Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 208-217
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145249

非奇异H-矩阵的迭代判别新条件

谢智慧[1]**，陈　茜**[2*]

[1]湖南科技学院理学院，湖南 永州
[2]吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2025年4月21日；录用日期：2025年5月13日；发布日期：2025年5月21日

摘　要

非奇异H-矩阵是一类应用广泛的特殊矩阵，在矩阵理论、控制论和神经网络等许多领域有重要的应用。本文利用矩阵的相关性质，通过对非占优行指标集进行细分和构造新迭代因子的方法，得到新正对角因子，提出一组具有迭代形式的非奇异H-矩阵判定的新条件，并相应给出了非奇异H-矩阵迭代判定算法，最后利用数值实例验证了算法的有效性。

关键词

非奇异H-矩阵，迭代算法，不可约，非零元素链

New Conditions for Iterative Discrimination of Nonsingular H-Matrices

Zhihui Xie[1]**, Xi Chen**[2*]

[1]School of Science, Hunan University of Science and Technology, Yongzhou Hunan
[2]College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Apr. 21st, 2025; accepted: May 13th, 2025; published: May 21st, 2025

Abstract

Nonsingular H-matrices are a kind of special matrices with wide applications in many fields such as matrix theory, control theory and neural networks. In this paper, by using the relevant properties of matrices and through the method of subdividing the set of non-dominant row indices and constructing new iterative factors, a new positive diagonal factor is obtained. A new set of conditions for determining nonsingular H-matrices in iterative form is presented, and the corresponding iterative discrimination algorithm for nonsingular H-matrices is given. The effectiveness of the algorithm is verified

[*]通讯作者。

文章引用: 谢智慧, 陈茜. 非奇异 H-矩阵的迭代判别新条件[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 208-217.
DOI: 10.12677/aam.2025.145249

by numerical examples.

Keywords

Nonsingular *H*-Matrix, Iterative Algorithm, Irreducible, Nonzero Elements Chain

1. 引言

矩阵理论作为解决实际问题的有力工具，在众多研究领域中发挥着重要作用。非奇异 H-矩阵作为矩阵理论中一类特殊且重要的矩阵，一直是学者们研究的重点对象。如何高效判定一个矩阵是否为非奇异 H-矩阵成为学者研究的热点问题[1]-[10]。文献[1]-[5]基于非奇异 H-矩阵的性质，利用细分和迭代的方法，得出一系列非奇异 H-矩阵的判定条件及算法。本文在此基础上，通过对非占优行指标集进行精细化细分，同时构造新的迭代因子，进一步提出了一组非奇异 H-矩阵迭代判定的新条件以及相应的判定算法，推广了文献[1]-[5]的结果。

本文采用如下记号和定义：

用 $C^{n\times n}\left(R^{n\times n}\right)$ 表示 $n\times n$ 阶复(实)矩阵的集合，设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，$N=\left(1,2,\cdots,n\right)$，$\alpha\in\left(0,1\right]$，记

$$R_i=R_i\left(A\right)=\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|,\quad i,j\in N,$$

$$N_1=\left\{i\in N:\left|a_{ii}\right|>R_i\left(A\right)\right\},\quad N_2=\left\{i\in N:0<\left|a_{ii}\right|\le R_i\left(A\right)\right\}.$$

$$N_2'=\left\{i\in N_2:0<\left|a_{ii}\right|<R_i\left(A\right)\right\},\quad N_2''=\left\{i\in N_2:0<\left|a_{ii}\right|=R_i\left(A\right)\right\}.$$

$$N=N_1\cup N_2=N_1\cup N_2'\cup N_2'',\quad Z=\left\{0,1,2,\cdots\right\},\quad Z^+=\left\{1,2,3,\cdots\right\}.$$

