

MM*模型下网络的限制局部可诊断性

郭慧铃, 张淑蓉*

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2025年4月14日; 录用日期: 2025年5月7日; 发布日期: 2025年5月16日

摘要

故障诊断对提升大规模网络可靠性意义重大。实际应用中, 往往无需全局诊断, 仅需确定信息传输区域内特定顶点(处理器)的工作状态。为此提出局部诊断方法, 即设计包含特定顶点 v 的子网络, 通过分析该子网络基于诊断模型得到的症状判断 v 是否故障。为保障故障网络局部连通性, 引入 h -限制故障模型, 该模型要求移除所有故障顶点后网络的每个连通分量所含顶点数大于 h 。基于此, 进一步提出 h -限制局部可诊断性的概念, 并给出在MM*模型下估计顶点 v 的限制局部可诊断性的充分条件, 同时设计了包含顶点 v 的子网络结构 $TM(v; h)$ 。

关键词

局部诊断, MM*模型, 限制故障模型, 多处理器系统

Extra Local Diagnosability of Networks under the MM* Model

Huiling Guo, Shurong Zhang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 16th, 2025

Abstract

Fault diagnosis is crucial for improving the reliability of large-scale networks. In practice, it is often unnecessary to diagnose the entire network. Instead, determining the operational status of specific vertices (processors) within a particular information transmission region is more important. To address this, we propose a local diagnosis method that constructs a sub-network containing a specific vertex v . By analyzing the symptoms of this sub-network under a given diagnosis model, we can

*通讯作者。

文章引用: 郭慧铃, 张淑蓉. MM*模型下网络的限制局部可诊断性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 153-161.
DOI: 10.12677/aam.2025.145244

determine whether v is faulty. To ensure local network connectivity in the presence of faults, we introduce the h -extra fault model. This model requires that after removing all faulty vertices, each connected component of the network must have more than h vertices. Based on this, we further introduce the concept of h -extra local diagnosability. We provide sufficient conditions for estimating the extra local diagnosability of a vertex v under the MM* model and design a sub-network structure $TM(v; h)$ that includes vertex v .

Keywords

Local Diagnosis, MM* Model, Restricted Fault Model, Multiprocessor System

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着互联网技术进入 5G/6G 高速发展阶段, 现代互联网络已构成数字经济时代的核心支撑体系。在该体系下, 网络稳定性直接决定了系统服务的连续性——若关键节点发生异常, 可能引发数据链路中断、服务崩溃等连锁反应。因此, 及时准确的故障诊断能够确保系统尽快恢复正常运行, 从而减少损失。

Dahbura 和 Masson [1]提出了一种时间复杂度为 $O(n^{2.5})$ 的算法, 能够有效识别故障处理器集合。有两种知名的诊断模型, 一种是由 Preparata 等人[2]提出的 PMC 模型, 另一种是由 Maeng 和 Malek [3]介绍的 MM 模型。在 PMC 模型中, 任意两个相邻的处理器可以互相测试。在 MM 模型中, 一个处理器会将相同的任务发送给它的两个相邻处理器, 并比较反馈结果。Sengupta 和 Dahbura [4]提出了一种 MM 模型的特例, 称为 MM*模型, 其中每个处理器必须测试其任意一对相邻处理器。

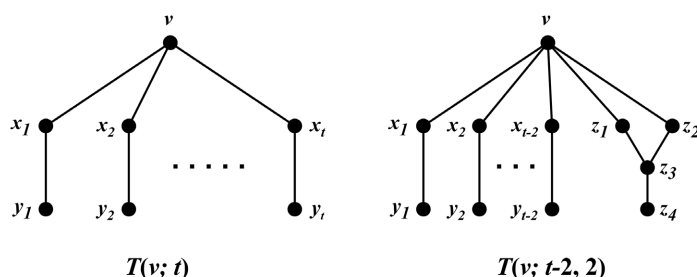


Figure 1. Two diagnosis structures: $T(v; t)$ and $T(v; t-2, 2)$

图 1. 两种诊断结构: $T(v; t)$ 和 $T(v; t-2, 2)$

网络的拓扑结构可以用图来表示。在一般故障模型下, Hsu 等人[5]于 2007 年提出了 PMC 模型下的局部可诊断性概念, 并指出以往的研究主要集中在系统的整体可诊断性上, 而忽略了网络内的局部信息。通过计算每个处理器的局部可诊断性, 可以更准确地推断整个网络的状态。此外, 他们提出了两种 PMC 模型下的结构: $T(v; t)$ 和 $T(v; t-2, 2)$, 可用于确定处理器 v 的局部可诊断性(见图 1), 其中 t 是 v 的邻居数。

