Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 187-195
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145247

Hans汉斯

椭圆锥面与椭圆抛物面的AVI动态图制作

赵志琴[1]，刘孝艳[1]，罗　亮[2]，郝修清[1]

[1]西安石油大学理学院，陕西 西安
[2]西安邮电大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2025年4月21日；录用日期：2025年5月13日；发布日期：2025年5月21日

摘　要

在常见二次曲面教学中，给定三元二次方程判断其曲面形状是一大难点，需要学生具备较强的空间想象能力，将方程与三维图形建立联系。传统的“板书 + 粉笔”教学方式存在局限，所绘静态图耗时且抽象，不利于学生理解。MATLAB凭借强大的绘图功能与程序设计技巧，可制作AVI格式动态图并直接插入PPT用于课堂教学。本文借助MATLAB编程，针对椭圆锥面和椭圆抛物面这两种常见且难区分的二次曲面展开教学探讨。从截痕法、伸缩变形法这两个维度实现AVI动态图制作，辅助课堂教学。让教学内容更生动形象，增强直观性，激发学生的积极性，有效提升学生的空间想象、分析及解决问题的能力，助力学生扎实掌握知识。

关键词

椭圆锥面，椭圆抛物面，截痕法，伸缩变形法

The Production of AVI Dynamic Images of Elliptic Cones and Elliptic Paraboloids

Zhiqin Zhao[1], Xiaoyan Liu[1], Liang Luo[2], Xiuqing Hao[1]

[1]School of Science, Xi’an Shiyou University, Xi’an Shaanxi
[2]School of Science, Xi’an University of Posts and Telecommunications, Xi’an Shaanxi

Received: Apr. 21st, 2025; accepted: May 13th, 2025; published: May 21st, 2025

Abstract

In the teaching of common quadratic surfaces, determining the shape of a surface given a ternary quadratic equation is a major difficulty, which requires students to have strong spatial imagination and establish a connection between the equation and the three-dimensional graph. The traditional

文章引用: 赵志琴, 刘孝艳, 罗亮, 郝修清. 椭圆锥面与椭圆抛物面的 AVI 动态图制作[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 187-195. DOI: 10.12677/aam.2025.145247

"blackboard + chalk" teaching method has limitations. The static graphs drawn are time-consuming and abstract, which is not conducive to students' understanding. MATLAB, with its powerful drawing capabilities and programming skills, can create dynamic AVI format images and directly insert them into PPT for classroom teaching. This paper uses MATLAB programming to conduct teaching discussions on two common and difficult-to-distinguish quadratic surfaces: elliptic cones and elliptic paraboloids. The AVI dynamic images are created from two dimensions: the section method and the stretching and deformation method to assist classroom teaching. This makes the teaching content more vivid and intuitive, enhances the directness, stimulates students' enthusiasm, effectively improves students' spatial imagination, analysis and problem-solving abilities, and helps students master the knowledge solidly.

Keywords

Elliptic Cone, Elliptic Paraboloid, Section Method, Stretching and Deformation Method

1. 引言

《高等数学》作为理工科关键公共必修课，其空间解析几何里的五类二次曲面，在多元函数微积分中应用广泛。然而，不少同学后续面对涉及二次曲面的计算时，因难以将三元二次方程与曲面形状对应，缺乏空间想象感而不知所措。因此，教学中着力培养学生的空间想象与绘图能力，对筑牢微积分学习根基极为关键。

随着计算机技术的飞速发展，各类设计软件不断涌现。MATLAB 以其卓越的绘图与程序设计功能脱颖而出，能够生成极为逼真的二次曲面动态图，并轻松保存为 AVI 格式，可无缝插入 PPT 中播放。教师运用这一优势，在课堂上直观展示，能极大地提升学生的兴趣，显著增强教学效果，助力学生理解知识，其源代码更能促进学生学习程序语言。

