)$ 非空分别还须 $\tau>\frac{q-p}{p}$（对 $\mathcal{W}_-$）或 $\tau<\frac{q-p}{p}$（对 $\mathcal{W}_+$）.

1.2. 主要结果

对应 (1) 的能量泛函 $J:X\to\mathbb{R}$ 定义为

$$J(u)=\frac{a}{p}\|u\|^p+\frac{c}{p(\tau+1)}\|u\|^{p(\tau+1)}-\frac{\lambda}{m}\|u\|_{m,H}^m-\frac{\mu}{q}\|u\|_{q,K}^q, \tag{8}$$

则 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$ 为偶泛函，其临界点即 (1) 的弱解；逐项求导给出

$$\begin{aligned}\langle J'(u),v\rangle=\big(a+c\|u\|^{p\tau}\big)\int_{\mathbb{R}^N}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v+V|u|^{p-2}uv\big)\,\mathrm{d}x\\ -\int_{\mathbb{R}^N}\big(\lambda H|u|^{m-2}u+\mu K|u|^{q-2}u\big)v\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{9}$$

验证见 §2 的推论 2.4.

定理 1.2 (高能量解列，含退化情形). 设 (V)、(H)、(K)、(B) 与 $(\mathcal{W}_+)$ 成立，$a\ge 0$、$c>0$. 则

(i) 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$ 与 $\mu>0$，问题 (1) 有一列解 $\{u_k\}\subset X$ 使 $J(u_k)\to+\infty$；

(ii) 对任意 $\lambda>0$ 与 $\mu\le 0$，问题 (1) 有一列非零解 $\{v_k\}\subset X$ 使 $J(v_k)\to 0^-$.

定理 1.3 (小能量解列，凸项低于 Kirchhoff 增长). 设 (V)、(H)、(K)、(B) 与 $(\mathcal{W}_-)$ 成立，$a\ge 0$、$c>0$. 则对任意 $\lambda>0$ 与 $\mu\in\mathbb{R}$，问题 (1) 有一列非零解 $\{v_k\}\subset X$ 使 $J(v_k)\to 0$.

注 1.4 (与既有紧性假设的关系). 文 [13] 对权函数使用的条件是：对一切 $r>0$，$\operatorname{ess\,sup}_{x\in B_r^c}\big(H_1(x)V^{-1}(x)\big)\to 0$ 且 $\operatorname{ess\,sup}_{x\in B_r^c}\big(K(x)^{p^*-p}V(x)^{q-p^*}\big)\to 0$，即“比值型一致衰减”假设；本文 (H)、(K) 为“可积型”假设，二者互不包含. 一方面，取 $V\equiv 1$ 与互不相交球的和 $|K(x)|=\sum_{j\ge1} j\,\chi_{B_{\rho_j}(x_j)}$（$\rho_j=2^{-j}j^{-2}$，$|x_j|=j$），则 $\operatorname{ess\,sup}_{B_r^c}K=+\infty$ 使一致衰减条件失效；而对 $\sigma:=\frac{p^*}{p^*-q}>1$ 有 $\int_{\mathbb{R}^N}|K|^\sigma\,\mathrm{d}x=\omega_N\sum_{j\ge1}j^{\sigma-2N}2^{-jN}<\infty$（$2^{-jN}$ 占优，对任意 $N\ge1$ 与 σ 收敛），即 (K) 成立. 另一方面，取 $K(x)=(1+|x|)^{-N/\sigma}$，则一致衰减条件成立而 (K) 失效（$\int|K|^\sigma\,\mathrm{d}x$ 对数发散）.

2. 紧嵌入与 Palais–Smale 条件

本节给出在可积权条件下紧嵌入的证明。记 Sobolev 常数 $S>0$ 使

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p^*}\le\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p},\quad\forall u\in\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N).\tag{10}$$

引理 2.1 (局部紧性). 对任意 $R>0$ 与 $1\le s<p^*$，嵌入 $X\hookrightarrow L^s(B_R)$ 紧.

证明. 设 $\{u_n\}\subset X$ 有界，$\|u_n\|\le D$. 由 (2) 与 (10)，$\{u_n\}$ 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，故在 $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 中有界；因 $|B_R|<\infty$ 且 $p<p^*$，Hölder 不等式给出

$$\int_{B_R}|u_n|^p\,\mathrm{d}x\le|B_R|^{1-p/p^*}\Big(\int_{B_R}|u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\Big)^{p/p^*}\le|B_R|^{1-p/p^*}S^{-p}D^p,$$

即 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}(B_R)$ 中有界. 由 Rellich 定理，$W^{1,p}(B_R)\hookrightarrow L^s(B_R)$ 对 $1\le s<p^*$ 紧，故 $\{u_n\}$ 含有在 $L^s(B_R)$ 中收敛的子列，嵌入 $X\hookrightarrow L^s(B_R)$ 之紧性至此已证.

此外，由 X 的自反性（见 (2) 后），可取子列（仍记为 $\{u_n\}$）与 $u\in X$ 使 $u_n\rightharpoonup u$ 于 X；把第一段的论证对每个固定的 R 重复使用，并对极限作认同——限制映射 $X\to L^s(B_R)$ 线性连续，弱收敛传递到 $L^s(B_R)$，而强、弱极限必一致——可取进一步子列使 $\|u_n-u\|_{L^s(B_R)}\to0$. 进一步取 $R_\ell=\ell\uparrow\infty$ 逐层抽子列（第 ℓ 层先抽使 $\|u_n-u\|_{L^s(B_{R_\ell})}\to0$ 的子子列，再抽其在 B_{R_ℓ} 上 a.e. 收敛者），最后取对角线子列，则对每个 ℓ 同时有 $\|u_n-u\|_{L^s(B_{R_\ell})}\to0$ 与 $u_n\to u$ 在 B_{R_ℓ} 上 a.e. 成立；由 $\bigcup_\ell B_{R_\ell}=\mathbb{R}^N$ 且各层例外零测集之并仍为零测集，即得 $u_n\to u$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上 a.e. 成立. 下文（引理 2.2、2.3 的证明与引理 2.5 的第二步）将直接引用此结论.