2009 年, Chiang 等人[6]指出局部可诊断性与传统可诊断性密切相关。他们研究了在 MM*模型下单

个顶点的局部可诊断性, 并提出了一个名为扩展星形(Extended Star)的局部结构, 并基于该结构设计了相应的算法。这些研究为系统级故障诊断提供了更多方法和可能性。

此外, 2022 年, Chen 和 Hsu 等人[7]提出了 PMC 模型下更一般的结构。同年, Chen 和 Lin 等人[8]提出了 MM*模型下改进的、更全面的结构, 并设计了相关算法。2024 年, Lv 等人[9]提出了 MM*模型下条件故障局部诊断的更高效算法, 并优化了故障节点数的上界。

随后, 一些研究人员(如 Lin [10]-[12]、Chen [7] [8]、Lin [13]和 Yuan [14]等)设计了一些重要的局部故障诊断算法。在这些算法中, 对于网络中的任意给定节点, 研究人员找到了包含该节点的特定子结构, 并使用这些算法在故障诊断策略下进行子结构自诊断, 从而确定该节点是否出现故障。这种方法更适合于故障分布不均匀的大规模网络, 我们可以通过局部诊断来维持多处理器网络的功能。

在传统多处理器系统的系统级诊断中, 通常假设不同的处理器可以同时出现故障。然而, 一种特殊情况是, 如果某个处理器 v 的所有邻居都出现故障, 则无法通过 v 的邻居来判断 v 是否出现故障。实际上, 这种情况的概率非常小。因此, Lai 等人[15]引入了一种称为条件故障诊断的度量方法, 声称故障节点集合不能包含任何处理器的所有邻居。

此外, 大规模故障可能导致网络断开, 并将网络分割成多个连通分量。同时, 考虑到故障节点的邻居也可能受到影响, 那么正常工作的处理器通常会处于一个安全的子网络(即连通分量)范围内。在这种情况下, 作为条件故障诊断的推广, Fàbrega 等人[16]提出了 h -限制故障模型, 要求每个连通分量包含的节点数超过 h 。为了更好地反映网络的系统级可诊断性, Zhang 和 Yang [17]于 2016 年推广了条件可诊断性的概念, 提出了 h -限制可诊断性, 即在每个无故障连通分量包含超过 h 个顶点的条件下, 系统能够保证识别出的最大故障节点数。 h -限制可诊断性在许多重要网络中受到了广泛关注, 例如文献[18] [19]。然而, 据我们所知, 目前尚未有关于在 h -限制故障模型下一般网络的局部诊断问题的研究结果。因此, 基于上述研究, 我们将定义 h -限制局部可诊断性, 并设计相应的局部诊断结构。

本文主要提出了一种新的概念——可诊断性, 并提供了判断系统是否在任意处理器处 h -限制局部可诊断的充分条件; 设计了网络中任意顶点 v 的结构 $TM(v; h)$ 。本文的结构安排如下: 第 2 节介绍预备知识; 第 3 节介绍限制局部可诊断性的概念, 第 4 节提出了验证网络 h -限制局部可诊断性的充分条件; 最后, 第 5 节总结了本文的研究成果。

2. 基本概念及符号说明

在多处理器系统的研究中, 图论已成为一种重要的数学工具。系统可以通过无向简单图 G 进行有效建模。在此图中, 任意顶点 v 和边 (u, v) 分别表示单个处理器 v 以及两个处理器 u 和 v 之间的通信链路。图 G 中的顶点集(边集)分别用 $V(G)$ ($E(G)$)表示。