在教育领域持续创新的当下，诸多学者已借助先进软件，对二次曲面教学展开了深入探索。如刘兴元、何宜军[1]基于 Mathematica 软件，巧妙地探讨了截痕法和伸缩法在二次曲面教学中的应用；度巍[2]则借助 MATLAB 的强大功能，成功实现了二次曲面截痕法的动态演示；洪晓芬[3]利用 MATLAB 动画制作原理将高等数学中的一些抽象函数的图形及二次曲面的形成过程动态而直观地进行展示。受这些研究成果的启发，笔者结合教学实践中发现学生存在的问题，充分利用 MATLAB 软件精心制作 AVI 动态图，用以生动演示椭圆锥面与椭圆抛物面这两类常见却又极易混淆的标准二次曲面的动态形成过程。下文将从两类曲面的标准方程、参数方程形式不同，截痕法以及伸缩法作图过程不同展开介绍。

2. 标准方程及参数方程形式不同

2.1. 椭圆锥面

$$\text{标准方程：}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2,$$

$$\text{参数方程：}\quad \begin{cases} x = au\cos\theta, \\ y = bu\sin\theta, \\ z = u. \end{cases}$$

其中，$\theta\in[0,2\pi]$，$u\in R$。

2.2. 椭圆抛物面

$$\text{标准方程：}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,$$

$$\text{参数方程：}\begin{cases}x=au\cos\theta,\\ y=bu\sin\theta,\\ z=u^2.\end{cases}$$

其中，$\theta\in[0,2\pi]$，$u\in R$。

或

$$\begin{cases}x=a\sqrt{u}\cos\theta,\\ y=b\sqrt{u}\sin\theta,\\ z=u.\end{cases}$$

其中，$\theta\in[0,2\pi]$，$u\geq 0$。

3. 图形特征(截痕)不同

截痕法，即用坐标面和平行于坐标面的平面去截曲面，考察它们的交线(截痕)的形状，加以综合，从而了解曲面的全貌。本文针对椭圆锥面和椭圆抛物面，用三类平行于坐标面的平面分别去截相应曲面，研究其截痕形状。

3.1. 椭圆锥面

① 用与 XOY 面平行的平面 $z=k,(k\in R)$ 与椭圆锥面相交截得交线方程为：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2,\\ z=k.\end{cases}$$

由上式知：当 $k\neq 0$ 时，截痕是椭圆，其长轴和短轴分别是 $a|k|$、$b|k|$；当 $k=0$ 时，截痕就是坐标原点，如图 1 所示。

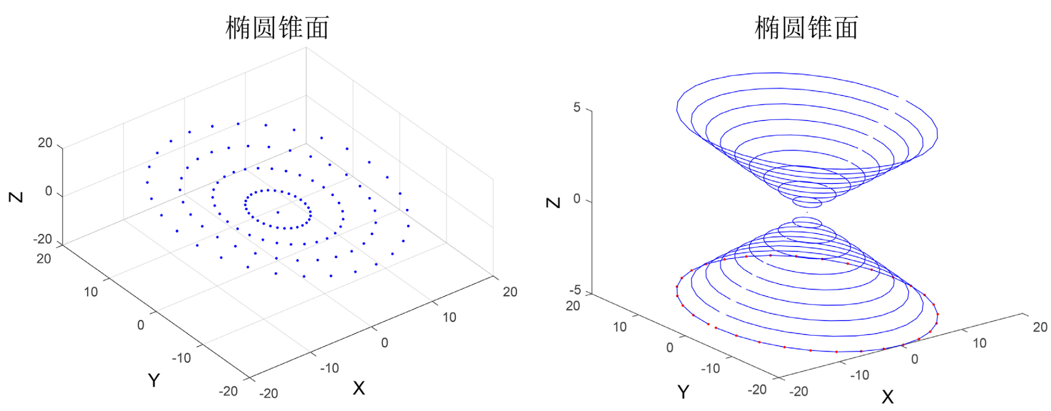

Figure 1. Intersection curve of the elliptic cone and the plane $z=k,(k\in R)$

图 1. 椭圆锥面与平面 $z=k,(k\in R)$ 相交的截痕

② 用与 YOZ 面平行的平面 $x=k,(k\in R)$ 与椭圆锥面相交截得交线方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2,\\ x=k.\end{cases}$$

