Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(5), 328-338**
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145262

Hans汉斯

求解二维Allen-Cahn方程的保正隐式差分格式

赵紫琳

江西科技学院理学教学部，江西 南昌

收稿日期：2025年4月23日；录用日期：2025年5月16日；发布日期：2025年5月28日

摘　要

本文研究求解二维Allen-Cahn方程的保正隐式差分格式。通过证明得到当网格比满足$1+\tau-2R_x-2R_y\ge 0$时，差分解具有保正性，且在无穷范数意义下有$O\left(\tau+h_x^2+h_y^2\right)$的收敛阶，最后数值实验表明数值结果与理论结果相吻合。

关键词

Allen-Cahn方程，保正隐式差分格式，保正性，收敛性

Positive-Preserving Implicit Difference Scheme for Solving Two-Dimensional Allen-Cahn Equation

Zilin Zhao

Science Teaching Department, Jiangxi University of Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Apr. 23rd, 2025; accepted: May 16th, 2025; published: May 28th, 2025

Abstract

In this paper, we study the positive-preserving implicit difference scheme for solving two-dimensional Allen-Cahn equation. It is proved that when the grid ratio satisfies $1+\tau-2R_x-2R_y\ge 0$, the difference solution is positive-preserving and has the convergence order of $O\left(\tau+h_x^2+h_y^2\right)$ in the sense of infinite norm. Finally, numerical experiments show that the numerical results are consistent with the theoretical results.

文章引用: 赵紫琳. 求解二维 Allen-Cahn 方程的保正隐式差分格式[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 328-338.
DOI: 10.12677/aam.2025.145262

Keywords

Allen-Cahn Equation, Positive-Preserving Implicit Difference Scheme, Positive-Preserving, Convergence

1. 引言

Allen 和 Cahn [1]在描述晶体中反相边界运动时，首次提出 Allen-Cahn 方程。该方程广泛应用于各种领域[1]-[7]，例如二元合金在固定温度下的相分离过程、图像分割、囊泡膜、固体的成核、材料科学中的相变和界面动力学等。

本文将研究如下二维 Allen-Cahn 方程的初边值问题(IBVP)

$$u_t-\alpha\Delta u+u^3-u=0,\ (x,y)\in\Omega,\ 0<t\le T, \tag{1}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(x,y,t)=0,\ (x,y)\in\Gamma,\ 0\le t\le T. \tag{3}$$

其中，参数 $\alpha\ge 0$ 代表界面宽度，$u(x,y,t)$ 表示二元合金中金属部分的浓度，$\bar{\Omega}=[X_l,X_r]\times[Y_l,Y_r]$，$\Omega$ 为 $\bar{\Omega}$ 的内部点，Γ 为 $\bar{\Omega}$ 的边界点。

Allen-Cahn 方程具有重要的理论意义和实际意义，因此对其理论和数值方面的研究显得尤为重要。一方面，文献[8]-[12]已经得到了许多的理论结果，例如，精确解的存在性和极大值原理、精确解的动力学行为、平衡解的性质，以及亚稳态模式的生成、持续和湮灭等。此外，文献[13] [14]分别通过 tanh-coth 法和首次积分法得到了部分特殊的精确解。另一方面，Allen-Cahn 方程数值方法的研究受到了广泛关注。例如，差分法[15] [16]、有限元法[17] [18]。Tang 等[19]提出了一种显－隐式差分方法，该方法在时空方向均有一阶精度。随后，一维和高维 Allen-Cahn 方程[20]-[26]的各种高阶差分方法被建立。上述保结构算法都是全离散的隐式格式，因此计算相对复杂。

本文将构造保正隐式差分格式，应用 Vieta's 定理改造为显式差分方法，巧妙地避免了使用迭代法求解，提高了计算效率，此外该方法满足保正性的数学性质。

2. 记号与引理

首先，令时间步长 $\tau=T/N\left(N\in Z^+\right)$，$t_k=k\tau(0\le k\le N)$，将时间区域 $[0,T]$ 分割成 $\bar{\Omega}_\tau=\{t_k|k\tau,0\le k\le N\}$。在 $\bar{\Omega}_\tau$ 中，引入记号 $\delta_t V^k=\left(V^{k+1}-V^k\right)/\tau$。

对于空间方向，记空间区域 $\Omega=(X_l,X_r)\times(Y_l,Y_r)$，令 $h_x=(X_r-X_l)/M_x$，$h_y=(Y_r-Y_l)/M_y$ 分别为 x 和 y 方向的空间步长，其中 M_x、M_y 为正整数。记 $x_i=X_l+ih_x(0\le i\le M_x)$，$y_j=Y_l+jh_y\left(0\le j\le M_y\right)$。

定义离散网格 $\Omega_h=\{(i,j)|1\le i\le M_x-1,1\le j\le M_y-1\}$、$\partial\Omega_h=\{(i,j)|i,j=0\text{或}i=M_x,j=M_y\}$ 和 $\bar{\Omega}_h=\Omega_h\cup\partial\Omega_h$。设 $\Pi_h=\{V_{i,j}|(i,j)\in\bar{\Omega}_h\}$ 和 $\Pi_h^0=\{V_{i,j}|(i,j)\in\bar{\Omega}_h\text{且当}(i,j)\in\partial\Omega_h\text{时}V_{i,j}=0\}$ 为 $\bar{\Omega}_h$ 上的网格函数。引入如下差分算子：

$$\delta_x^2V_{i,j}=\left(V_{i-1,j}-2V_{i,j}+V_{i+1,j}\right)/h_x^2,\quad \delta_y^2V_{i,j}=\left(V_{i,j-1}-2V_{i,j}+V_{i,j+1}\right)/h_y^2,\quad \Delta_hV_{i,j}=\delta_x^2V_{i,j}+\delta_y^2V_{i,j}$$