□

引理 2.2 (凹项紧嵌入). 设 (V)、(H) 成立，则嵌入 $X\hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N,H)$ 为连续且紧的，且存在 $C_H>0$ 使

$$\|u\|_{m,H}\le C_H\|u\|,\quad\forall u\in X.$$

证明. 由 Hölder 不等式（指标 $\frac{p^*}{p^*-m}$ 与 $\frac{p^*}{m}$）及 Sobolev 不等式 (10)，

$$\int_{\mathbb{R}^N}|H||u|^m\,\mathrm{d}x\le\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|H|^{\frac{p^*}{p^*-m}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p^*-m}{p^*}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{m}{p^*}}\le\|H\|_{L^{\frac{p^*}{p^*-m}}}^{\frac{p^*-m}{p^*}}\Big(S^{-1}\|u\|\Big)^m,$$

即 $\|u\|_{m,H}\le\|H\|_{L^{p^*/(p^*-m)}}^{(p^*-m)/(p^*m)}S^{-1}\|u\|$.

先证一条断言：若 $1<t<\infty$，$\{f_n\}$ 在 $L^t(\mathbb{R}^N)$ 中有界且 $f_n\to0$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$，则 $f_n\rightharpoonup0$ 于 $L^t(\mathbb{R}^N)$. 事实上，任取 $g\in L^{t'}(\mathbb{R}^N)$（$\frac1t+\frac1{t'}=1$），分解 $g=g\chi_{B_R}+g\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}$：尾部由 Hölder 不等式有 $\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}|g||f_n|\,\mathrm{d}x\le\|g\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}\|_{t'}\sup_n\|f_n\|_t\to0$（$R\to\infty$，与 n 无关）；在 B_R 上 $\{f_n\}$ 一致可积（Hölder 不等式给出 $\int_E|f_n|\,\mathrm{d}x\le|E|^{1-1/t}\sup_n\|f_n\|_t$），与 a.e. 收敛一起经 Vitali 定理给出 $\|f_n\|_{L^1(B_R)}\to0$，于是 $\int_{B_R}gf_n\,\mathrm{d}x\to0$ 对 $g\in L^\infty(B_R)$ 成立，再由 L^∞ 在 $L^{t'}(B_R)$ 中的稠密性传递到一般 $g\in L^{t'}$. 断言证毕.

设 $u_n \rightharpoonup 0$ 于 X，反设 $\|u_n\|_{m,H} \not\to 0$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与子列（仍记为 $\{u_n\}$）使 $\|u_n\|_{m,H} \geq \varepsilon_0$；该子列仍弱收敛于 0，从而有界，记 $\|u_n\| \leq D$. 由引理 2.1 的对角线论证，可取进一步子列使 $u_n \to 0$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$. 又由 (10)，

$$\big\||u_n|^m\big\|_{L^{p^*/m}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\,\mathrm{d}x\Big)^{m/p^*} \leq \big(S^{-1}D\big)^m,$$

即 $\{|u_n|^m\}$ 在 $L^{p^*/m}(\mathbb{R}^N)$ 中有界；因 $m < p^*$ 使 $\frac{p^*}{m} > 1$，且 $u_n \to 0$ a.e.，断言（取 $t = \frac{p^*}{m}$）给出 $|u_n|^m \rightharpoonup 0$ 于 $L^{p^*/m}(\mathbb{R}^N)$. 再由 (H) 与对偶关系 $L^{\frac{p^*}{p^*-m}}(\mathbb{R}^N) = \big(L^{p^*/m}(\mathbb{R}^N)\big)'$，

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |H||u_n|^m\,\mathrm{d}x\Big)^{1/m} \longrightarrow 0,$$

这与 $\|u_n\|_{m,H} \geq \varepsilon_0$ 矛盾. 故任一弱收敛于 0 的整列都满足 $\|u_n\|_{m,H} \to 0$.

最后由 X 的自反性（见 (2) 后）完成到紧性的转换：设 $\{u_n\}$ 在 X 中有界，取子列使 $u_{n_j} \rightharpoonup u$ 于 X；对弱零列 $\{u_{n_j} - u\}$ 应用上面已证的结论得 $\|u_{n_j} - u\|_{m,H} \to 0$，故 $\{u_n\}$ 含有在 $L^m(\mathbb{R}^N, H)$ 中收敛于 u 的子列，嵌入 $X \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N, H)$ 之紧性得证. □

引理 2.3 (凸项紧嵌入). 设 (V)、(K) 成立，则嵌入 $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, K)$ 为连续且紧的，且

$$\|u\|_{q,K} \leq \|K\|_{L^{p^*/(p^*-q)}}^{(p^*-q)/(p^*q)} S^{-1}\|u\|, \quad \forall u \in X.$$

证明. 重复引理 2.2 的证明过程即可，过程略. □

由引理 2.2、2.3 不难得到

推论 2.4. 在 (V)、(H)、(K) 之下，嵌入 $X \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N, |H|) \cap L^q(\mathbb{R}^N, |K|)$ 连续且紧；能量泛函 (8) 属于 $C^1(X, \mathbb{R})$ 且为偶泛函，其临界点即 (1) 的弱解.

证明. 紧嵌入由两个紧映射的合成得到. 关于 C^1：对 $s > 1$ 与非负可测权 W，由 Hölder 不等式与 (10)，泛函 $u \mapsto \int W|u|^s\,\mathrm{d}x$ 在 X 上连续可微，导数为 $v \mapsto s\int W|u|^{s-2}uv\,\mathrm{d}x$（依据 $\big||a|^{s-2}a - |b|^{s-2}b\big| \leq C_s(|a| + |b|)^{s-2}|a - b|$ 与控制收敛），故 $u \mapsto \|u\|^p$ 及两个权项均属 C^1；又 $t \mapsto t^{\tau+1}$ 因 $\tau > 0$ 在 0 处可微，复合项 $\|\cdot\|^{p(\tau+1)}$ 亦为 C^1. 四项逐一求导即得 (9)，其右端对 v 线性有界（估计同引理 2.2 的连续性部分）且 $u \mapsto J'(u) \in X^*$ 连续. 偶性来自 $\|\pm u\| = \|u\|$；$J'(u) = 0$ 与 (1) 的弱形式互推，用到 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset X$. □

定义 2.1. 若任一满足 $J(u_n) \to c$ 且 $J'(u_n) \to 0$ 于 X^* 的序列 $\{u_n\} \subset X$ 都含有 X 中收敛的子列；这样的序列称为 $(PS)_c$ 序列. 若每个 $c \in \mathbb{R}$ 均成立，则称 J 满足 (PS) **条件**.