由上式知：当 $k\neq 0$ 时，截痕是平行于 YOZ 面的直线(不相交)，当 $k=0$ 时，截痕就是过坐标原点的两条相交直线，如图 2 (左侧)所示。

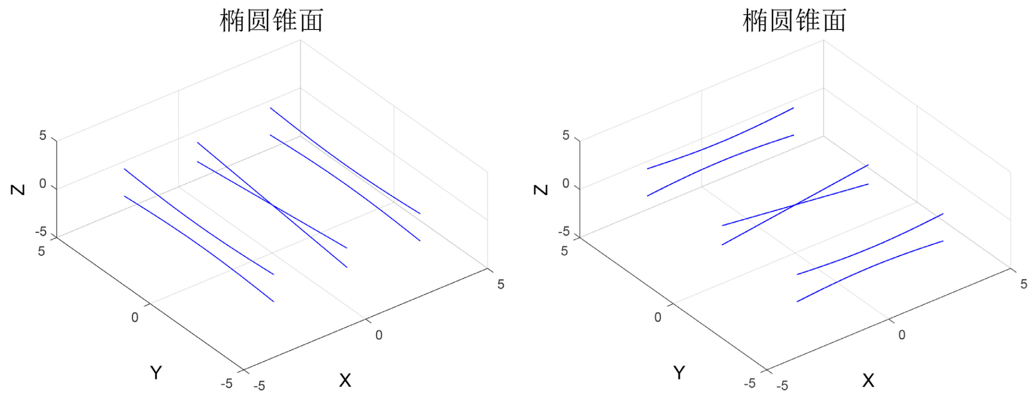

Figure 2. Intersection curve of the elliptic cone and the planes $x=k,(k\in R)$ and $y=k,(k\in R)$

图 2. 椭圆锥面与平面 $x=k,(k\in R)$ 及平面 $y=k,(k\in R)$ 相交的截痕

③ 用与 ZOX 面平行的平面 $y=k,(k\in R)$ 与椭圆锥面相交截得交线方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2,\\ y=k.\end{cases}$$

同理，由上式知：当 $k\neq 0$ 时，截痕是平行于 ZOX 面的直线(不相交)，当 $k=0$ 时，截痕就是过原点的两条相交直线，如图 2 (右侧)所示。

3.2. 椭圆抛物面

① 用与 XOY 面平行的平面 $z=k^2,(k\in R)$ 与椭圆抛物面相交截得交线方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z,\\ z=k^2.\end{cases}$$

由上式知：当 $k\neq 0$ 时，截痕是椭圆，其长轴和短轴分别是 $a|k|$、$b|k|$；当 $k=0$ 时，截痕就是坐标原点，如图 3 所示。

② 用与 YOZ 面平行的平面 $x=k$ 与椭圆抛物面相交截得交线方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z,\\ x=k.\end{cases}$$

由上式知：当 $k\neq 0$ 时，截痕是与 YOZ 面平行的平面上的抛物线，其顶点不过坐标原点；当 $k=0$ 时，截痕是 YOZ 面上顶点在坐标原点的抛物线，如图 4 (左侧)所示。

③ 用于 ZOX 面平行的平面 $y=k$ 与椭圆抛物面相交截得交线方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z, \\ y=k. \end{cases}$$

由上式知：当 $k \neq 0$ 时，截痕是与 ZOX 面平行的平面上的抛物线，其顶点不过坐标原点；当 $k=0$ 时，截痕是 ZOX 面上顶点在坐标原点的抛物线，如图 4 (右侧)所示。