以及对任意的 $V^k \in \Pi_h^0 \left(k=0,1,\cdots,N\right)$，定义如下范数

$$\left\|V^k\right\|_\infty = \max_{(i,j)\in\Omega_h, 0\le k\le N}\left(V_{i,j}^k\right),\ \left\|V^k\right\| = \sqrt{h_x h_y \sum_{i=1}^{M_x-1}\sum_{j=1}^{M_y-1}\left(V_{i,j}^k\right)^2},$$

$$\left\|\delta_x V^k\right\| = \sqrt{h_x h_y \sum_{i=0}^{M_x-1}\sum_{j=1}^{M_y-1}\left(\delta_x V_{i+\frac{1}{2},j}^k\right)^2},\ \left\|\delta_y V^k\right\| = \sqrt{h_x h_y \sum_{i=1}^{M_x-1}\sum_{j=0}^{M_y-1}\left(\delta_y V_{i,j+\frac{1}{2}}^k\right)^2},$$

$$\left\|V^k\right\|_{H^1} = \sqrt{\left\|V^k\right\|^2 + \left\|\delta_x V^k\right\|^2 + \left\|\delta_y V^k\right\|^2}.$$

引理 1 (Gronwall 不等式) 设 $\left\{F^{k+1}\middle|k\ge 0\right\}$ 为非负序列，且满足

$$F^{k+1} \le \left(1+c\tau\right)F^k + \tau g,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中，c 和 g 为非负常数，则有

$$F^k \le e^{ck\tau}\left(F^0 + \frac{g}{c}\right),\ k=0,1,2,\cdots$$

3. 差分格式的建立

记 $U_{i,j}^k$ 和 $u_{i,j}^k$ 分别表示方程(1)~(3)在 $\left(x_i,y_j,t_k\right)$ 点处的精确解和数值解。在结点 $\left(x_i,y_j,t_k\right)$ 处离散方程(1)，并注意到初边值条件(2)~(3)，可得

$$\delta_t U_{i,j}^k - \alpha\Delta_h U_{i,j}^k + \left(U_{i,j}^{k+1}\right)^2 U_{i,j}^k - U_{i,j}^k = R_{i,j}^k,\ \left(i,j\right)\in\Omega_h,\ 1\le k\le N, \tag{4}$$

$$U_{i,j}^0 = u_0\left(x_i,y_j\right),\ \left(i,j\right)\in\bar{\Omega}_h, \tag{5}$$

$$U_{i,j}^k = 0,\ \left(i,j\right)\in\partial\Omega_h,\ 0\le k\le N, \tag{6}$$

设初边值问题(2)~(3)的精确解 $u\left(x,y,t\right)\in C^{4,4,2}\left(\Omega\times\left[0,T\right]\right)$，则存在常数 C_1 使得

$$\left|R_{i,j}^k\right| \le C_1\left(\tau + h_x^2 + h_y^2\right),\ \left(i,j\right)\in\bar{\Omega}_h,\ 0\le k\le N, \tag{7}$$

成立。

在方程(4)中略去误差项 $R_{i,j}^k$，用数值解 $u_{i,j}^k$ 代替精确解 $U_{i,j}^k$，得到如下保正隐式差分格式：

$$\delta_t u_{i,j}^k - \alpha\Delta_h u_{i,j}^k + \left(u_{i,j}^{k+1}\right)^2 u_{i,j}^k - u_{i,j}^k = 0,\ \left(i,j\right)\in\Omega_h,\ 1\le k\le N, \tag{8}$$

$$u_{i,j}^0 = u_0\left(x_i,y_j\right),\ \left(i,j\right)\in\bar{\Omega}_h, \tag{9}$$

$$u_{i,j}^k = 0,\ \left(i,j\right)\in\partial\Omega_h,\ 0\le k\le N. \tag{10}$$

4. 差分格式的保正性

本节讨论差分格式(8)~(10)的解的保正性。

记 $R_x = \dfrac{\alpha\tau}{h_x^2}$ 和 $R_y = \dfrac{\alpha\tau}{h_y^2}$。定理 4.1 表明当初值 $u_0\left(x_i,y_j\right)$ 非负时，差分格式(8)~(10)的解是非负的。

定理 4.1 令 $\left\{u_{i,j}^k\middle|\left(i,j\right)\in\bar{\Omega}_h, 0\le k\le N\right\}$ 是差分格式(8)~(10)的解。假设初值条件满足 $u_0\left(x_i,y_j\right)\ge 0$，当 $1+\tau-2R_x-2R_y\ge 0$，其解 $u_{i,j}^k$ 仍然满足 $u_{i,j}^k\ge 0$，$\left(i,j\right)\in\bar{\Omega}_h$，$0\le k\le N$。

证明 下面证明差分格式(8)~(10)的保正性，首先将利用差分格式(8)~(10)进行整理得：

$$\tau u_{i,j}^k\left(u_{i,j}^{k+1}\right)^2 + u_{i,j}^{k+1} - R_x u_{i-1,j}^k - R_x u_{i+1,j}^k - \left(1+\tau-2R_x-2R_y\right)u_{i,j}^k - R_y u_{i,j-1}^k - R_x u_{i,j+1}^k = 0$$

利用韦达定理等价写成如下形式：

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{2H_{i,j}^{k}}{1+\sqrt{1+4\tau u_{i,j}^{k}H_{i,j}^{k}}},\ (i,j)\in\Omega_h,\ 1\le k\le N. \tag{11}$$

其中，$H_{i,j}^{k}=R_x u_{i-1,j}^{k}+R_x u_{i+1,j}^{k}+\left(1+\tau-2R_x-2R_y\right)u_{i,j}^{k}+R_y u_{i,j-1}^{k}+R_x u_{i,j+1}^{k}$。