定义 1 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若对任意 $i\in N$，有 $\left|a_{ii}\right|\ge R_i$，则称 A 为对角占优矩阵。记所有对角占优矩阵的全体为 D_0。若对任意 $i\in N$，有 $\left|a_{ii}\right|>R_i$，则称 A 是严格对角占优矩阵。记所有严格对角占优矩阵的全体为 D。若存在正对角矩阵 X，使得 $AX\in D$，则称 A 为广义严格对角占优矩阵，也称为非奇异 H-矩阵。记所有广义严格对角占优矩阵的全体为 D^*。

定义 2 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$ 为不可约矩阵，若 $\left|a_{ii}\right|\ge R_i$，且其中至少有一个严格不等式成立，则称 A 为不可约对角占优矩阵。

定义 3 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若 $\left|a_{ii}\right|\ge R_i$，又对于满足 $\left|a_{ii}\right|=R_i$ 的下标 i，存在非零元素序列 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_kj}$，使得 $\left|a_{jj}\right|>R_j$，则称 A 为具有非零元素链对角占优矩阵。

引理 1 [2] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若 A 为不可约对角占优矩阵，则 $A\in D^*$。

引理 2 [3] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若 A 为具有非零元素链对角占优矩阵，则 $A\in D^*$。

本研究总假设 $\left|a_{ii}\right|\ne 0,R_i\ne 0$，规定当 $t\in\phi,\sum_{t\in\phi}\cdot=0$。

文献[1]给出如下主要结果：

定理 1 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若存在非负整数 k，使得

$$\left|a_{ii}\right|x_i>\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|\delta_{k+1,t}+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\left|a_{it}\right|x_t,\qquad i\in N_2$$

其中：

$$r_0 = 1, \quad r_1 = \max_{i \in N_1} \frac{R_i}{|a_{ii}|}, \quad x_i = \frac{|a_{ii}|}{R_i} (\forall i \in N_2),$$

$$\delta_{k+1,i} = \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| r_k + \sum_{t \in N_2} |a_{it}| x_t \right] (i \in N_1, k \in Z),$$

$$r_{k+1} = \max_{i \in N_1} \delta_{k+1,i} \left(k \in Z^+ \right),$$

则 $A \in D^*$。

文献[2]给出如下主要结果：

定理 2 设 $A = \left(a_{ij}\right) \in C^{n \times n}$，若满足

$$|a_{ii}| > \frac{R_i}{R_i - |a_{ii}|} \left[h \sum_{t \in N_1} |a_{it}| \frac{Q_t}{|a_{tt}|} + \sum_{t \in N_2', t \neq i} |a_{it}| \frac{R_t - |a_{tt}|}{R_t} + s \sum_{t \in N_2''} |a_{it}| \right], \quad i \in N_2''$$

且对任意的 $i \in N_2''$，存在 $t \in N_1 \cup N_2'$，使得 $a_{it} \neq 0$，则 $A \in D^*$。

其中：

$$\omega = \max_{i \in N_1} \frac{\sum_{t \in N_2'} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2''} |a_{it}|}{|a_{ii}| - \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}|}, \quad m = \max_{i \in N_2'} \frac{R_i - |a_{ii}|}{R_i},$$

$$s = \max\{\omega, m\}, \quad Q_i = s \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2'} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2''} |a_{it}|,$$

$$h = \max_{i \in N_1} \frac{s \left(\sum_{t \in N_2'} |a_{it}| + \sum_{t \in N_2''} |a_{it}| \right)}{Q_i - \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| \frac{Q_t}{|a_{tt}|}}.$$