路径是一个序列 $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, 包含 $k+1$ 个不同的顶点, 且满足 $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$)。 P 的长度为 k 。如果 $v_0 = v_k$, 则称 P 为一个环。从顶点 u 到 v 的最短路径长度称为 u 和 v 之间的距离。图 G 的围长, 记为 $g(G)$, 是指 G 中最短环的长度。

对于图 G 中的任意顶点 v , 与 v 相邻的顶点集合记为 $N_G(v)$ 。顶点 v 的度定义为 $d_G(v) = |N_G(v)|$ 。图 G 中所有顶点的最小度记为 $\delta(G)$ (简写为 δ)。如果图 G 中每个顶点的度均为 k , 则称 G 为一个 k -正则图。如果两条边有一个公共顶点, 则它们也被认为是相邻的。对于任意集合 $S \subset V(G)$, 定义

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v) \setminus S.$$

在无向图 G 中, 对于任意两个顶点 $u, v \in V(G)$, 如果在 G 中存在一条连接 u 和 v 的路径, 则称 u 和 v 是连通的。如果图中任意两个顶点都是连通的, 则称 G 为连通图。对于任意非空集合 $S \subseteq V(G)$, $G[S]$ 是以 S 为顶点集的 G 的子图, 其边集由两端点均在 S 中的边组成。称 $G[S]$ 是由 S 诱导的子图。进一步

地, 如果 $G[S]$ 是一个连通子图, 并且 S 与 $V(G) \setminus S$ 之间没有边, 则称 $G[S]$ 为 G 的一个**连通分支**。

对于任意 $F \subseteq V(G)$, $G-F$ 表示从 G 中移除 F 中的顶点及其相关边后得到的子图。如果子图 $G-F$ 不连通, 则称 F 为 G 的一个**顶点割**。 G 的顶点割中顶点数的最小值称为 G 的**连通度**, 记为 $\kappa(G)$ 。两个集合 S_1 和 S_2 的**对称差** 定义为 $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ 。

可诊断性相关概念 PMC 模型定义如下: 对于任意两个相邻顶点 u 和 v , 用 $\sigma(u, v)$ 表示 u 对 v 的测试结果。当 u 无故障时, 如果 v 无故障, 则 $\sigma(u, v) = 0$; 否则, $\sigma(u, v) = 1$ 。假设 u 出现故障, 则无论 v 是否故障, $\sigma(u, v)$ 均为随机值 0 或 1, 这表明该测试结果不可靠。

假设 F 是 V 的一个子集。如果 F 是 G 中的故障顶点集合, 则集合 $\{\sigma(u, v) | u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 中相邻}\}$ 称为与 F 一致的**症状**。由于故障顶点测试其邻居的结果可以随机为 0 或 1, 因此与 F 一致的症状并非唯一。所有可能由 F 产生的症状集合记为 $\sigma(F)$, 即 $\sigma(F) = \{\sigma | F \text{ 与症状 } \sigma \text{ 一致}\}$ 。

对于 $V(G)$ 的任意两个不同子集 F_1 和 F_2 , 如果 $\sigma(F_1) \cap \sigma(F_2) = \emptyset$, 则可以判断故障顶点集合是 F_1 还是 F_2 , 因此称 (F_1, F_2) 为**可区分对**。以下是几个重要结论:

引理 2.1. [15] 图 G 是 t 可诊断的, 当且仅当对于任意两个不同的集合 $F_1, F_2 \subseteq V$, 满足 $|F_1| \leq t$ 且 $|F_2| \leq t$, (F_1, F_2) 是一个可区分对。

引理 2.2. [1] 给定图 G 以及其中任意两个不同的子集 $F_1, F_2 \subseteq V(G)$, 在 MM^* 模型下, (F_1, F_2) 是一个可区分对, 当且仅当至少满足以下三个条件之一:

- 1) 存在三个顶点 $v \in (F_1 \Delta F_2)$ 以及 $u, w \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw, vw \in E(G)$ 。
- 2) 存在三个顶点 $u, v \in F_1 \setminus F_2$ 以及 $w \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw, vw \in E(G)$ 。
- 3) 存在三个顶点 $u, v \in F_2 \setminus F_1$ 以及 $w \in V(G) - (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw, vw \in E(G)$ 。见图 2。