当 $k=0$ 时，$u_{i,j}^{k}=u_0\left(x_i,y_j\right)\ge 0$，$(i,j)\in\bar{\Omega}_h$ 显然成立。假设 $k=1,2,\cdots,K-1$ 时，有 $u_{i,j}^{k}\ge 0$，$(i,j)\in\Omega_h$ 成立。根据边界条件 $u_{i,j}^{k}=0$，$(i,j)\in\partial\Omega_h$，$0\le k\le N$，可知 $u_{i,j}^{k}\ge 0$，$(i,j)\in\bar{\Omega}_h$，$k=1,2,\cdots,K-1$ 成立。

下面由归纳假设证明当 $k=1,2,\cdots,K-1,K$ 时，有 $u_{i,j}^{k}\ge 0$，$(i,j)\in\Omega_h$ 成立。首先令 $u_{i,j}^{k+1}=f(x)$，$x=H_{i,j}^{k}$，定义函数

$$f(x)=\frac{2x}{1+\sqrt{1+4\tau u_{i,j}^{k}x}}, \tag{12}$$

其中，当 $1+\tau-2R_x-2R_y\ge 0$ 时，$x\ge 0$，对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=\frac{2\left[1+2\tau u_{i,j}^{k}x+\sqrt{1+4\tau u_{i,j}^{k}x}\right]}{\left[1+\sqrt{1+4\tau u_{i,j}^{k}x}\right]^2\sqrt{1+4\tau u_{i,j}^{k}x}}\ge 0 \tag{13}$$

因此，$f(x)$ 是单调递增函数，从而可得

$$f(x)\ge f(0)=0 \tag{14}$$

因此，有 $u_{i,j}^{k}\ge 0$，$(i,j)\in\Omega_h$，又因为 $u_{i,j}^{K}=0$，$(i,j)\in\partial\Omega_h$，所以有 $u_{i,j}^{k}\ge 0$，$(i,j)\in\bar{\Omega}_h$ 成立。由归纳假设可证定理 4.1 成立。 □

5. 差分格式的收敛性

定理 4.2 令 $\left\{u_{i,j}^{k}\middle|(i,j)\in\bar{\Omega}_h,0\le k\le N\right\}$ 是差分格式(8)~(10)的数值解，$\left\{U_{i,j}^{k}\middle|(i,j)\in\bar{\Omega}_h,0\le k\le N\right\}$ 是(1)~(3)的精确解。令 $e_{i,j}^{k}=U_{i,j}^{k}-u_{i,j}^{k}$，$(i,j)\in\bar{\Omega}_h$，$0\le k\le N$，当 $u_0\left(x_i,y_j\right)\ge 0$，$1+\tau-2R_x-2R_y\ge 0$ 时，则有如下

$$\left\|e^k\right\|_\infty\le C_2\left(\tau+h_x^2+h_y^2\right),\ 0\le k\le N, \tag{15}$$

成立，其中 $C_2=e^T$。

证明 下面证明差分格式(8)~(10)的最大模估计，将方程(4)~(6)和(8)~(10)相减，得到如下误差方程：

$$\delta_t e_{i,j}^{k}-\alpha\Delta_h e_{i,j}^{k}+\left(U_{i,j}^{k+1}\right)^2U_{i,j}^{k}-\left(u_{i,j}^{k+1}\right)^2u_{i,j}^{k}-e_{i,j}^{k}=R_{i,j}^{k},\ (i,j)\in\Omega_h,\ 1\le k\le N, \tag{16}$$

$$e_{i,j}^{0}=0,\ (i,j)\in\bar{\Omega}_h, \tag{17}$$

$$e_{i,j}^{k}=0,\ (i,j)\in\partial\Omega_h,\ 0\le k\le N, \tag{18}$$

其中，$\left(U_{i,j}^{k+1}\right)^2U_{i,j}^{k}-\left(u_{i,j}^{k+1}\right)^2u_{i,j}^{k}=\left(U_{i,j}^{k+1}\right)^2e_{i,j}^{k}-\left(U_{i,j}^{k+1}+u_{i,j}^{k+1}\right)^2u_{i,j}^{k}e_{i,j}^{k+1}$。

将(16)等价地写成如下形式：

$$\begin{aligned}&\left[1+\tau u_{i,j}^{k}\left(U_{i,j}^{k+1}+u_{i,j}^{k+1}\right)\right]e_{i,j}^{k+1}\\&=R_xe_{i-1,j}^{k}+R_xe_{i+1,j}^{k}+\left[\left(1+\tau-2R_x-2R_y\right)-\tau\left(U_{i,j}^{k+1}\right)^2\right]e_{i,j}^{k}+R_ye_{i,j-1}^{k}+R_ye_{i,j+1}^{k}+\tau R_{i,j}^{k},\\&(i,j)\in\Omega_h,\ 1\le k\le N,\end{aligned} \tag{19}$$

对(19)两端分别取绝对值，并运用三角不等式，不难得到

$$\begin{aligned}\left|e_{i,j}^{k+1}\right| &\le \left[1+\tau u_{i,j}^{k}\left(U_{i,j}^{k+1}+u_{i,j}^{k+1}\right)\right]\left|e_{i,j}^{k+1}\right| \\ &\le R_x\left\|e^k\right\|_\infty + R_x\left\|e^k\right\|_\infty + \left\{1-2R_x-2R_y+\left[1-\left(U_{i,j}^{k}\right)^2\right]\tau\right\}\left\|e^k\right\|_\infty + R_y\left\|e^k\right\|_\infty + R_y\left\|e^k\right\|_\infty + \tau\left\|R^k\right\|_\infty \\ &\le (1+\tau)\left\|e^k\right\|_\infty + \tau\left\|R^k\right\|_\infty\end{aligned} \tag{20}$$