2. 主要结果

为了叙述方便，进一步引入以下记号：

$$r = \max_{i \in N_1} \frac{\sum_{t \in N_2} |a_{it}|}{|a_{ii}| - \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}|} (i \in N_1),$$

$$N_2^{(1)} = \left\{ i \in N_2 : 0 < |a_{ii}| \leq \sum_{t \in N_1} |a_{it}| r + \sum_{t \in N_2, t \neq i} |a_{it}| \right\},$$

$$N_2^{(2)} = \left\{ i \in N_2 : |a_{ii}| > \sum_{t \in N_1} |a_{it}| r + \sum_{t \in N_2, t \neq i} |a_{it}| \right\},$$

$$m_i = \frac{\sum_{t \in N_1} |a_{it}| r + \sum_{t \in N_2, t \neq i} |a_{it}|}{R_i + |a_{ii}|} (i \in N_2), \quad \lambda = \max_{i \in N_2} \{r, m_i\},$$

$$f_{1,i} = \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| r + \sum_{t \in N_2} |a_{it}| (i \in N_1),$$

$$f_{l+1,i} = \sum_{t \in N_1, t \neq i} |a_{it}| \frac{f_{l,t}}{|a_{tt}|} + \sum_{t \in N_2^{(1)}} |a_{it}| m_t + \sum_{t \in N_2^{(2)}} |a_{it}| \left(i \in N_1, l \in Z^+ \right),$$

$$\eta_{l+1}=\max_{i\in N_2^{(2)}}\left\{\frac{\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|}{|a_{ii}|}\right\}(l\in Z),$$

$$P_{l+1,i}=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\eta_{l+1}(l\in Z),$$

$$h_l=\max_{i\in N_2^{(2)}}\left\{\frac{\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\lambda\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|}{P_{l+1,i}-\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}}\right\}(l\in Z).$$

2.1. 定理 3

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对 $i\in N_2^{(1)}(l\in Z)$，有

$$|a_{ii}|m_i>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|},\tag{1}$$

且对于 $i\in N_1$，$\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|\neq 0$，$\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\neq 0$，则 A 是非奇异 H-矩阵。

证明

由 m_i,r 的定义可知，有 $0\le m_i<1,0<r<1$。由数学归纳法可知：

$$0\le\frac{f_{l+1,i}}{|a_{ii}|}<\cdots<\frac{f_{1,i}}{|a_{ii}|}\le r<1,i\in N_1,l\in Z^+.\tag{2}$$

又根据 N_2 细分的条件，知 $0<\eta_{l+1}<1$。

对于 $i\in N_2^{(2)}$，有

$$|a_{ii}|\eta_{l+1}\ge\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|,$$

可即有 $0<\frac{P_{l+1,i}}{|a_{ii}|}<\eta_{l+1}<1$。同时，由 $P_{l+1,i}$ 的表达式可知，当 $i\in N_2^{(2)}$ 时，

$$0<\frac{\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\lambda\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|}{P_{l+1,i}-\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}}<\frac{P_{l+1,i}-\eta_{l+1}\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|}{P_{l+1,i}-\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}}<1,$$

故

$$0<h_l<1,\quad i\in N_2^{(2)},l\in Z.$$

根据式(1)有

$$|a_{ii}|m_i>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|},$$

取充分小的正数 ε，使 ε 满足

$$0<\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}(1+\varepsilon)<1\left(i\in N_1\right),\quad 0<h_l\frac{P_{l+1,i}}{|a_{ii}|}+\varepsilon<1\left(i\in N_2^{(2)}\right),$$

同时满足

$$\varepsilon<\frac{|a_{ii}|m_i-\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}-\sum\limits_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}|a_{it}|m_t-h_l\sum\limits_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}}{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum\limits_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|},\tag{3}$$

构造正对角矩阵 $X=\operatorname{diag}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，并记 $B=AX=\left(b_{ij}\right)$，其中

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{f_{l+1,i}}{|a_{ii}|}(1+\varepsilon), & i\in N_1,\\ m_i, & i\in N_2^{(1)},\\ h_l\dfrac{P_{l+1,i}}{|a_{ii}|}+\varepsilon, & i\in N_2^{(2)}.\end{cases}$$

1) 对任意的 $i\in N_1$，由式(2)可得：

$$|a_{ii}|>R_i>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|r+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|\geq\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|,$$