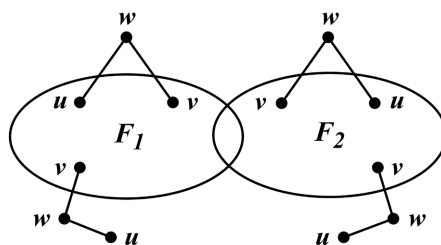


Figure 2. Distinguishable pair (F_1, F_2) under the MM^* model

图 2. MM^* 模型下的可区分对 (F_1, F_2)

局部可诊断性概念 对于局部诊断, Hsu 和 Tan [5] 提出了以下定义。

定义 2.3. [5] 给定图 G 和正整数 t , 设 F 是 $V(G)$ 的一个子集, 包含至多 t 个顶点, 且设 $\sigma(F)$ 是与 F 一致的症状。对于任意顶点 $v \in F$, 如果对于任意子集 $F_1 \subseteq V(G)$, 满足 $|F_1| \leq t$ 且能产生症状 $\sigma(F)$, 则 F_1 包含顶点 v , 称图 G 在顶点 v 处是局部 t 可诊断的。

以下是**限制诊断度**的概念。

定义 2.4. [17] 图 G 的顶点子集 F 是一个 h -限制顶点子集, 当且仅当 $G-F$ 的每个连通分支至少包含 $h+1$ 个顶点。

定义 2.5. [17] 图 G 是 h -限制 t 可诊断的, 当且仅当对于每一对不同的 h -限制顶点子集 $F_1, F_2 \subseteq V(G)$, 满足 $|F_i| \leq t$ ($i=1, 2$), F_1 和 F_2 是可区分的。图 G 的 h -限制可诊断度, 记为 $\tilde{t}_h(G)$, 是指 G 为 h -限制 t 可诊断的最大 t 值。

3. h -限制局部可诊断性

在过去几十年中, 学者们已经得到了许多关于整个网络的 h -限制可诊断性的结果。现在, 我们考虑 h -限制局部可诊断性, 并基于定义 2.3 和引理 2.1 引入以下定义。

定义 3.1. 给定图 G 和正整数 t , 设 F 是 $V(G)$ 的一个 h -限制顶点子集, 满足 $|F| \leq t$, 且设 $\sigma(F)$ 是与 F 一致的故障。对于任意顶点 $v \in F$, 如果对于任意 h -限制顶点子集 $F_1 \subseteq V(G)$, 满足 $|F_1| \leq t$ 且能产生故障 $\sigma(F)$, 则 F_1 包含顶点 v , 称图 G 在顶点 v 处是 h -限制局部 t 可诊断的。

根据定义 3.1, 可以得到以下结果。

引理 3.2. 给定图 G 和顶点 $v \in V(G)$, 图 G 在顶点 v 处是 h -限制局部 t 可诊断的, 当且仅当对于任意两个不同的 h -限制集合 $F_1, F_2 \subseteq V(G)$, 满足 $|F_1| \leq t$ 和 $|F_2| \leq t$ 且 $v \in F_1 \Delta F_2$, (F_1, F_2) 是一个可区分对。

证明 首先, 证明充分性。假设 G 在顶点 v 处不是 h -限制局部 t 可诊断的。根据定义 3.1, 存在两个集合 $F_1, F_2 \subseteq V$, 使得 $v \in F_1 \Delta F_2$ 且 (F_1, F_2) 是一个不可区分对, 这与假设矛盾。

接下来, 证明必要性。假设 G 在顶点 v 处是 h -限制局部 t 可诊断的。假设存在一个不可区分对 (F_1, F_2) , 使得 $v \in F_1 \Delta F_2$ 。根据定义 3.1, $v \in F_1 \cap F_2$, 这与假设矛盾。证毕。

上述引理可用于判断系统是否在任意顶点 v 处是 h -限制局部 t 可诊断的。

对于图 G 和正整数 h , 使得 G 在顶点 $v \in V(G)$ 处是 h -限制局部 t 可诊断的最大 t 值, 称为 G 在顶点 v 处的 h -限制局部可诊断度, 记为 $t_{(h)}(v)$ 。现在, 我们将考虑每个顶点处的 h -限制局部可诊断度与 G 的 h -限制可诊断度之间的关系。