则

$$\left\|e^{k+1}\right\|_\infty \le (1+\tau)\left\|e^k\right\|_\infty + \tau\left\|R^k\right\|_\infty, \tag{21}$$

再运用引理 1 可得

$$\left\|e^{k+1}\right\|_\infty \le e^T\left\|R^k\right\|_\infty. \tag{22}$$

定理 3.2 证毕。 □

6. 数值算例

本节将给出求解一维和二维 Allen-Cahn 方程的两个数值算例。算例 1 和算例 2 表明保正隐式差分格式(8)~(10)在时空方向分别具有一阶和二阶精度，具有保正的数学性质。这些数值结果和理论结果是吻合的。

算例 1 首先考虑如下一维 Allen-Cahn 方程的 IBVP

$$u_t-\alpha u_{xx}+u^3-u=0,\ -L<x<L,\ 0<t\le T, \tag{23}$$

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\tanh\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)+\frac{1}{2},\ -L\le x\le L, \tag{24}$$

$$u(L,t)=\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(L-\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right]+\frac{1}{2},\ 0\le t\le T \tag{25}$$

$$u(-L,t)=\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-L-\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right]+\frac{1}{2},\ 0\le t\le T \tag{26}$$

当 $\alpha=1$ 时，该方程的精确解为：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right]+\frac{1}{2}$$

令 $\Omega=[-5,5]$，$[0,T]=[0,1]$，由差分格式(8)~(10)获得的数值解，在 $t=1$ 处的 L^∞-范数、L^2-范数和 H^1-范数误差及相应的收敛阶分别记为 ME、LE、HE、r^∞、r_{L^2}、r_H.

表 1 给出了差分格式(8)~(10)在取不同网格步长时所得数值解 u_i^k 的误差和收敛阶。它表明差分格式(8)~(10)在不同范数意义下在时空方向上分别具有一阶和二阶收敛阶。

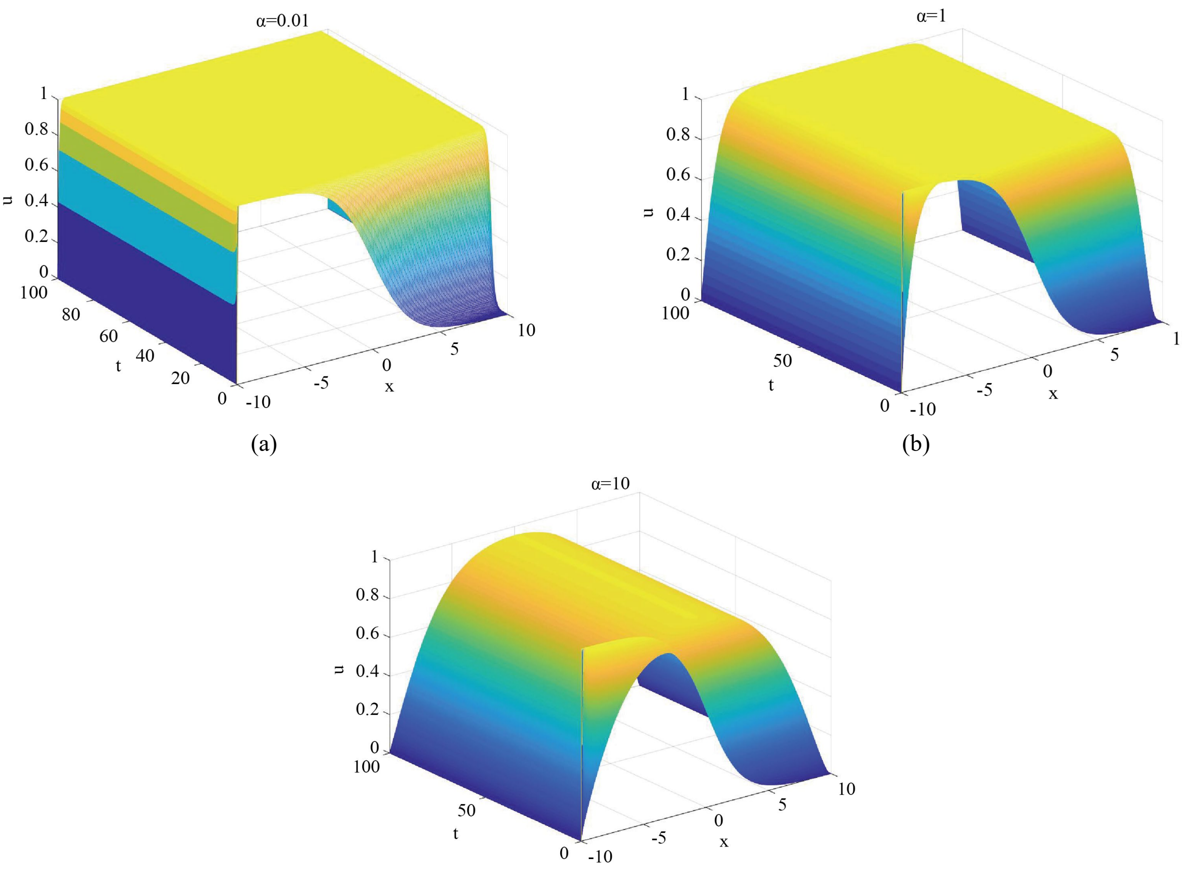
为了验证数值解的保正性，记 $RT=1+\tau-2R_x$，接下来在 $\Omega=[-10,10]$、$[0,T]=[0,100]$ 上求解带任意参数 α 的 IBVP (23)~(26)。此时该问题没有精确解。