并且 $l=0$ 时，有

$$|a_{ii}|\frac{f_{1,i}}{|a_{ii}|}=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|r+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+h_0\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{1,t}}{|a_{tt}|},$$

因此

$$\begin{aligned}&|b_{ii}|-R_i(B)\\&=|a_{ii}|\frac{f_{1,i}}{|a_{ii}|}(1+\varepsilon)-\left[\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{1,t}}{|a_{tt}|}(1+\varepsilon)+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\left(h_0\frac{P_{1,t}}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\right]\\&=|a_{ii}|\frac{f_{1,i}}{|a_{ii}|}-\left[\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+h_0\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{1,t}}{|a_{tt}|}\right]\\&\quad+\varepsilon\left[|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{1,t}}{|a_{tt}|}-\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\right]\\&>0.\end{aligned}$$

并且 $l\geq1$ 时，有

$$\begin{aligned}|a_{ii}|\frac{f_{l+1,i}}{|a_{ii}|}&=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{l,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\\&>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|},\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii}|-R_i(B)\\
&=|a_{ii}|\frac{f_{l+1,i}}{|a_{ii}|}(1+\varepsilon)-\left[\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}(1+\varepsilon)+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\left(h_l\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\right]\\
&=|a_{ii}|\frac{f_{l+1,i}}{|a_{ii}|}-\left[\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}\right]\\
&\quad+\varepsilon\left[|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}-\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\right]\\
&>0.
\end{aligned}
$$

2) 对任意的 $i\in N_2^{(1)}$，由式(1)、式(3)可知：

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii}|-R_i(B)\\
&=|a_{ii}|m_i-\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}(1+\varepsilon)+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}|a_{it}|m_t+\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\left(h_l\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\right]\\
&=|a_{ii}|m_i-\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}\right]-\varepsilon\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\right]\\
&>0.
\end{aligned}
$$

3) 对任意的 $i\in N_2^{(2)}(l\in Z)$，由 h 的表达式可得：

$$
h_lP_{l+1,i}\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\lambda\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|},
$$

$$
|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1}|a_{it}|r+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|,
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii}|-R_i(B)\\
&=|a_{ii}|\left(h_l\frac{P_{l+1,i}}{|a_{ii}|}+\varepsilon\right)-\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}(1+\varepsilon)+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\left(h_l\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\right]\\
&=|a_{ii}|h_l\frac{P_{l+1,i}}{|a_{ii}|}-\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|}\right]\\
&\quad+\varepsilon\left[|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}-\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}|a_{it}|\right]\\
&>0.
\end{aligned}
$$

综上所述，我们有 $|b_{ii}|>R_i(B)(i\in N)$，所以 $A\in D^*$，证毕。

2.2. 定理 4

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 且不可约，若对 $i\in N_2^{(1)}(l\in Z)$，有

$$
|a_{ii}|m_i\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{f_{l+1,t}}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}|a_{it}|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}|a_{it}|\frac{P_{l+1,t}}{|a_{tt}|},\tag{4}
$$

且上式至少有一个严格不等式成立，则 A 是非奇异 H-矩阵。

证明

构造正对角矩阵 $X=\operatorname{diag}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，并记 $B=AX=\left(b_{ij}\right)$，其中

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{f_{l+1,i}}{\left|a_{ii}\right|}, & i\in N_1,\\ m_i, & i\in N_2^{(1)},\\ h_l\dfrac{P_{l+1,i}}{\left|a_{ii}\right|}, & i\in N_2^{(2)}.\end{cases}$$

1) 对任意的 $i\in N_1$，并且 $l=0$ 时，有

$$\left|a_{ii}\right|\frac{f_{1,i}}{\left|a_{ii}\right|}=\sum_{t\in N_1,t\neq i}\left|a_{it}\right|r+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|>\sum_{t\in N_1,t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{f_{1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|m_t+h_0\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{1,t}}{\left|a_{tt}\right|},$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|b_{ii}\right|-R_i\left(B\right)\\&=\left|a_{ii}\right|\frac{f_{1,i}}{\left|a_{ii}\right|}-\left[\sum_{t\in N_1,t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{f_{1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|m_t+h_0\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{1,t}}{\left|a_{tt}\right|}\right]\\&>0.\end{aligned}$$