引理 2.5 (Palais–Smale 条件). 设 (V)、(H)、(K) 成立，$a \geq 0$、$c > 0$. 则无论窗口 $(\mathcal{W}_+)$ 还是 $(\mathcal{W}_-)$，J 都满足定义 *2.1* 的 (PS) 条件（即每一水平均成立；此处不再写 $(PS)_c$ 以免与 *Kirchhoff* 系数 c 混用）. 特别地，退化情形 $a = 0$ 不被排除.

证明. 记 $P := p(\tau + 1)$.

第一步（有界性）. 设 $\{u_n\}$ 为 $(PS)_c$ 序列.

情形 $(\mathcal{W}_+)$（$m<p<P<q<p^*$）. 计算

$$\begin{aligned} c+1+\|u_n\| &\geq J(u_n)-\frac{1}{q}\langle J'(u_n),u_n\rangle \\ &= a\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\|u_n\|^p + c\Big(\frac{1}{P}-\frac{1}{q}\Big)\|u_n\|^P - \lambda\Big(\frac{1}{m}-\frac{1}{q}\Big)\|u_n\|_{m,H}^m. \end{aligned} \tag{11}$$

此时 $\frac{1}{P}-\frac{1}{q}>0$，且 $m<P$，由引理 2.2 有 $\|u_n\|_{m,H}^m \leq C_H^m\|u_n\|^m$，故 (11) 给出

$$c+1+\|u_n\| \geq c\Big(\frac{1}{P}-\frac{1}{q}\Big)\|u_n\|^P - |\lambda|\Big(\frac{1}{m}-\frac{1}{q}\Big)C_H^m\|u_n\|^m$$

由初等事实“$\alpha t^P-\gamma t^m-Ct\to+\infty$（$t\to\infty$，$\alpha,\gamma,C>0$）”即得 $\{u_n\}$ 有界.

情形 $(\mathcal{W}_-)$（$1<m<p<q<P<p^*$）. 直接估计 $J(u_n)$：由引理 2.2、2.3，

$$J(u_n)\geq \frac{c}{P}\|u_n\|^P - \frac{|\lambda|}{m}C_H^m\|u_n\|^m - \frac{|\mu|}{q}C_K^q\|u_n\|^q,$$

其中 C_K 为引理 2.3 的嵌入常数（$a\geq 0$ 时已舍弃非负项 $\frac{a}{p}\|u_n\|^p$）. 因 $P>q>1$，右端关于 $\|u_n\|$ 强制（coercive），结合 $J(u_n)\to c$ 得 $\{u_n\}$ 有界.

第二步（强收敛）. 由 X 自反，取子列使 $u_n\rightharpoonup u$ 于 X；由引理 2.1 与对角线论证取进一步子列使 $u_n\to u$ a.e.；再由引理 2.2、2.3 的紧性（应用于 $u_n-u\rightharpoonup 0$）得

$$u_n\to u \quad 于 L^m(\mathbb{R}^N,|H|)\cap L^q(\mathbb{R}^N,|K|).$$

引入记号

$$B(w,v):=\int_{\mathbb{R}^N}\big(|\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla v + V|w|^{p-2}wv\big)\,\mathrm{d}x, \qquad \beta_n:=a+c\|u_n\|^{p\tau}.$$

把 (9) 用于 u_n 与 u、$v=u_n-u$ 并相减，再按恒等式 $\beta_n=\big(a+c\|u\|^{p\tau}\big)+c\big(\|u_n\|^{p\tau}-\|u\|^{p\tau}\big)$ 拆分 Kirchhoff 系数，得

$$\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle = A_n+B_n-C_n-D_n, \tag{12}$$

其中

$$A_n=\beta_n\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\nabla(u_n-u)+V\big(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u\big)(u_n-u)\Big]\,\mathrm{d}x,$$

$$B_n=c\big(\|u_n\|^{p\tau}-\|u\|^{p\tau}\big)\int_{\mathbb{R}^N}\big[|\nabla u|^{p-2}\nabla u\,\nabla(u_n-u)+V|u|^{p-2}u\,(u_n-u)\big]\,\mathrm{d}x,$$

$$C_n=\lambda\int_{\mathbb{R}^N}H\big(|u_n|^{m-2}u_n-|u|^{m-2}u\big)(u_n-u)\,\mathrm{d}x,$$

$$D_n=\mu\int_{\mathbb{R}^N}K\big(|u_n|^{q-2}u_n-|u|^{q-2}u\big)(u_n-u)\,\mathrm{d}x.$$

现在逐条估计. (i) 软配对：$\|J'(u_n)\|_{X^*}\to 0$ 是 (PS) 假设，$\|u_n-u\|\le\|u_n\|+\|u\|\le C$（$\{u_n\}$ 有界，弱极限范数下半连续），故

$$\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle=o(1)\|u_n-u\|+o(1)\to 0. \tag{13}$$

这里前一项 $|\langle J'(u_n),u_n-u\rangle|\le\|J'(u_n)\|_{X^*}\|u_n-u\|=o(1)\|u_n-u\|$，后一项 $\langle J'(u),u_n-u\rangle\to 0$ 是弱收敛定义对固定泛函 $J'(u)\in X^*$ 的直接应用. (ii) 由 $\big||\xi|^{m-2}\xi-|\eta|^{m-2}\eta\big|\le|\xi|^{m-1}+|\eta|^{m-1}$ 与 Hölder 不等式，

$$|C_n|\le|\lambda|\big(\|u_n\|_{m,H}^{m-1}+\|u\|_{m,H}^{m-1}\big)\|u_n-u\|_{m,H}\to 0,$$

$$|D_n|\le|\mu|\big(\|u_n\|_{q,K}^{q-1}+\|u\|_{q,K}^{q-1}\big)\|u_n-u\|_{q,K}\to 0,$$

(iii) 令 $g(\omega):=B(u,\omega)$，由 $|g(\omega)|\le 2\|u\|^{p-1}\|\omega\|$ 知 $g\in X^*$；结合 $\{u_n\}$ 有界与 $u_n\rightharpoonup u$（即 $g(u_n-u)\to 0$）得

$$|B_n|\le c\,\big|\|u_n\|^{p\tau}-\|u\|^{p\tau}\big|\,|g(u_n-u)|\le c\big(\|u_n\|^{p\tau}+\|u\|^{p\tau}\big)|g(u_n-u)|\longrightarrow 0.$$

把 (i)–(iii) 代入 (12) 得

$$\beta_n\mathcal{S}_n\longrightarrow 0,\qquad \mathcal{S}_n:=B(u_n,u_n-u)-B(u,u_n-u). \tag{14}$$

往下按 $\liminf_n\beta_n$ 分两种情形（$\beta_n\ge 0$ 有界，故 $\liminf_n\beta_n=0$ 当且仅当存在子列 $\beta_{n_j}\to 0$）.