图 1 给出了当网格步长 $h_x=1/16$、$\tau=0.5h_x^2/\alpha$ 以及参数 α 取 0.01,0,10 时运用差分法(8)~(10)所得数值解的曲面图。从该图可观察到当 $\alpha=0.01,1,10$ 时，$RT\ge 0$，数值解具有保正性。而表 2 给出了当 $RT<0$ 时，数值解不满足保正性，例如 $\alpha=1,10$，$h_x=1/16$，$\tau=h_x^2$。

Table 1. Error and convergence order $\left(\tau = \frac{1}{2}h_x^2\right)$ of u_i^k when the difference scheme takes different step sizes

表 1. 差分格式取不同步长时 u_i^k 的误差和收敛阶 $\left(\tau = \frac{1}{2}h_x^2\right)$

h_x	ME	r^∞	LE	r_{L^2}	HE	r_H	CPU
1/2	2.2262e−02	*	4.5074e−02	*	4.8544e−02	*	0.000181 s
1/4	5.9182e−03	1.9113	1.1954e−02	1.9148	1.2878e−02	1.9144	0.000424 s
1/8	1.5035e−03	1.9769	3.0347e−03	1.9778	3.2696e−03	1.9777	0.001239 s
1/16	3.7745e−04	1.9939	7.6162e−04	1.9944	8.2060e−04	1.9944	0.005073 s



(a) (b) (c)

Figure 1. Surface diagrams of numerical solution when taking $\alpha = 0.01,1,10$, $h_x = 1/16$, and $\tau = 0.5h_x^2/\alpha$

图 1. 取 $\alpha = 0.01,1,10$ 、 $h_x = 1/16$ 、 $\tau = 0.5h_x^2/\alpha$ 时数值解的曲面图

Table 2. Numerical solution at $x = 0,\ t = 50$ when taking $\alpha = 1,10$, $h_x = 1/16$, and $\tau = h_x^2$

表 2. 取 $\alpha = 1,10$ 、 $h_x = 1/16$ 、 $\tau = h_x^2$ 时 $x = 0,\ t = 50$ 处的数值解

α	h_x	τ	网格点	数值解
1	1/16	1/256	$x = 0, t = 50$	−1.2468e−60 − 22.6053i
10	1/16	1/256	$x = 0, t = 50$	−2.1950e−27 − 95.8794i

算例 2 考虑如下二维 Allen-Cahn 方程的 IBVP

$$u_t-\alpha\Delta u+u^3-u=0,\ (x,y)\in\Omega,\ 0<t\le T, \tag{27}$$

$$u(x,y,0)=\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x\sin\varphi+y\cos\varphi)+C\right]+\frac{1}{2},\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{28}$$

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x\sin\varphi+y\cos\varphi)+\frac{3}{4}t+C\right]+\frac{1}{2},\ (x,y)\in\Gamma,\ 0\le t\le T \tag{29}$$

当 $\alpha=1$ 时，该方程的精确解为：

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2}\tanh\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x\sin\varphi+y\cos\varphi)+\frac{3}{4}t+C\right]+\frac{1}{2}$$

令 $\bar{\Omega}=[0,1]\times[0,1]$，$[0,T]=[0,1]$，由差分格式(8)~(10)获得的数值解，在 $t=1$ 处的 L^∞ - 范数、L^2 - 范数和 H^1 – 范数误差及相应的收敛阶分别记为 ME^*、LE^*、HE^*、$\bar{r}^\infty$、$\bar{r}_{L^2}$、$\bar{r}_H$。

表 3 给出了差分格式(8)~(10)在取不同网格步长时所得数值解 $u_{i,j}^k$ 的误差和收敛阶。它表明差分格式(8)~(10)在不同范数意义下在时空方向上分别具有一阶和二阶收敛阶。

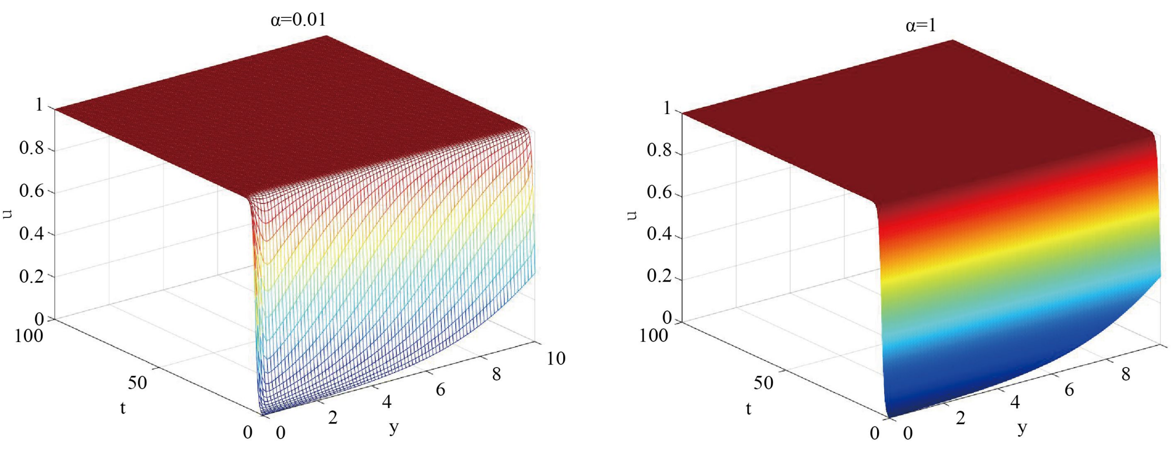
Table 3. Error and convergence order $\left(h_x^2=h_y^2,\tau=\frac{1}{4}h_x^2\right)$ of $u_{i,j}^k$ when the difference scheme takes different step sizes

表 3. 差分格式取不同步长时 $u_{i,j}^k$ 的误差和收敛阶 $\left(h_x^2=h_y^2,\tau=\frac{1}{4}h_x^2\right)$