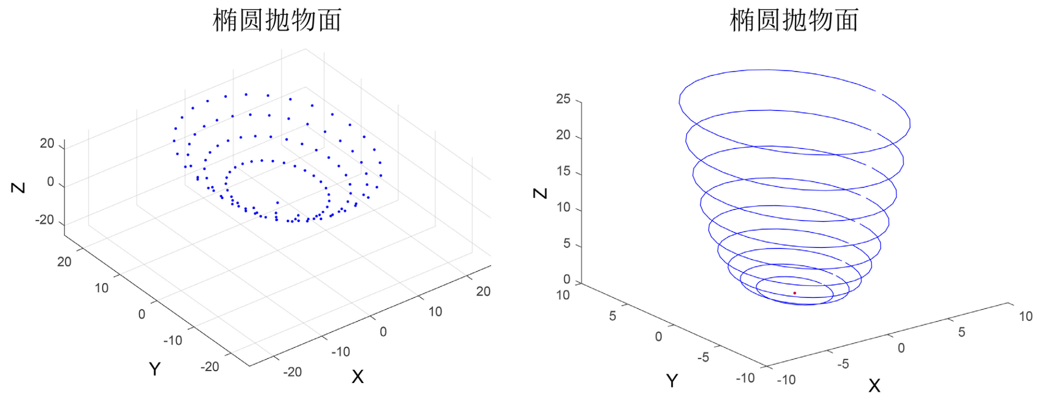

Figure 3. Intersection curve of the elliptic cone and the plane $z=k^2,(k \in R)$

图 3. 椭圆抛物面与平面 $z=k^2,(k \in R)$ 相交的截痕

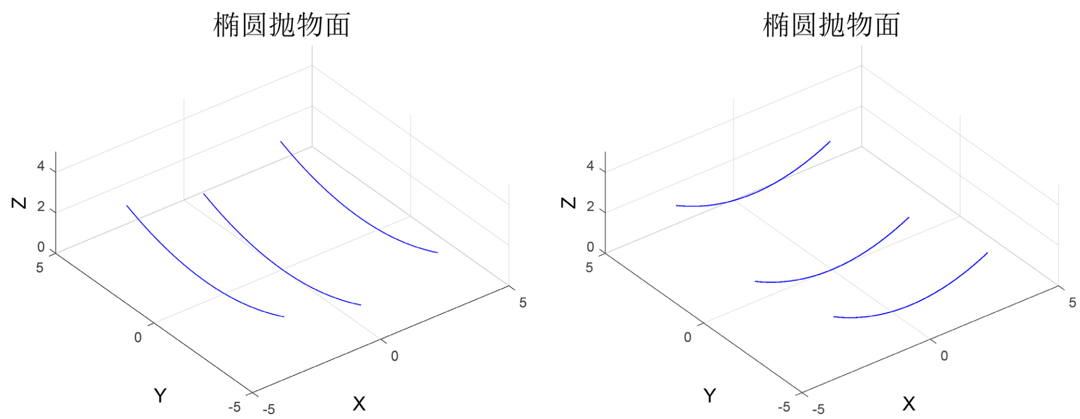

Figure 4. Intersection curve of the elliptic paraboloid and the planes $x=k,(k \in R)$ and $y=k,(k \in R)$

图 4. 椭圆抛物面与平面 $x=k,(k \in R)$ 及平面 $y=k,(k \in R)$ 相交的截痕

4. 伸缩变形方式不同

伸缩变形法是探究曲面形状时颇为便捷的一种手段。在本文中，针对椭圆锥面与椭圆抛物面这两种曲面，提出一种构建方式：先使坐标面上的特定曲线绕坐标轴旋转，从而形成旋转曲面，接着对所得到的旋转曲面实施伸缩变形操作，最终获取目标椭圆锥面与椭圆抛物面。

4.1. 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

椭圆锥面的形成方式不唯一，本文仅展示 ZOX 坐标面上的直线 $z=\dfrac{x}{a}$，先绕 z 轴旋转，生成旋转曲

面——圆锥面，再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，得到椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ 的过程，AVI 动态图的 MATLAB 程序如下。在 MATLAB 命令窗口输入:scalable_ellipse_cone(3,5,4)，即可分别生成直线 $z=\frac{x}{a}$、圆锥面及椭圆锥面，如图 5 所示。