情形 1（$\liminf_n\beta_n>0$；特别地 $a>0$ 时自动成立，而 $u\neq 0$ 时由弱收敛的范数下半连续性 $\liminf_n\|u_n\|\ge\|u\|>0$ 亦给出 $\liminf_n\beta_n\ge c\|u\|^{p\tau}>0$）. 此时存在 $\beta_*>0$ 使 $\beta_n\ge\beta_*$（n 充分大），于是由 (14) 得 $\mathcal{S}_n\to 0$. 利用 $\mathbb{R}^N$ 上的标准不等式

$$\big\langle|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta,\xi-\eta\big\rangle\ge C_p|\xi-\eta|^p\quad(p\ge 2),$$

$$\big\langle|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta,\xi-\eta\big\rangle\ge\frac{C_p|\xi-\eta|^p}{(|\xi|+|\eta|)^{2-p}}\quad(1<p<2),$$

对梯度对 $(\xi,\eta)=(\nabla u_n,\nabla u)$ 逐点使用——在集合 $\{|\nabla u_n-\nabla u|>\delta(|\nabla u_n|+|\nabla u|)\}$ 上以因子 δ^{p-2} 吸收，在其补上以 $\delta^p\int(|\nabla u_n|+|\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x$ 控制（该积分一致有界），再令 $\delta\downarrow 0$——得 $\int|\nabla(u_n-u)|^p\,\mathrm{d}x\to 0$；含 V 的项同法（对加权对逐点使用同一不等式，补集控制用 $\int V(|u_n|+|u|)^p\,\mathrm{d}x$ 的一致有界性），得 $\int V|u_n-u|^p\,\mathrm{d}x\to 0$. 故 $\|u_n-u\|\to 0$.

情形 2（$\liminf_n\beta_n=0$）. 取子列 $\beta_{n_j}\to 0$，即 $a+c\|u_{n_j}\|^{p\tau}\to 0$，由 $c>0$、$\tau>0$ 与两项非负得 $a=0$ 且 $\|u_{n_j}\|\to 0$；弱极限的唯一性给出 $u=0$. 于是 $\mathcal{S}_n=B(u_n,u_n)=\|u_n\|^p$，$\beta_n\mathcal{S}_n=c\|u_n\|^{p(\tau+1)}$，$C_n=\lambda\|u_n\|_{m,H}^m$，$D_n=\mu\|u_n\|_{q,K}^q$，而 (12) 移项给出

$$c\,\|u_n\|^{p(\tau+1)}=\langle J'(u_n),u_n\rangle+\lambda\|u_n\|_{m,H}^m+\mu\|u_n\|_{q,K}^q,$$

右端第一项 $|\langle J'(u_n),u_n\rangle| \le \|J'(u_n)\|_{X^*}\|u_n\| = o(1)$，后两项由 $u_n \to 0$ 于 $L^m(\mathbb{R}^N,|H|)\cap L^q(\mathbb{R}^N,|K|)$ 趋于 0，故 $c\|u_n\|^{p(\tau+1)} \to 0$，结合 $c>0$ 得 $\|u_n\| \to 0 = u$，亦即强收敛. 两种情形下 $(PS)_c$ 均得证. $\{u_n\}$ 的收敛子列存在性由此对整条序列成立（标准的" 任一子列含收敛子子列" 论证）. □

3. 喷泉定理与高能量解列

沿用 §1 中由总双正交系 $\{e_j\}$ 给出的分解 Y_k、Z_k 与假设 (B)（即 (5)）. 先给出喷泉几何所需的尾量估计.

引理 3.1. *在 (V)、(H)、(K) 之下，*

$$\beta_k := \sup_{u\in Z_k,\,\|u\|=1}\|u\|_{q,K} \to 0, \qquad \sigma_k := \sup_{u\in Z_k,\,\|u\|=1}\|u\|_{m,H} \to 0, \qquad k\to\infty. \tag{15}$$

证明. 只证 $\beta_k\to 0$，σ_k 完全相同. 数列 $\{\beta_k\}$ 单调下降且有下界，设 $\beta_k\downarrow\beta\ge 0$. 若 $\beta>0$，取 $u_k\in Z_k$、$\|u_k\|=1$ 使 $\|u_k\|_{q,K}\ge\beta_k-\frac{1}{k}$. 由 X 自反，取子列（仍记 $\{u_k\}$）使 $u_k\rightharpoonup u$ 于 X. 对任意固定的 $j\in\mathbb{N}$，当 $k>j$ 时有 $u_k\in Z_k=\bigcap_{i=1}^{k-1}\ker e_i^*\subset\ker e_j^*$，故 $e_j^*(u)=\lim_k e_j^*(u_k)=0$（这里用到 $e_j^*\in X^*$ 的连续性）；因 $\{e_j^*\}$ 分离 X 中的点（双正交系的完全性），得 $u=0$. 又嵌入 $X\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N,K)$ 紧（引理 2.3），故 $\|u_k\|_{q,K}\to 0$，与 $\|u_k\|_{q,K}\ge\beta_k-\frac{1}{k}\to\beta>0$ 矛盾. 于是 $\beta=0$. □

引理 3.2 (喷泉定理，[15])**.** *设偶泛函 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$. 若存在 $\rho_k>\gamma_k>0$ 使*

$$(B_1)\ a_k := \inf_{u\in Z_k,\|u\|=\gamma_k} J(u)\to+\infty; \quad (B_2)\ b_k := \sup_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k} J(u)\le 0;$$

且 J 对 $c>0$ 满足 $(PS)_c$，则 J 有一列趋于 $+\infty$ 的临界值.