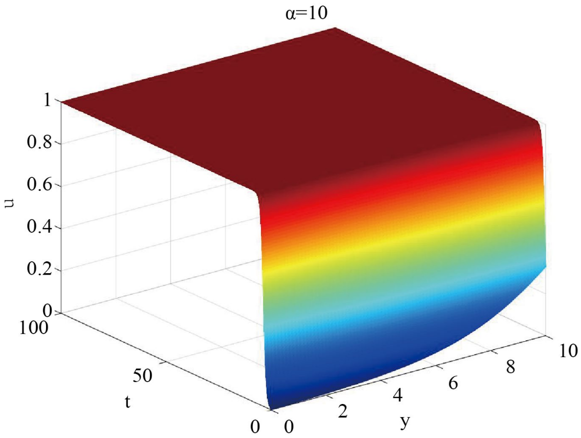
h_x	ME^*	$\bar{r}^\infty$	LE^*	$\bar{r}_{L^2}$	HE^*	$\bar{r}_H$	CPU
1/4	1.2419e−04	*	6.8822e−05	*	3.0778e−04	*	0.001641 s
1/8	3.2041e−05	1.9545	1.7924e−05	1.9410	8.2523e−05	1.8990	0.006714 s
1/16	8.0771e−06	1.9880	4.5230e−06	1.9866	2.0998e−05	1.9745	0.036086 s
1/32	2.0269e−06	1.9945	1.1333e−06	1.9967	5.2730e−06	1.9936	0.295275 s

为了验证差分格式(8)~(10)的保正性，记 $RRT=1+\tau-2R_x-2R_y$，下面在 $\Omega=[0,10]\times[0,10]$ 和 $[0,T]=[0,100]$ 上求解带任意参数 α 的 IBVP (23)~(26)。此时该问题没有精确解。

图 2、图 3 分别展示了当网格步长 $h_x=h_y=1/8$、$\tau=0.25h_x^2/\alpha$ 以及参数 α 取 0.01,0,10 时运用差分格



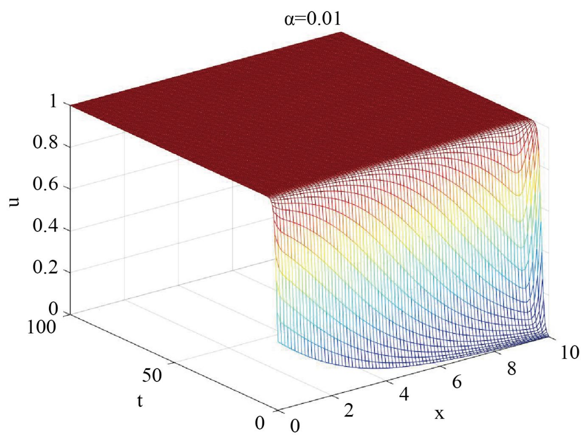
(a) (b)



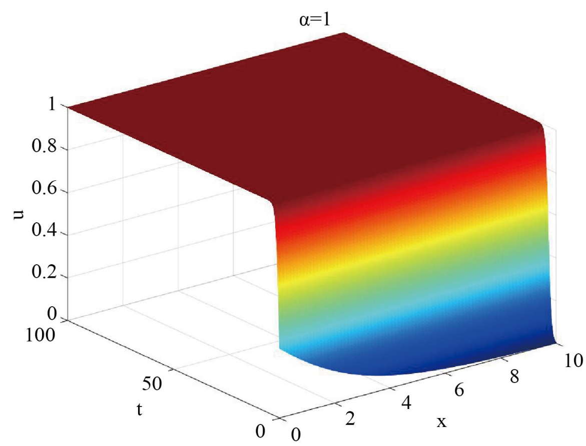
(c)

Figure 2. Surface diagrams of numerical solution of $x=5$ when taking $\alpha=0.01,1,10$, $h_x=h_y=1/8$, and $\tau=0.25h_x^2/\alpha$

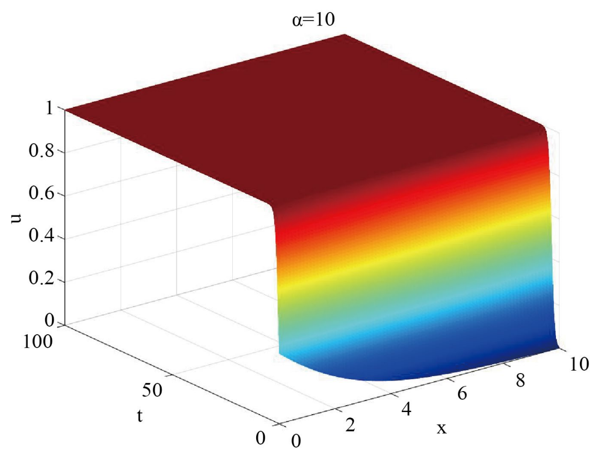
图 2. 取 $\alpha=0.01,1,10$ 、$h_x=h_y=1/8$ 、$\tau=0.25h_x^2/\alpha$ 时 $x=5$ 数值解的曲面图



(a)



(b)



(c)

Figure 3. Surface diagrams of numerical solution of $y=5$ when taking $\alpha=0.01,1,10$, $h_x=h_y=1/8$, and $\tau=0.25h_x^2/\alpha$

图 3. 取 $\alpha=0.01,1,10$ 、$h_x=h_y=1/8$ 、$\tau=0.25h_x^2/\alpha$ 时 $y=5$ 数值解的曲面图

式(8)~(10)所得 $x=5$ 、 $y=5$ 时数值解的曲面图。图 4 展示了当网格步长 $h_x=h_y=1/8$ 、 $\tau=0.25h_x^2/\alpha$ 以及参数 α 取 0.01,0,10 时运用差分格式(8)~(10)所得不同 (x,y) 处数值解的曲面图。从这些图可观察到，当 $\alpha=0.01,1,10$ 时， $RRT\geq 0$ ，数值解具有保正性。而表 4 给出了当 $RRT<0$ 时，数值解不满足保正性，例如 $\alpha=1,10,\ h_x=h_y=1/4,\ \tau=h_x^2$ 。