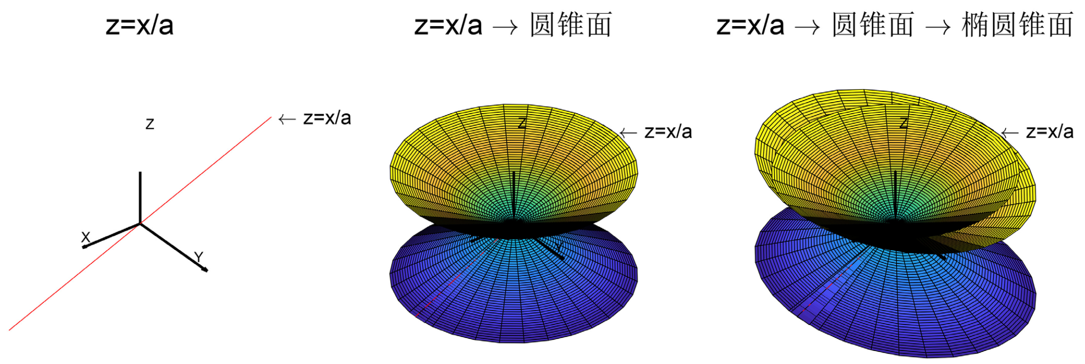

Figure 5. Stretching method for generating elliptical cones
图 5. 生成椭圆锥面的伸缩法

```
function scalable_ellipse_cone(a,b,u)
aviobj=VideoWriter('scalable_ellipse_cone.avi'); open(aviobj);
hold on
r=-u:0.1:u;
t=0:0.2:2*pi+0.2;
[T,R]=meshgrid(t,r);
X=a*cos(T).*R;
Y=a*sin(T).*R;
Z=R;
l=a*u;
axis([-l,l,-l,l,-u,u]); hold on;
view(-37.5,60);%
quiver3(0,0,0,-a,0,0,2.2,'k','filled','LineWidth',1.8);
quiver3(0,0,0,0,-b,0,2.5,'k','filled','LineWidth',1.8);
quiver3(0,0,0,0,0,u,3,'k','filled','LineWidth',1.8);
text(0,-0.8,2*u,'Z');
text(0,-2*b,0.2,'Y');
text(-2*a,1,0.4,'X');
axis off;
hold on;
set(gcf,'color',[1 1 1]); n=size(Z,2);
plot3(X(:,1),Y(:,1),Z(:,1),'r');
title('z=x/a \rightarrow 圆锥面 \rightarrow 椭圆锥面','FontSize',20,'Color','k');
text(l,0,u,' \leftarrow z=x/a');
```

```
set(gcf,'color',[1 1 1]);
currFrame = getframe(gcf);
writeVideo(aviobj,currFrame);
drawnow;
pause(10);
for i=2:n
surf(X(:,i-1:i),Y(:,i-1:i),Z(:,i-1:i));
pause(0.5);
drawnow;
set(gcf,'color',[1 1 1]);
currFrame = getframe(gcf);
writeVideo(aviobj,currFrame);
drawnow;
end
pause(10);
l=l*b/a;
axis([-l,l,-l,l,-u,u]); hold on;
pause(5);
for i=2:n
surf(X(:,i-1:i),b/a*Y(:,i-1:i),Z(:,i-1:i));
pause(5);
set(gcf,'color',[1 1 1]);
currFrame = getframe(gcf);
writeVideo(aviobj,currFrame);
drawnow;
end
close(aviobj);
```

4.2. 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

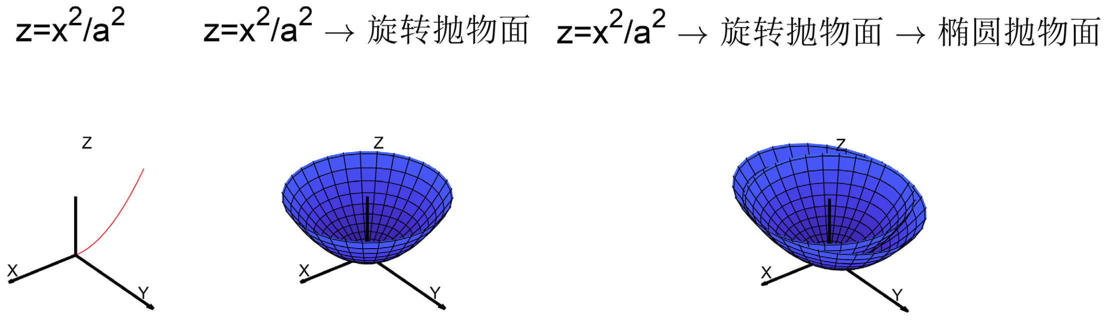

Figure 6. Stretching method for generating elliptical paraboloid
图 6. 生成椭圆抛物面的伸缩法