注 3.3. 引理 3.2 即 [15, 第 9 章] 的喷泉定理，其证明只要求 $\operatorname{codim} Z_k\le\dim Y_k$ 且 $\rho_k>\gamma_k$，本文的重叠性质恰好满足，故可逐字引用（$b_k<\infty$ 由 $\dim Y_k<\infty$ 与 J 的连续性给出）. 下文引理 4.2 之所以重新给出，是因为对偶情形的半径次序与区域取法在文献各版本间并不一致（注 4.3），而本文恰好卡在这两点上.

定理 1.2(i) 的证明. 由引理 2.5，J 对每一水平 c 满足 $(PS)_c$, 接下来只需在定理 1.2的条件下，验证喷泉引理的条件(B_1) 和(B_2) 成立.

(B_1). 记 $P:=p(\tau+1)$，则 $m<p<P<q<p^*$. 对满足 $\gamma_k\le\|u\|=\gamma$ 的 $u\in Z_k$，由 J 的定义 (8) 与尾量估计 (15)（对 $u\in Z_k$ 即 $\|u\|_{m,H}\le\sigma_k\|u\|$，$\|u\|_{q,K}\le\beta_k\|u\|$），并略去非负项 $\frac{a}{p}\gamma^p$，得

$$J(u)\ge\frac{c}{P}\gamma^P-\frac{\mu}{q}\beta_k^q\gamma^q-\frac{|\lambda|}{m}\sigma_k^m\gamma^m. \tag{16}$$

注意 $P-q<0$，故为使 q-项被压制，半径须取在 q-项与 P-项平衡点的**下方**. 令

$$\varrho_k:=\Big(\frac{\mu\beta_k^q}{c}\Big)^{\frac{1}{P-q}}\to+\infty\ (k\to\infty), \qquad \vartheta:=\min\Big\{1,\ \Big(\frac{2P}{q}\Big)^{\frac{1}{P-q}}\Big\}\in(0,1], \qquad \gamma_k:=\vartheta\varrho_k. \tag{17}$$

则 $\gamma_k\to+\infty$，且 $\gamma_k\le\varrho_k$，故由 $P-q<0$ 得

$$\gamma_k^{P-q}=\vartheta^{P-q}\varrho_k^{P-q}\ge\frac{2P}{q}\cdot\frac{\mu\beta_k^q}{c},\qquad\text{即}\qquad\frac{\mu}{q}\beta_k^q\gamma_k^q\le\frac{c}{2P}\gamma_k^P.$$

又因 $\gamma_k\to+\infty$ 而 $\sigma_k\to0$ 且 $P>m$，对充分大的 k 有 $\gamma_k^{P-m}\ge\frac{4P|\lambda|}{cm}\sigma_k^m$，即 $\frac{|\lambda|}{m}\sigma_k^m\gamma_k^m\le\frac{c}{4P}\gamma_k^P$. 代入 (16)：

$$a_k:=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=\gamma_k}J(u)\ge\Big(\frac{1}{P}-\frac{1}{2P}-\frac{1}{4P}\Big)c\gamma_k^P=\frac{c}{4P}\gamma_k^P\to+\infty.$$

(B_2). 由假设 (B)，半范数 $u\mapsto\|u\|_{q,K}$ 在 Y_k 的单位球面（有限维，故紧）上连续且无零点，因而 $\kappa_k:=\min_{u\in Y_k,\,\|u\|=1}\|u\|_{q,K}>0$ 可取到. 取

$$\rho_k=\max\left\{\gamma_k+1,\ \Big(\frac{3aq}{p\mu\kappa_k^q}\Big)^{\frac{1}{q-p}},\ \Big(\frac{3cq}{P\mu\kappa_k^q}\Big)^{\frac{1}{q-P}}\right\}\to\infty.$$

对 $u\in Y_k$、$\|u\|=\rho_k$，由 $\|u\|_{q,K}\ge\kappa_k\rho_k$ 与 $q>P>p$，

$$J(u)\le\frac{a}{p}\rho_k^p+\frac{c}{P}\rho_k^P-\frac{\mu}{q}\kappa_k^q\rho_k^q\le\frac{\mu}{3q}\kappa_k^q\rho_k^q+\frac{\mu}{3q}\kappa_k^q\rho_k^q-\frac{\mu}{q}\kappa_k^q\rho_k^q<0,$$

故 $b_k\le0$.

由引理 3.2，J 有一列临界值 $J(u_k)\to+\infty$，对应临界点 $\{u_k\}$ 即为 (1) 的解列. □

注 3.4. 上述证明中 $\|u\|$ 的 p 次项系数 a 从未被使用，故 $a=0$（退化 Kirchhoff）时结论仍然成立. 这是本文相对文 [13] 的一个实质放宽.

4. 对偶喷泉定理与小能量解列

引理 4.1 (交叠性质). 设 $0<\rho\le\gamma$，记环形域 $A_k(\gamma,\rho):=\{u\in Y_k:\rho<\|u\|<\gamma\}$ 与映射族

$$\mathcal{H}_k(\gamma,\rho):=\big\{h\in C\big(\overline{A_k(\gamma,\rho)},\,X\big):\ h\ \text{为奇映射},\ h\big|_{\partial A_k(\gamma,\rho)}=\mathrm{id}\big\}.$$

则 $\mathcal{H}_k(\gamma,\rho)\neq\varnothing$（含 id），且对一切 $h\in\mathcal{H}_k(\gamma,\rho)$，

$$h\big(\overline{A_k(\gamma,\rho)}\big)\cap\big(Z_k\setminus B_\rho\big)\neq\varnothing.\tag{18}$$

证明. 由 §1 的重叠性质，$0\neq e_k\in Y_k\cap Z_k$. 令 $u_*:=\gamma e_k/\|e_k\|$，则 $\|u_*\|=\gamma$，故 $u_*\in\partial A_k(\gamma,\rho)$，于是 $h(u_*)=u_*\in Z_k$；又 $\gamma\ge\rho$ 使 $u_*\notin B_\rho$（等号时由开集定义亦成立）. 故 $h(u_*)\in Z_k\setminus B_\rho$，(18) 得证. 这里只用 h 在外边界上的取值，无须 Borsuk–Ulam 定理；但这也说明 $\rho\le\gamma$ 不可颠倒：若取 $\rho>\gamma$，则 $\mathrm{id}\in\mathcal{H}_k$ 本身就是反例，因为 $\overline{A_k(\gamma,\rho)}\cap Z_k\subset\{te_k:|t|\|e_k\|\le\gamma\}$ 与 $Z_k\setminus B_\rho$ 不相交. □