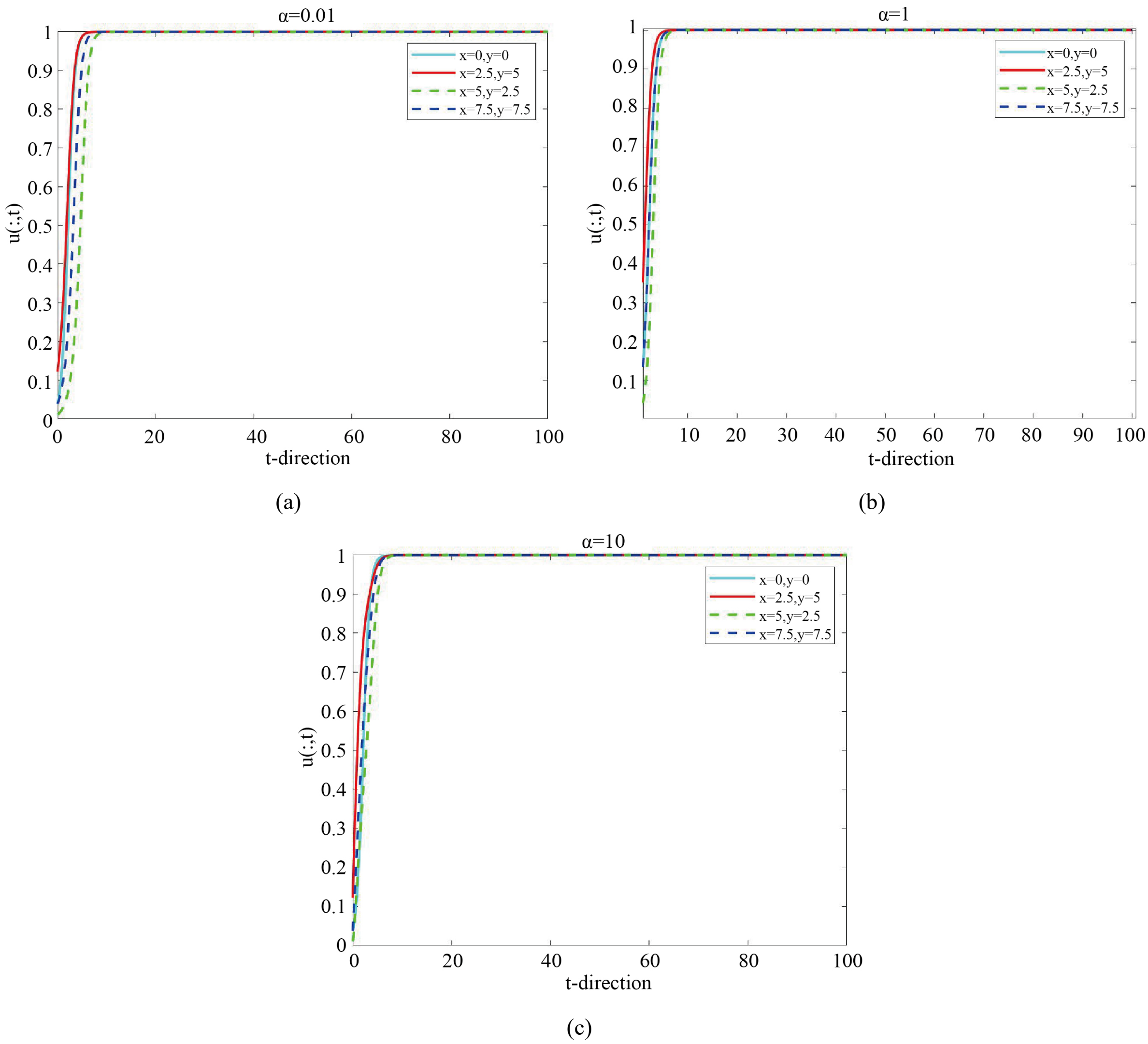


Figure 4. Curves of numerical solutions at different points (x,y) when taking $\alpha=0.01,1,10$, $h_x=h_y=1/8$, and $\tau=0.25h_x^2/\alpha$

图 4. 取 $\alpha=0.01,1,10$ 、 $h_x=h_y=1/8$ 、 $\tau=0.25h_x^2/\alpha$ 时不同 (x,y) 处数值解的曲线图

Table 4. Numerical solution at $x=5,\ y=5,\ t=50$ when taking $\alpha=1,10$, $h_x=h_y=1/4$, and $\tau=h_x^2$

表 4. 取 $\alpha=1,10$ 、 $h_x=h_y=1/4$ 、 $\tau=h_x^2$ 时 $x=5,\ y=5,\ t=50$ 处的数值解

α	h_x	τ	网格点	数值解
1	1/4	1/16	$x=5,\ y=5,\ t=50$	−0.0000004 + 9.7468i
10	1/4	1/16	$x=5,\ y=5,\ t=50$	−0.00000000001 − 35.2156i

7. 结论

本文对二维 Allen-Cahn 方程的初边值问题建立了一个保正隐式差分格式，证明了该格式具有保正的数学性质，且在 L^∞ - 范数意义下有 $O\left(\tau+h_x^2+h_y^2\right)$ 的收敛阶。此外，利用韦达定理将隐式格式改造成显式格式，极大地提高了计算效率。数值结果验证了只要网格步长以及参数 α 满足 $1+\tau-2R_x-2R_y\geq 0$，则数值解就满足收敛阶为 $O\left(\tau+h_x^2+h_y^2\right)$ 和保正性。