并且 $l\geq 1$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|a_{ii}\right|\frac{f_{l+1,i}}{\left|a_{ii}\right|}&=\sum_{t\in N_1,t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|m_t+\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\\&>\sum_{t\in N_1,t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|b_{ii}\right|-R_i\left(B\right)\\&=\left|a_{ii}\right|\frac{f_{l+1,i}}{\left|a_{ii}\right|}-\left[\sum_{t\in N_1,t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}\right]\\&\geq 0.\end{aligned}$$

2) 对任意的 $i\in N_2^{(1)}$，由式(1)可知：

$$\begin{aligned}&\left|b_{ii}\right|-R_i\left(B\right)\\&=\left|a_{ii}\right|m_i-\left[\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}\left|a_{it}\right|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}\right]\\&\geq 0.\end{aligned}$$

3) 对任意的 $i\in N_2^{(2)}\left(l\in Z\right)$，由 h 的表达式可得：

$$h_lP_{l+1,i}\geq\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\lambda\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|},$$

故有

$$
\begin{aligned}
&\left|b_{ii}\right|-R_i(B)\\
&=\left|a_{ii}\right|h_l\frac{P_{l+1,i}}{\left|a_{ii}\right|}-\left[\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}}\left|a_{it}\right|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)},t\neq i}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}\right]\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

综上所述，我们有$\left|b_{ii}\right|>R_i(B)(i\in N)$，且由假设知至少有一个严格不等式成立。由矩阵 A 不可约知矩阵 B 不可约，则 B 为不可约对角占优矩阵。由引理 1 知 $A\in D^*$，证毕。

2.3. 定理 5

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，若对 $i\in N_2^{(1)}(l\in Z)$，有

$$
\left|a_{ii}\right|m_i\geq\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}\left|a_{it}\right|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|},\tag{5}
$$

$$
J(A)=\left\{i\in N_2^{(1)}:\left|a_{ii}\right|m_i>\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|\frac{f_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)},t\neq i}\left|a_{it}\right|m_t+h_l\sum_{t\in N_2^{(2)}}\left|a_{it}\right|\frac{P_{l+1,t}}{\left|a_{tt}\right|}\right\}\neq\phi,
$$

且对 $\forall i\in N_2^{(1)}-J(A)$，存在非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rk}$，其中 $i\neq i_1,i_1\neq i_2,\cdots,i_r\neq k$，使得 $k\in J(A)$，则 $A\in D^*$。

3. 算法

由定理 3 的判定条件，得到了一组判定非奇异 H-矩阵的迭代新算法，且对矩阵 A 总假定：

$$
R_i\neq 0,C_i\neq 0(i\in N)
$$

3.1. 算法 1

输入：矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$。

输出：$X=X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(y)}$，如果 $A\in D^*$。

步骤 1 如果 $N_1(A)=\phi$ 或存在 $i\in N$ 使 $a_{ii}=0$，则 $A\notin D^*$，停止；否则，

步骤 2 设 $y=1,A^{(0)}=A,X^{(0)}=I$。

步骤 3 计算 $A^{(y)}=A^{(y-1)}X^{(y-1)}=\left(a_{ij}^{(y)}\right)$。

步骤 4 如果 $N_1\left(A^{(y)}\right)=\phi$，则 $A\notin D^*$，停止；否则，

步骤 5 如果 $N_2\left(A^{(y)}\right)=\phi$，则 $A\in D^*$，停止；否则，

步骤 6 计算 $r^{(y)},N_2^{(1)}\left(A^{(y)}\right),N_2^{(2)}\left(A^{(y)}\right),m_i^{(y)},\lambda^{(y)},f_{1,i}^{(y)},f_{l+1,i}^{(y)},\eta_{l+1}^{(y)},P_{l+1,i}^{(y)},h_l^{(y)}$。