引理 4.2 (对偶喷泉定理，[4, 5, 16]). 设 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$ 为偶泛函，$J(0)=0$，且存在 k_0 与

$0<\rho_k<\gamma_k$（$k\ge k_0$）使

$$(C_2)_k\quad \bar b_k:=\max_{u\in Y_k,\,\rho_k\le\|u\|\le\gamma_k}J(u)<0,\qquad (C_3)_k\quad \tilde a_k:=\inf_{u\in Z_k,\,\|u\|\ge\rho_k}J(u)\to 0\ \ (k\to\infty);$$

并设 (C_4) J 对一切 $c\in[\inf_k\tilde a_k,0]$ 满足 $(PS)_c$. 则对充分大的 k，

$$c_k:=\inf_{h\in\mathcal{H}_k(\gamma_k,\rho_k)}\ \max_{u\in\overline{A_k(\gamma_k,\rho_k)}}J(h(u))$$

是 J 的临界值，满足 $\tilde a_k\le c_k\le\bar b_k<0$；从而 J 有一列趋于 0^- 的临界值，其临界点两两互异且均非零.

证明. **第一步（区间）.** 取 $h=\mathrm{id}\in\mathcal{H}_k(\gamma_k,\rho_k)$ 得 $c_k\le\bar b_k<0$. 反向不等式来自引理 4.1：对任意 $h\in\mathcal{H}_k(\gamma_k,\rho_k)$，存在 $u_h\in\overline{A_k(\gamma_k,\rho_k)}$ 使 $h(u_h)\in Z_k\setminus B_{\rho_k}$，故 $\max J\circ h\ge J(h(u_h))\ge\tilde a_k$；取下确界即得 $c_k\ge\tilde a_k$.

第二步（临界性）. 余下的是极小极大定理的通用部分，本文不需要重证，只交代如何套用. 令 Γ_k 为集族 $\{h(\overline{A_k(\gamma_k,\rho_k)}):h\in\mathcal{H}_k(\gamma_k,\rho_k)\}$ 关于“保持边界取值不变的奇同伦”的同伦稳定闭包. 引理 4.1 说明 Γ_k 的每个成员都与 $Z_k\setminus B_{\rho_k}$ 相交（该交叠性在同伦下保持：若交叠在某时刻首次消失，则该时刻本身仍给出 $Z_k\setminus B_{\rho_k}$ 中的公共点，矛盾）；又 $\inf_{K\in\Gamma_k}\max_K J=c_k\le\bar b_k<\infty$（第一步），且 (C_4) 提供水平区间上的 $(PS)_c$. 于是 [15, 第 5、9 章] 的一般极小极大原理给出：c_k 为 J 的临界值.

第三步（结论）. 由 $\tilde a_k\le c_k\le\bar b_k<0$ 与 (C_3) 得 $c_k\to0^-$. 每个 $c_k<0=J(0)$，故对应临界点非零. 若临界值只有有限多个不同值，则 $\{c_k\}$ 必在某值上最终恒定，与该值 <0 而 $c_k\to0$ 矛盾；故 $\{c_k\}$ 两两不同（至少可取出无穷多个不同值），对应临界点亦互异. □

注 4.3 (半径次序与区域取法). 本引理有两点与常见表述不同，都是实质性的.（一）(C_2) 必须取去心环形域上的 max：若区域含原点，则由 h 为奇映射知 $h(0)=0$，从而 $\max J\circ h\ge J(0)=0$，与 $\bar b_k<0$ 冲突；文献中常见的“$\sup_{\|u\|=\gamma_k}J(u)<0$”只给球面信息，不足以支撑极小极大.（二）必须有 $\rho_k\le\gamma_k$：否则交叠性 (18) 对 $h=\mathrm{id}$ 失效；且按文献常见次序 $\gamma_k<\rho_k$，本文定理 1.2(ii) 的情形（$\tilde a_k\ge0$，见其证明的附带指出）将得出 $0\le\tilde a_k\le c_k\le\bar b_k<0$ 的空区间. 采用本引理的次序后，$\tilde a_k$ 只需 $\to0$、无须非负. (C_4) 取全空间 $(PS)_c$（引理 2.5），无须较弱的 $(PS)^*_c$.

定理 *1.3* 的证明. 记 $P:=p(\tau+1)$，窗口 $(\mathcal{W}_-)$ 即 $1<m<p<q<P<p^*$；设 $a\ge0$、$c>0$、$\lambda>0$、$\mu\in\mathbb{R}$. (C_4) 由引理 2.5 直接给出（J 在每一水平都满足 $(PS)_c$）. 对 $u\in Z_k$，由 (8)、(15) 与引理 2.2、2.3，

$$J(u)\ge\frac{a}{p}\|u\|^p+\frac{c}{P}\|u\|^P-\frac{\lambda}{m}\sigma_k^m\|u\|^m-\frac{|\mu|}{q}\beta_k^q\|u\|^q.\tag{19}$$

(C_3). 把 (19) 右端的 $\frac{c}{P}\|u\|^P$ 平分给两个负项：

$$J(u)\ge\Big(\frac{c}{2P}\|u\|^P-\frac{|\mu|}{q}\beta_k^q\|u\|^q\Big)+\Big(\frac{c}{2P}\|u\|^P-\frac{\lambda}{m}\sigma_k^m\|u\|^m\Big)+\frac{a}{p}\|u\|^p.$$