参考文献

[1] Allen, S.M. and Cahn, J.W. (1979) A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and Its Application to Antiphase Domain Coarsening. *Acta Metallurgica*, **27**, 1085-1095. https://doi.org/10.1016/0001-6160(79)90196-2

[2] Wheeler, A.A., Boettinger, W.J. and McFadden, G.B. (1992) Phase-Field Model for Isothermal Phase Transitions in Binary Alloys. *Physical Review A*, **45**, 7424-7439. https://doi.org/10.1103/physreva.45.7424

[3] Feng, X. and Prohl, A. (2003) Numerical Analysis of the Allen-Cahn Equation and Approximation for Mean Curvature Flows. *Numerische Mathematik*, **94**, 33-65. https://doi.org/10.1007/s00211-002-0413-1

[4] Beneš, M., Chalupecký, V. and Mikula, K. (2004) Geometrical Image Segmentation by the Allen-Cahn Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **51**, 187-205. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.05.001

[5] Golubović, L., Levandovsky, A. and Moldovan, D. (2011) Interface Dynamics and Far-from-Equilibrium Phase Transitions in Multilayer Epitaxial Growth and Erosion on Crystal Surfaces: Continuum Theory Insights. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, **1**, 297-371. https://doi.org/10.4208/eajam.040411.030611a

[6] Kim, J. (2012) Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows. *Communications in Computational Physics*, **12**, 613-661. https://doi.org/10.4208/cicp.301110.040811a

[7] He, D. and Pan, K. (2018) Maximum Norm Error Analysis of an Unconditionally Stable Semi-Implicit Scheme for Multi-Dimensional Allen-Cahn Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **35**, 955-975. https://doi.org/10.1002/num.22333

[8] Hale, J. (2010) Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/surv/025

[9] Temam, R. (2012) Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer Science and Business Media.

[10] Chafee, N. and Infante, E.F. (1974) A Bifurcation Problem for a Nonlinear Partial Differential Equation of Parabolic Type. *Applicable Analysis*, **4**, 17-37. https://doi.org/10.1080/00036817408839081

[11] Chen, X. (2004) Generation, Propagation, and Annihilation of Metastable Patterns. *Journal of Differential Equations*, **206**, 399-437. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.05.017

[12] Elliott, C.M. and Stuart, A.M. (1993) The Global Dynamics of Discrete Semilinear Parabolic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **30**, 1622-1663. https://doi.org/10.1137/0730084

[13] Wazwaz, A. (2007) The Tanh-Coth Method for Solitons and Kink Solutions for Nonlinear Parabolic Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **188**, 1467-1475. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.013

[14] Taşcan, F. and Bekir, A. (2009) Travelling Wave Solutions of the Cahn-Allen Equation by Using First Integral Method. *Applied Mathematics and Computation*, **207**, 279-282. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.10.031

[15] Feng, X., Song, H., Tang, T. and Yang, J. (2013) Nonlinear Stability of the Implicit-Explicit Methods for the Allen-Cahn Equation. *Inverse Problems & Imaging*, **7**, 679-695. https://doi.org/10.3934/ipi.2013.7.679

[16] Long, J., Luo, C., Yu, Q. and Li, Y. (2019) An Unconditional Stable Compact Fourth-Order Finite Difference Scheme for Three Dimensional Allen-Cahn Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 1042-1054. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.028

[17] Chen, Y., Huang, Y. and Yi, N. (2019) A SCR-Based Error Estimation and Adaptive Finite Element Method for the Allen-Cahn Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **78**, 204-223. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.02.022

[18] Xiao, X., He, R. and Feng, X. (2019) Unconditionally Maximum Principle Preserving Finite Element Schemes for the Surface Allen-Cahn Type Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **36**, 418-438. https://doi.org/10.1002/num.22435

[19] Tao Tang, T.T. and Jiang Yang, J.Y. (2016) Implicit-Explicit Scheme for the Allen-Cahn Equation Preserves the Maximum Principle. *Journal of Computational Mathematics*, **34**, 451-461. https://doi.org/10.4208/jcm.1603-m2014-0017

[20] Hou, T., Wang, K., Xiong, Y., Xiao, X. and Zhang, S. (2017) Discrete Maximum-Norm Stability of a Linearized Second-Order Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equation. *Numerical Analysis and Applications*, **10**, 177-183. https://doi.org/10.1134/s1995423917020082

[21] Hou, T. and Leng, H. (2020) Numerical Analysis of a Stabilized Crank-Nicolson/Adams-Bashforth Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equations. *Applied Mathematics Letters*, **102**, Article ID: 106150. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106150

[22] Hou, T., Xiu, D. and Jiang, W. (2020) A New Second-Order Maximum-Principle Preserving Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equations with Periodic Boundary Conditions. *Applied Mathematics Letters*, **104**, Article ID: 106265. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106265

[23] Feng, J., Zhou, Y. and Hou, T. (2021) A Maximum-Principle Preserving and Unconditionally Energy-Stable Linear Second-Order Finite Difference Scheme for Allen-Cahn Equations. *Applied Mathematics Letters*, **118**, Article ID: 107179. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107179

[24] Tan, Z. and Zhang, C. (2021) The Discrete Maximum Principle and Energy Stability of a New Second-Order Difference Scheme for Allen-Cahn Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **166**, 227-237. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.04.010

[25] Wang, X., Kou, J. and Gao, H. (2021) Linear Energy Stable and Maximum Principle Preserving Semi-Implicit Scheme for Allen-Cahn Equation with Double Well Potential. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **98**, Article ID: 105766. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105766

[26] 乔寒月, 张鑫, 刘晓, 等. 一维 Allen-Cahn 方程紧差分格式的离散最大化原则和能量稳定性研究[J]. 应用数学学报, 2021, 44(1): 79-92.