步骤 7 如果对任意 $i\in N_2^{(1)}\left(A^{(y)}\right)$，满足

$$
\left|a_{ii}^{(y)}\right|m_i^{(y)}>\sum_{t\in N_1\left(A^{(y)}\right)}\left|a_{it}^{(y)}\right|\frac{f_{l+1,t}^{(y)}}{\left|a_{tt}^{(y)}\right|}+\sum_{t\in N_2^{(1)}\left(A^{(y)}\right),t\neq i}\left|a_{it}^{(y)}\right|m_t^{(y)}+h_l^{(y)}\sum_{t\in N_2^{(2)}\left(A^{(y)}\right)}\left|a_{it}^{(y)}\right|\frac{P_{l+1,t}^{(y)}}{\left|a_{tt}^{(y)}\right|},
$$

且对于 $i\in N_1\left(A^{(y)}\right)$，$\sum_{t\in N_2^{(1)}\left(A^{(y)}\right)}\left|a_{it}^{(y)}\right|\neq 0$，$\sum_{t\in N_2^{(2)}\left(A^{(y)}\right)}\left|a_{it}^{(y)}\right|\neq 0$，则 $A\in D^*$。停止；否则，

步骤 8 设 $x=\left(x_{ij}\right)$，其中

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{f_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}, & i\in N_1\left(A^{(y)}\right),\\ m_i^{(y)}, & i\in N_2^{(1)}\left(A^{(y)}\right),\\ h_l^{(y)}\dfrac{P_{l+1,i}^{(y)}}{\left|a_{ii}^{(y)}\right|}, & i\in N_2^{(2)}\left(A^{(y)}\right),\end{cases}$$

步骤 9 $X^{(y)}=\mathrm{diag}(x), y=y+1$，返回步骤 3。

对该算法，有如下结论。

3.2. 定理 6

如果算法经过有限步迭代后终止，且产生一个正对角阵，则 $A\in D^*$。

证明 假设算法经过 y 次迭代后停止，得到一个严格对角占优矩阵 $A^{(y)}$，由算法的过程可知 $A^{(y)}=A^{(y-1)}X^{(y-1)}=\cdots=AX^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(y-1)}$，即存在正对角矩阵 $X=X^{(1)}X^{(2)}\cdots X^{(y-1)}$，使得 $AX\in D$，从而 $A\in D^*$。

4. 数值算例

例 1 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & \dfrac{77}{2} & -825 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & \dfrac{165}{2} & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2 & \dfrac{143}{2} & -715\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{143}{2}\end{pmatrix},$$

在判定矩阵 A 是否为非奇异 H-矩阵时，利用文献[1]中的记号，有 $N_1=\{1,4,6\}$，$N_2=\{2,3,5\}$，则当 $k=1$ 时，

$$|a_{22}|x_2=1.7864<|a_{21}|\delta_{2,1}+|a_{23}|x_3+|a_{24}|\delta_{2,4}+|a_{25}|x_5+|a_{26}|\delta_{2,6}=33.8552,$$

故无法用文献[1]中的定理 1 来判定。利用文献[2]中的记号有 $N_2''=\phi$，当外迭代次数为 4 时，此文献[2]中的定理 4 可以判定矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。同理利用文献[4]中的记号，可验证当外迭代次数为 10 时，可判定矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。利用文献[5]中的记号，可验证当外迭代次数为 2 时，可判定矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。

而利用本文定理 3 的条件有 $N_1=\{1,4,6\}$，$N_2=\{2,3,5\}$，$N_2^{(1)}=\{2,3,5\}$，$N_2^{(2)}=\phi$，当 $l=1$ 时，有 $r=0.75$，$m_2=0.4643$，$m_3=0.7165$，$m_5=0.6834$，$f_{2,1}=0.3197$，$f_{2,4}=0.0241$，$f_{2,6}=0.0070$。