对每个括号用初等事实 $\inf_{t>0}\left(At^P - Bt^r\right) = -B\left(1-\frac{r}{P}\right)\left(\frac{Br}{AP}\right)^{\frac{r}{P-r}}$（$A,B>0$，$0<r<P$；此式由 $t^{P-r}=\frac{Br}{AP}$ 处的驻点直接算出）. 第一个括号取 $A=\frac{c}{2P}$、$r=q$、$B=\frac{|\mu|}{q}\beta_k^q$，此时 $\frac{Br}{AP}=\frac{2|\mu|}{c}\beta_k^q$；第二个括号取 $r=m$、$B=\frac{\lambda}{m}\sigma_k^m$，此时 $\frac{Br}{AP}=\frac{2\lambda}{c}\sigma_k^m$；又 $\frac{a}{p}\|u\|^p\ge 0$. 于是 (19) 右端在**整个** Z_k 上有下界

$$J(u) \;\ge\; -C_1\beta_k^{\frac{qP}{P-q}} - C_2\sigma_k^{\frac{mP}{P-m}} =: -\varepsilon_k, \tag{20}$$

其中用到 $C_1=\frac{|\mu|}{q}\left(1-\frac{q}{P}\right)\left(\frac{2|\mu|}{c}\right)^{\frac{q}{P-q}}$，$C_2=\frac{\lambda}{m}\left(1-\frac{m}{P}\right)\left(\frac{2\lambda}{c}\right)^{\frac{m}{P-m}}$，$q<P$ 与 $m<P$. 因 $\beta_k,\sigma_k\to 0$（引理 3.1）且各指数 $\frac{qP}{P-q},\frac{mP}{P-m}>0$，故 $\varepsilon_k\to 0$. 从而对任意 $\rho_k>0$ 都有 $\tilde a_k=\inf_{Z_k,\,\|u\|\ge\rho_k}J\ge -\varepsilon_k\to 0$，即 (C_3) 成立.

(C_2). 由假设 (B)（等价形式 (5) 的第二式）以及 Y_k 的单位球面为紧集、$u\mapsto\|u\|_{m,H}$ 连续，$\tilde\kappa_k:=\min_{u\in Y_k,\,\|u\|=1}\|u\|_{m,H}>0$ 可取到. 取 $\gamma_k>0$ 充分小，使

$$\frac{a}{p}\gamma_k^p+\frac{c}{P}\gamma_k^P+\frac{|\mu|}{q}C_K^q\gamma_k^q\le\frac{\lambda}{2m}\tilde\kappa_k^m\gamma_k^m; \tag{21}$$

这是可行的：两边除以 γ_k^m 后，左端三项分别为 γ_k^{p-m}、γ_k^{P-m}、γ_k^{q-m} 的常数倍，因 $m<p<P$、$m<q$ 而随 $\gamma_k\to 0$ 一致趋于 0，右端则是正常数 $\frac{\lambda}{2m}\tilde\kappa_k^m$. 这里 C_K 为引理 2.3 的嵌入常数（$\mu\ge 0$ 时第三项可略）. 又因 (21) 对一切足够小的半径同时成立，我们可要求

$$\gamma_k\le\frac{1}{k}\to 0\qquad(k\to\infty), \tag{22}$$

这一点在下面估计 $|\bar b_k|\to 0$ 时要用到. 现设 $u\in Y_k$，$0<\|u\|=:t\le\gamma_k$. 由 $\|u\|_{m,H}\ge\tilde\kappa_k t$ 与 $-\frac{\mu}{q}\|u\|_{q,K}^q\le\frac{|\mu|}{q}C_K^q t^q$，

$$J(u)\le t^m\Big(\frac{a}{p}t^{p-m}+\frac{c}{P}t^{P-m}+\frac{|\mu|}{q}C_K^q t^{q-m}-\frac{\lambda}{m}\tilde\kappa_k^m\Big).$$

括号中前三项均随 t 单调增（$p,q,P>m$），故由 (21) 在 $t=\gamma_k$ 处的不等式，对所有 $t\le\gamma_k$ 成立，于是

$$J(u)\le-\frac{\lambda}{2m}\tilde\kappa_k^m t^m<0\qquad(0<t\le\gamma_k).$$

据此取 $\rho_k:=\frac12\gamma_k$，则 $\overline{A_k(\gamma_k,\rho_k)}\subset\{u\in Y_k:0<\|u\|\le\gamma_k\}$ 上 $J<0$ 一致成立，(C_2) 得证. 进而，由 $t\ge\rho_k$ 与 $|J(u)|\le\frac{a}{p}t^p+\frac{c}{P}t^P+\frac{\lambda}{m}\sigma_1^m t^m+\frac{|\mu|}{q}C_K^q t^q\le Ct^m$（用到 $\sigma_k\le\sigma_1$，此为引理 3.1 中单调下降的推论）得

$$\bar b_k\;\le\;-\frac{\lambda}{2m}\tilde\kappa_k^m\rho_k^m<0,\qquad|\bar b_k|\le C\gamma_k^m\to 0,$$

这里 C 与 k 无关.

收尾. 取 γ_k 同时满足 (22) 与 (21)（两者都只要求 γ_k 充分小，故可行），并取 $\rho_k=\gamma_k/2$，则 (C_2) 成立且 $\bar b_k\le-\frac{\lambda}{2m}\tilde\kappa_k^m\rho_k^m\to 0^-$，而 (C_3) 的 $\tilde a_k\ge-\varepsilon_k\to 0$. 又 $\tilde a_k\le\bar b_k$ 自动成立：取 t 使 $\rho_k\le|t|\le\gamma_k$，则 te_k 属于环形域与 Z_k 之交，故 $\bar b_k\ge J(te_k)\ge\tilde a_k$. 于是引理 4.2 给出一列临界值 $c_k\in[\tilde a_k,\bar b_k]$，$c_k\to 0^-$，对应临界点 $\{v_k\}$ 非零且互异. 由推论 2.4，它们都是 (1) 的弱解. □

定理 *1.2(ii)* 的证明. 设窗口 $(\mathcal{W}_+)$：$1<m<p<P<q<p^*$，$a\geq 0$，$\lambda>0$，$\mu\leq 0$. (C_4) 仍由引理 2.5 给出. 对 $u\in Z_k$，此时 $-\frac{\mu}{q}\|u\|_{q,K}^q\geq 0$，故由 (19) 并舍弃非负项 $\frac{a}{p}\|u\|^p$，

$$J(u)\geq \frac{c}{P}\|u\|^P-\frac{\lambda}{m}\sigma_k^m\|u\|^m\ \geq\ -C_2\sigma_k^{\frac{mP}{P-m}}=:-\varepsilon_k^{(+)}\to 0$$