引理 3.3. 图 G 是 h -限制 t 可诊断的, 当且仅当 G 在每个顶点处都是 h -限制局部 t 可诊断的。

证明 首先, 证明充分性。假设 G 不是 h -限制 t 可诊断的。根据定义 2.5, 存在至少一对不同的 h -限制集合 $F_1, F_2 \subseteq V(G)$, 满足 $|F_1| \leq t$ 和 $|F_2| \leq t$, 且 F_1 和 F_2 是不可区分的。由于 $F_1 \Delta F_2 \neq \emptyset$, 可以选择一个顶点 $v \in F_1 \Delta F_2$ 。根据引理 3.2, 可以得出 G 在顶点 v 处不是 h -限制局部 t 可诊断的, 这与假设矛盾。

接下来, 证明必要性。假设存在一个顶点 v , 使得 G 在 v 处不是 h -限制局部 t 可诊断的。根据引理 3.2, 存在两个不同的 h -限制故障顶点集合 $F_1, F_2 \subseteq V(G)$, 满足 $|F_1| \leq t$ 和 $|F_2| \leq t$, 且 $v \in F_1 \Delta F_2$, F_1 和 F_2 是不可区分的。根据定义 2.5, 可以得出 G 不是 h -限制 t 可诊断的, 这与假设矛盾。证毕。

根据上述结果, 可以得到以下推论。

推论 3.4. 给定图 G , 对于任意正整数 t , G 的 h -限制 t 可诊断度为:

$$\tilde{t}_h(G) = \min \{t_{(h)}(v) \mid v \in V(G)\}.$$

4. MM*模型下的限制局部诊断性

在本节中, 我们会继续探究在 MM*模型下的限制局部诊断性, 首先我们将通过定理 4.1 给出图 G 中任意顶点 v 在 MM*模型下为 h -限制局部 t -可诊断的充分条件。然后我们设计了一种新的结构 $TM(v; h)$, 通过分析结构中点的测试结果, 我们便能得到点 v 的故障状态。

4.1. 限制局部诊断性

在给出定理 4.1 之前, 我们先了解点覆盖的相关概念以及介绍所用到的参数 $M_h(v)$ 。图 G 的点覆盖是指一个点子集 Q , 属于 $V(G)$, 使得 $E(G)$ 中的每条边至少有一个端点在 Q 中。具有最小数量的点覆盖数被称为最小点覆盖。对于图 G 中的任意顶点 v , $M_h(v)$ 表示任意 $S \subseteq V(G)$ 中 $N_G(S)$ 的最小顶点数, 满足 $|S| = h+1$, $G[S]$ 连通且 $v \in S$, 即

$$M_h(v) = \min \{|N_G(S)| \mid S \subseteq V, v \in S, |S| = h+1, G[S] \text{ 是连通的}\}.$$

定理 4.1. 给定连通图 G , 顶点 $v \in V(G)$ 和正整数 $h \geq 2$, 任意两点之间没有公共邻点, 如果对于每个 h -限制集合 $F \subseteq V(G) \setminus \{v\}$, 满足 C_v 的点覆盖数大于等于 $2(M_h(v) + h - |F|) + 1$, 其中 C_v 是 $G - F$ 中包含 v 的连通分支, 则图 G 在顶点 v 处是 h -限制局部 $M_h(v) + h$ 可诊断的。

证明 我们通过反证法来证明。假设图 G 在顶点 v 处不是 h -限制局部可诊断的。根据引理 3.2, 存在两个不同的 h -限制集合 F_1 和 F_2 , 使得 $|F_1|, |F_2| \leq M_h(v) + h$ 并且 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 F_1 和 F_2 是不可区分的。令 $F = F_1 \cap F_2$, 则 $|F| \leq M_h(v) + h - 1$, 由于当 $F_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ (分别 $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$) 并且 $V(G) \setminus (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$ 时, $G[F_1 \setminus F_2]$ ($G[F_2 \setminus F_1]$) 和 $G - (F_1 \cup F_2)$ 的每个连通分支至少有 $h + 1$ 个顶点。即 $F = F_1 \cap F_2$ 也是一个 h -限制顶点子集, 并且 $F \subseteq V(G) \setminus \{v\}$ 。