即有

$$|a_{22}|m_2=1.3929>|a_{21}|f_{2,1}+|a_{23}|m_3+|a_{24}|f_{2,4}+|a_{25}|m_5+|a_{26}|f_{2,6}=0.7717,$$

$$|a_{33}|m_2 = 27.5853 > |a_{31}|f_{2,1} + |a_{32}|m_2 + |a_{34}|f_{2,4} + |a_{35}|m_5 + |a_{36}|f_{2,6} = 21.576,$$

$$|a_{55}|m_2 = 48.8631 > |a_{51}|f_{2,1} + |a_{52}|m_2 + |a_{53}|m_3 + |a_{54}|f_{2,4} + |a_{56}|f_{2,6} = 7.5899,$$

事实上，取 $X = \mathrm{diag}(0.3197\ 0.4643\ 0.7165\ 0.0241\ 0.6834\ 0.0070)$。

则有

$$AX = \begin{pmatrix} 2.2379 & 0 & 2.1495 & 0.0241 & 0 & 0.0140 \\ 0 & 1.3929 & -0.7165 & 0.0482 & 0 & 0.0070 \\ 0.3197 & 0 & 27.5853 & -19.8825 & 1.3668 & 0.0070 \\ 0.6394 & 0.4643 & 0 & 1.9883 & 0 & 0.0070 \\ 0.6394 & 0.4643 & 1.4330 & 0.0482 & 48.8631 & -5.0050 \\ 0 & 0.4643 & 0 & 0.0241 & 0 & 0.5005 \end{pmatrix},$$

易验证 $AX \in D^*$，则矩阵 A 为非奇异 H-矩阵。

5. 结论

通过数值算例表明，在引入区间细分策略和递进式迭代因子构造方法后，本文提出的迭代判定条件较文献[1]中的定理 1 具有更高的判定精度，对比文献[2]-[5]，本文判定条件的适用范围也更为广泛。研究表明，该非奇异 H-矩阵的迭代判定新条件，一方面拓展了现有判定理论框架，另一方面有效提升了非奇异 H-矩阵的判定效率。

致　谢

感谢陈茜老师对本项目的悉心指导和帮助。

基金项目

湖南省教育厅科研项目(23C0342)和湖南省教育厅优秀青年项目(24B0743)。

参考文献

[1] 王健，徐仲，陆全．广义严格对角占优矩阵的新迭代判别法[J]．高等学校计算数学学报, 2012, 34(2): 135-140.

[2] 陈茜，庹清．非奇异 H-矩阵的一组新判定法[J]．工程数学学报, 2020, 37(3): 325-334.

[3] 张万智，徐仲，陆全，等．广义严格对角占优矩阵的迭代判别方法[J]．高等学校计算数学学报, 2016, 38(4): 301-312.

[4] 丁碧文，刘建州．H-矩阵的判别法及其迭代算法[J]．应用数学学报, 2013, 36(5): 935-948.

[5] 张骁，陆全，徐仲，等．非奇 H-矩阵判别的充要条件[J]．应用数学, 2016, 29(1): 50-57.

[6] 黄泽军，刘建州．非奇异 H 矩阵的一类新迭代判别法[J]．工程数学学报, 2008, 25(5): 939-942.

[7] 庹清，陈茜．关于“一类非奇异 H-矩阵判定的新条件”一文的注记[J]．计算数学, 2019, 41(2): 219-224.

[8] 徐仲，陆全．判定广义严格对角占优矩阵的一组充分条件[J]．工程数学学报, 2001, 18(3): 11-15.

[9] 刘长太．非奇异 H 矩阵的迭代条件[J]．数学的实践与认识, 2017, 47(3): 278-282.

[10] 石慧．广义严格对角占优矩阵的几类迭代判定方法[D]: [硕士学位论文]．吉首：吉首大学, 2022.