椭圆抛物面的形成方式不唯一，本文仅展示 ZOX 坐标面上的曲线 $z=\frac{x^2}{a^2}$，先绕 z 轴旋转，生成旋转抛物面，再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，得到椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ 的过程，AVI 动态图的 MATLAB 程序如下。在 MATLAB 命令窗口输入:elliptic_parabolic(3,5,4)，即可分别生成曲线 $z=\frac{x^2}{a^2}$、旋转抛物面及椭圆抛物面，如图 6 所示。

```
function elliptic_parabolic(a,b,u)
aviobj=VideoWriter('scalable_ellipse_paraboloid.avi');
open(aviobj);
r=0:0.2:u;
t=0:0.2:2*pi+0.2;
[T,R]=meshgrid(t,r);
X=a*cos(T).*R;
Y=a*sin(T).*R;
Z=ones(size(T)).*R.^2;
l=a*u;
axis([-l,l,-l,l,-u,u]);
hold on;
view(-37.5,60);
quiver3(0,0,0,-a,0,0,2.2,'k','filled','LineWidth',1.8);
quiver3(0,0,0,0,-b,0,2.5,'k','filled','LineWidth',1.8);
quiver3(0,0,0,0,0,2,u,'k','filled','LineWidth',1.8);
text(0,-0.8,2*u,'Z'); text(0,-2*b,0.2,'Y');text(-2*a,1,0.4,'X');
axis off; hold on; set(gcf,'color',[1 1 1]); n=size(Z,2);
plot3(X(:,1),Y(:,1),Z(:,1),'r');
title('z=x^2/a^2 \rightarrow  旋转抛物面  \rightarrow  椭圆抛物面','FontSize',20,'Color','k');
set(gcf,'color',[1 1 1]);
currFrame = getframe(gcf);
writeVideo(aviobj,currFrame);
drawnow;
pause(10);
for i=2:n
surf(X(:,i-1:i),Y(:,i-1:i),Z(:,i-1:i));
pause(0.5);
drawnow;
set(gcf,'color',[1 1 1]); %
currFrame = getframe(gcf);
writeVideo(aviobj,currFrame);
drawnow;
```

```
end
pause(10);
for i=2:n
surf(X(:,i-1:i),b/a*Y(:,i-1:i),Z(:,i-1:i));
pause(5);
set(gcf,'color',[1 1 1]);
currFrame = getframe(gcf);
writeVideo(aviobj,currFrame);
drawnow;
end
close(aviobj);
```

5. 结论

综上所述，通过对椭圆锥面和椭圆抛物面在标准方程、参数方程、图形截痕以及伸缩变形方式等多方面的深入剖析，并借助 MATLAB 的强大功能制作 AVI 动态图辅助教学，取得了显著成效。在教学过程中，学生能够直观地看到两类曲面的动态形成过程，极大地增强了教学内容的直观性。这种创新教学方法有效激发了学生的学习积极性，有助于学生轻松区分椭圆锥面和椭圆抛物面，从而提升了他们的空间想象能力。学生在面对二次曲面相关问题时，分析与解决问题的能力也得到锻炼，能够扎实掌握相关知识，为后续多元函数微积分等课程的学习筑牢基础。未来，可进一步探索 MATLAB 在更多复杂二次曲面教学中的应用，不断优化教学方法，提升教学质量。

基金项目

西安石油大学课程思政示范课项目：高等数学 I；西安石油大学 2024 年度“立德树人”研究课题(LD202426)；西安石油大学 2020 年度校级一流课程建设项目——高等数学。

参考文献

[1] 刘兴元, 何宜军. 对二次曲面教学中伸缩法的探讨[J]. 邵阳学院学报(自然科学版), 2009, 6(4): 41-44.
[2] 度巍. 空间解析几何中二次曲面截痕法的动画演示[J]. 电脑知识与技术, 2011, 7(25): 6297-6301.
[3] 洪晓芬. 基于 MATLAB 的动画演示与高等数学教学[J]. 计算机与线代化, 2011(4): 112-114, 118.