假设 C_v 是 $G - F$ 的一个的连通分支, 使得 $v \in V(C_v)$, 根据定理 4.1 的条件可得 C_v 的点覆盖的顶点数大于等于 $2(M_h(v) + h - |F|) + 1$, 将这个数值与 $|F_1 \Delta F_2| \leq 2(M_h(v) + h - |F|)$ 以及点 v 属于 $F_1 \Delta F_2$ 进行比较, 可以得出 $F_1 \Delta F_2$ 无法成为 C_v 的点覆盖, 换句话说, 在 C_v 的点覆盖中至少有一个顶点位于 $F_1 \Delta F_2$ 之外。

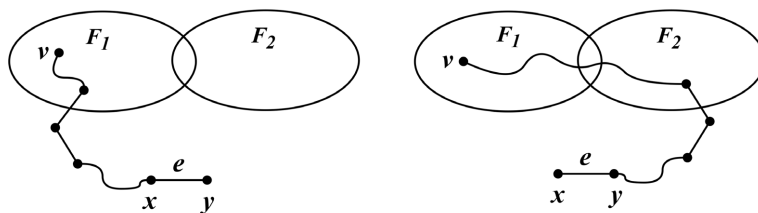


Figure 3. A path which from edge e to point v through sets F_1 or F_2

图 3. 一条从边 e 到点 v 经过集合 F_1 或 F_2 的路径

因此根据点覆盖的性质, 如图 3 在 C_v 中存在一条边 $e = (x, y)$, 这条边位于 $F_1 \Delta F_2$ 之外。由于边 e 、节点 x 和 y 以及点 v 都属于同一个连通分支 C_v , 因此存在一条从边 e 到点 v 经过集合 F_1 或 F_2 的路径。根据引理 3.2 的条件 1, (F_1, F_2) 是一对可区分的集合。这就产生了矛盾, 从而得到图 G 在顶点 v 处是 h -限制局部 $M_h(v) + h$ 可诊断的。□

4.2. 结构 $TM(v; h)$

给定正整数 $h \geq 1$ 和 $t \geq 1$, 设 G 是一个图, 使得 $\delta(G) \geq 4$, 并且 G 有一个 h -限制故障顶点集 F , 满足 $G[F]$ 的每个连通分支至少包含两个顶点。对于任意顶点 $v \in V(G)$, 设 $d = d_G v$, $R_v = 2$ 。在下文中, 我们提出了子图 $TM(v; h)$, 其顶点集 $V(TM(v; h))$ 和边集 $E(TM(v; h))$ 的设计如下(如图 4 所示)。

$V(TM(v; h))$ 的构造过程:

步骤 1. 设 $X_0 = \{v\}$ 和 $X_1 = N_G(v) = \{x_{11}, x_{21}, \dots, x_{d1}\}$ 。

步骤 2. 设 $L_v = 2 \times (2 \times (M_h(v) + h) + 1 - R_v/2) = 4M_h(v) + 4h$ 。

对于每个顶点 $u \in X_{R_v}$, 设 P_u 是 $G - \bigcup_{i=0}^{R_v-1} X_i$ 中从 u 出发的一条路径, 满足以下条件:

1) P_u 的长度为 $L_v - 1$;

2) 对于每个 $w \in V(P_u)$, $d_G(w) = d$;

3) 对于任意两个顶点 $u, w \in X_1$, $V(P_u) \cap V(P_w) = \emptyset$, 并且对于每个 $u_1 \in V(P_u)$ 和 $w_1 \in V(P_w)$, 有 $N_G(u_1) \cap N_G(w_1) = \emptyset$ 。

设 $X = \bigcup_{u \in X_1} V(P_u)$ 。

步骤 3. 设 $V(TM(v; h)) = X_0 \cup X_1 \cup X$ 。

$E(TM(v;h))$ 的构造过程:

设 $E_1 = \{(v, u) : u \in X_1\}$ 。

那么, 我们有:

$$E(TM(v;h)) = E_1 \cup \left(\bigcup_{u \in X_1} E(P_u) \right)$$

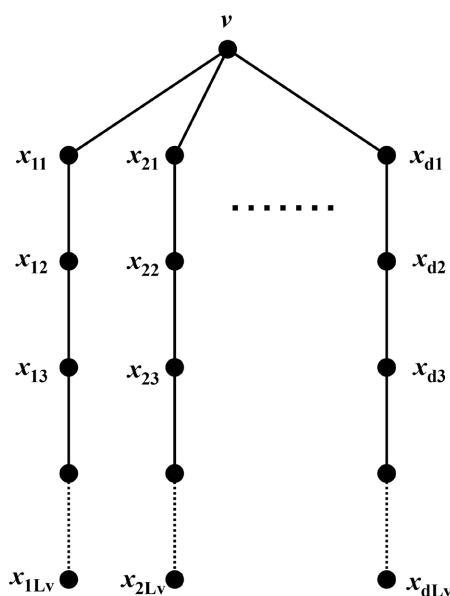


Figure 4. Diagnostic tree structure $TM(v; h)$
图 4. 诊断树结构 $TM(v; h)$

定理 4.2. 给定一个图 G , 一个顶点 $v \in V(G)$ 和一个正整数 $h \geq 2$, 假设 $d = d_G(v) \geq 4$, 并且对于任意一个 h -限制故障集合 $F \subseteq V(TM(v;h)) \setminus \{v\}$ 。如果 G 中存在结构 $TM(v;h)$, 则图 G 在顶点 v 处是 h -限制局部 $(M_h(v)+h)$ -可诊断的。

证明 根据定理 4.1, 对于任意 h -限制故障集合 $F \subseteq V(TM(v;h)) \setminus \{v\}$, 只需证明在 $TM(v;h) - F$ 中包含 v 的连通分支 C_v 的点覆盖数大于等于 $2(M_h(v)+h-|F|)+1$ 。

因为 $h \geq 2$ 并且 F 是 h -限制故障集, 所以肯定存在某个 $u \in X_{R_v}$, 使得 $VP_u \subseteq VC_v$ 。由于树 $TM(v;h)$ 中 C_v 的连通性, 存在一条从 v 到 u 的路径 P_1 在 C_v 中。那么 $P = P_1 \cup P_u$ 是一条包含 $R_v + L_v$ 个顶点的路径。因此,

$$\begin{aligned} |V(C_v)| &\geq R_v + L_v \\ &= R_v + 2 \left(2(M_h(v)+h) + 1 - \frac{R_v}{2} \right) \\ &= 4(M_h(v)+h) + 2 \end{aligned}$$

此时 C_v 是一个包含路 P 的树结构, 我们可以得到 C_v 的点覆盖数至少是 $2(M_h(v)+h)+1 \geq 2(M_h(v)+h-|F|)+1$ 。因此, 在 $TM(v;h) - F$ 中包含 v 的连通分支 C_v 满足定理 4.1 中的条件。因此, 根据定理 4.1, 图 G 在顶点 v 处是 h -限制局部可诊断的。证毕。

5. 总结

本文提出了一种基于局部诊断的大规模网络故障诊断方法, 引入了 h -限制故障模型, 并设计了子网结构 $TM(v; h)$ 。通过理论分析, 给出了在 MM^* 模型下顶点 v 的限制局部可诊断性条件。该方法能够高效判断特定顶点的工作状态, 同时保障网络的局部连通性, 提升了网络可靠性。尽管如此, 本研究仍存在局限性, 如模型的适用范围和动态适应性有待进一步验证。未来工作将聚焦于优化诊断算法、扩展模型适用范围, 并探索其在动态网络中的应用。本文的研究为大规模网络的局部故障诊断提供了一种新的思路, 具有重要的理论和实际意义。