（C_2 即 (20) 中的常数，此处相当于 $\mu=0$ 故 C_1 项不出现）. 于是对**任意** $\rho_k>0$，

$$\tilde{a}_k=\inf_{u\in Z_k,\,\|u\|\geq\rho_k}J(u)\ \geq\ -\varepsilon_k^{(+)}\to 0,\qquad \text{即}(C_3)\text{ 成立.} \tag{23}$$

附带指出：令 $\varrho_k=\big(\lambda P/(cm)\big)^{1/(P-m)}\sigma_k^{m/(P-m)}$（趋于 0），则 $\|u\|\geq\varrho_k$ 时上式右端非负，即 $\inf_{Z_k,\|u\|\geq\varrho_k}J\geq 0$；但它不可充当 (C_3)——(C_3) 允许任意 ρ_k，而这一非负性只在半径不小于 ϱ_k 时成立. 若把它与文献常见的次序 $\gamma_k<\rho_k$ 同时写入，就会得出 $0\leq\tilde{a}_k\leq c_k\leq\bar{b}_k<0$ 的空区间（注 4.3 （二））.

(C_2) 的验证逐字照搬定理 1.3 的相应段落，无须改动：那里对 $-\frac{\mu}{q}\|u\|_{q,K}^q$ 的估计用的正是 $-\frac{\mu}{q}\|u\|_{q,K}^q\leq\frac{|\mu|}{q}C_K^q\|u\|^q$，对 $\mu\leq 0$ 同样适用；且 $\mathcal{W}_+$ 下 $m<p<P<q$ 仍使 $\big(\frac{a}{p}t^{p-m}+\frac{c}{P}t^{P-m}+\frac{|\mu|}{q}C_K^qt^{q-m}\big)$ 关于 t 单调增，故 (21) 在 $t=\gamma_k$ 成立即蕴含 $J<0$ 于整个 $0<\|u\|\leq\gamma_k$ 的 Y_k 部分. 取 $\rho_k:=\frac{1}{2}\gamma_k$（$\tilde{a}_k\leq\bar{b}_k$ 由交叠自动成立，同定理 1.3 的收尾），引理 4.2 给出一列临界值

$$\tilde{a}_k\ \leq\ c_k\ \leq\ \bar{b}_k\ <\ 0,\qquad c_k\to 0^-,$$

对应临界点非零且互异，由推论 2.4 即为 (1) 的一列小能量弱解. 注意所得能量是**自下方**趋于 0 的：这与引理 4.2 的夹逼方向一致，也说明定理 1.2(ii) 中原写的 0^+ 不可保留. □

5. 结语

本文在可积权条件下得到了 $\mathbb{R}^N$ 上带凹凸项的（可退化）p-Kirchhoff 方程的无穷多解；文中不依赖 Borsuk–Ulam 定理的交叠性质（引理 4.1）与可逐条核查的对偶喷泉形式（引理 4.2、注 4.3）构成本文的方法论改进. 就研究意义而言，本文的价值有两层：其一，在模型层面，可积性假设 (H)、(K) 把此前一致衰减框架无法涵盖的振荡型与尖峰型权函数纳入统一处理（见引言的讨论与注 1.1 的可验例）；其二，在方法层面，本文将“紧性恢复”与“喷泉几何核验”解耦的做法——以加权紧嵌入建立 (PS) 条件、以重叠（交叠）性质替代半径次序的逐条比对——具有超出本文方程的可移植性，可望用于分数阶 Kirchhoff 方程（临界指标换为 $p_s^*=\frac{Np}{N-sp}$）、变指数非局部方程以及 Heisenberg 群等非欧空间上的相应问题. 后续工作将结合归一化解（固定 L^2 质量）机制，并考虑分数阶与变指数情形的推广.

基金项目

盐城市科技项目 (应用基础研究计划 • 青年项目，项目编号：YCBK2026072)。

参考文献

[1] Kirchhoff, G. (1876) Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. B. G. Teubner.

[2] Alves, C.O., Corra, F.J.S.A. and Ma, T.F. (2005) Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. *Computers & Mathematics with Applications*, **49**, 85-93. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008

[3] Corra, F.J.S.A. and Figueiredo, G.M. (2009) On a p-Kirchhoff Equation via Krasnoselskii's Genus. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 819-822. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.06.042

[4] Liu, D. (2010) On a p-Kirchhoff Equation via Fountain Theorem and Dual Fountain Theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **72**, 302-308. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.06.052

[5] Liu, D. and Zhao, P. (2012) Multiple Nontrivial Solutions to a p-Kirchhoff Equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **75**, 5032-5038. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.018

[6] Wu, X. (2011) Existence of Nontrivial Solutions and High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 1278-1287. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.09.023

[7] Willem, M. and Zou, W. (2003) On a Schrödinger Equation with Periodic Potential and Spectrum Point Zero. *Indiana University Mathematics Journal*, **52**, 109-132. https://doi.org/10.1512/iumj.2003.52.2273

[8] Lin, X. and Tang, X.H. (2013) Existence of Infinitely Many Solutions for p-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **92**, 72-81. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.06.011

[9] Lyberopoulos, A.N. (2011) Quasilinear Scalar Field Equations with Competing Potentials. *Journal of Differential Equations*, **251**, 3625-3657. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.011

[10] Wu, T. (2006) On Semilinear Elliptic Equations Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **318**, 253-270. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.05.057

[11] Jiang, Z. (2025) Multiplicity of Solutions to a p-Kirchhoff Equation with Critical Exponent. *Boundary Value Problems*, **2025**, Article No. 78. https://doi.org/10.1186/s13661-025-02071-1

[12] Kim, Y., Park, C.Y. and Zeng, S. (2025) Infinitely Many Small Energy Solutions to the p-Laplacian Problems of Kirchhoff Type with Hardy Potential. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—S*, **18**, 1474-1499. https://doi.org/10.3934/dcdss.2024041

[13] 刘立华. $\mathbb{R}^N$ 上一类带有凹凸项的 p-Kirchhoff 方程无穷多解的存在性 [J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2984-2995.

[14] Singer, I. (1970) Bases in Banach Spaces I. Springer.

[15] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[16] Bartsch, T. and Willem, M. (1995) On an Elliptic Equation with Concave and Convex Nonlinearities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **123**, 3555-3561.
https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1995-1301008-2