基金项目

山西省基础研究计划资助项目(202103021224058)。

参考文献

- [1] Dahbura, A.T. and Masson, G.M. (1984) An $O(n^{2.5})$ Fault Identification Algorithm for Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **33**, 486-492. <https://doi.org/10.1109/tc.1984.1676472>
- [2] Preparata, F.P., Metze, G. and Chien, R.T. (1967) On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, **16**, 848-854. <https://doi.org/10.1109/pgec.1967.264748>
- [3] Maeng, J. and Malek, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems. In: *Proceeding of the 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, ACM Press, 173-175.
- [4] Sengupta, A. and Dahbura, A.T. (1992) On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach. *IEEE Transactions on Computers*, **41**, 1386-1396. <https://doi.org/10.1109/12.177309>
- [5] Hsu, G. and Tan, J.J.M. (2007) A Local Diagnosability Measure for Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **18**, 598-607. <https://doi.org/10.1109/tpds.2007.1022>
- [6] Chiang, C. and Tan, J.J.M. (2009) Using Node Diagnosability to Determine T-Diagnosability under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Computers*, **58**, 251-259. <https://doi.org/10.1109/tc.2008.158>
- [7] Chen, M., Hsu, D.F. and Lin, C. (2022) A New Structure for a Vertex to Be Locally T-Diagnosable in Large Multiprocessor Systems. *Theoretical Computer Science*, **934**, 81-90. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.08.020>
- [8] Chen, M., Lin, C. and Pai, K. (2022) A Tree Structure for Local Diagnosis in Multiprocessor Systems under Comparison Model. In: Hsieh, S.Y., Hung, L.J., Klasing, R., Lee, C.W. and Peng, S.L., Eds., *Communications in Computer and Information Science*, Springer, 49-60. https://doi.org/10.1007/978-981-19-9582-8_5
- [9] Lv, Y., Lin, C., Hsu, D.F. and Fan, J. (2024) An Algorithm for Conditional-Fault Local Diagnosis of Multiprocessor Systems under the MM^* Model. *Theoretical Computer Science*, **987**, Article ID: 114372. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2023.114372>
- [10] Lin, C., Kung, T. and Tan, J.J.M. (2011) Conditional-Fault Diagnosability of Multiprocessor Systems with an Efficient Local Diagnosis Algorithm under the PMC Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **22**, 1669-1680. <https://doi.org/10.1109/tpds.2011.46>
- [11] Lin, C., Kung, T. and Tan, J.J.M. (2013) An Algorithmic Approach to Conditional-Fault Local Diagnosis of Regular Multiprocessor Interconnected Systems under the PMC Model. *IEEE Transactions on Computers*, **62**, 439-451. <https://doi.org/10.1109/tc.2011.249>
- [12] Lin, C., Teng, Y., Tan, J.J.M. and Hsu, L. (2013) Local Diagnosis Algorithms for Multiprocessor Systems under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Reliability*, **62**, 800-810. <https://doi.org/10.1109/tr.2013.2285031>
- [13] Lin, L., Huang, Y., Lin, Y., Hsieh, S. and Xu, L. (2021) FFNLFD: Fault Diagnosis of Multiprocessor Systems at Local Node with Fault-Free Neighbors under PMC Model and MM^* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **33**, 1739-1751. <https://doi.org/10.1109/tpds.2021.3126257>
- [14] Yuan, J., Qiao, H., Liu, A. and Wang, X. (2022) Measurement and Algorithm for Conditional Local Diagnosis of Regular Networks under the MM^* Model. *Discrete Applied Mathematics*, **309**, 46-67. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.11.006>
- [15] Lai, P., Tan, J.J.M., Chang, C. and Hsu, L. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. <https://doi.org/10.1109/tc.2005.19>
- [16] Fàbrega, J. and Fiol, M.A. (1996) On the Extraconnectivity of Graphs. *Discrete Mathematics*, **155**, 49-57. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(94\)00369-t](https://doi.org/10.1016/0012-365x(94)00369-t)

-
- [17] Zhang, S. and Yang, W. (2016) The g -Extra Conditional Diagnosability and Sequential t/k -Diagnosability of Hypercubes. *International Journal of Computer Mathematics*, **93**, 482-497. <https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1020796>
 - [18] Lin, L., Hsieh, S., Xu, L., Zhou, S. and Chen, R. (2018) The Relationship between Extra Connectivity and Conditional Diagnosability of Regular Graphs under the PMC Model. *Journal of Computer and System Sciences*, **95**, 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2017.11.004>
 - [19] Lin, L., Xu, L., Chen, R., Hsieh, S. and Wang, D. (2019) Relating Extra Connectivity and Extra Conditional Diagnosability in Regular Networks. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, **16**, 1086-1097. <https://doi.org/10.1109/tdsc.2017.2726541>