

Zorich映射逆分支上测度序列的收敛性分析

张笑笑, 丁杰*

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2025年4月14日; 录用日期: 2025年5月7日; 发布日期: 2025年5月16日

摘要

本文研究Zorich映射逆分支生成的紧集族上概率测度序列的弱收敛性, 旨在为高维逃逸集的Hausdorff维数估计提供测度理论基础。通过构造由逆分支 Λ' 生成的嵌套紧集族 $\{N_n\}$, 定义了支撑在迭代逆像集上的概率测度序列 $\{\mu_n\}$ 。选取合适的紧集 $M \subset \mathbb{R}^3$, 使得对于任意 $\delta > 0$, 有 $\mu_n(M) \geq 1 - \delta$ 对所有 n 成立, 从而证明该测度序列的紧性。再结合Prokhorov定理, 得到该概率测度的弱收敛性, 并进一步以正数序列 $r_n(x)$ 为桥梁建立定义在 $K_n(x)$ 上的极限测度与 $K_n(x)$ 直径之间的数量关系, 为后续进一步估计以特定速度逃逸的点集的Hausdorff测度奠定基础。

关键词

Zorich映射, 概率测度, 收敛性

Convergence Analysis of Measure Sequences on Inverse Branches of Zorich Maps

Xiaoxiao Zhang, Jie Ding*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 16th, 2025

Abstract

This paper investigates the weak convergence of sequences of probability measures supported on families of compact sets generated by inverse branches of Zorich maps, aiming to establish a measure-theoretic foundation for estimating the Hausdorff dimension of escaping sets in higher dimensions. By constructing a nested family of compact sets $\{N_n\}$ induced by inverse branches Λ' , we define a sequence of probability measures supported by iterated pre-image sets $\{\mu_n\}$. Through the selection of appropriate compact sets $M \subset \mathbb{R}^3$, we demonstrate that for any $\delta > 0$, there exists $\mu_n(M) \geq 1 - \delta$ for

*通讯作者。

all n , thereby proving the tightness of the measure sequence. Combining this with Prokhorov's theorem, we establish the weak convergence of the probability measure sequence. Furthermore, using the positive integer sequence $r_n(x)$ as a bridge, the quantitative relationship between the limiting measure defined on $K_n(x)$ and the diameter of $K_n(x)$ is established. This lays the foundation for subsequent estimation of the Hausdorff measure of sets escaping at specific rates.

Keywords

Zorich Map, Probability Measure, Convergence

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在复动力系统领域, 逃逸集的分形结构研究是当前的重要方向, 其中, 指数函数 $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) 作为一类经典的超越整函数, 其动力学行为已得到深入解析. Devaney 和 Krych [1] 证明了 E_λ 的 Julia 集 $J(E_\lambda)$ 由不可数多互不相交的曲线(称为“毛发”)组成, 这些曲线连接一个有限点(称为毛发的端点)至无穷. McMullen [2] 证明了对任意 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $J(E_\lambda)$ 的 Hausdorff 维数为 2; 且该结果对逃逸集 $I(E_\lambda)$ 同样成立. Karpińska [3] [4] 进一步发现, 当 $0 < \lambda < 1/e$ 时, 毛发端点集的 Hausdorff 维数为 2, 但不含端点的毛发维数为 1. 此后, Karpińska 和 Urbański [5] 通过引入“行程表”(itinerary)方法, 定义了一类受轨道增长速率控制的子集, 并证明其 Hausdorff 维数为 $1 + 1/(1 + \delta)$, 揭示了逃逸集的分形维数随逃逸速率变化的规律.

经典复动力系统主要聚焦于二维复平面或黎曼球面上的映射, 但自然界的许多现象涉及更高维度的复杂性. Bergweiler [6] 首次将指数映射的动力学研究拓展至三维实空间, 提出了 Zorich 映射(其构造基于高维指数映射的几何推广[7]), 并将 Devaney-Krych、McMullen 的维数结果以及 Karpińska 悖论推广到三维情形. 研究表明, Zorich 映射的 Julia 集的 Hausdorff 维数为 3, 而其中毛发端点集的维数为 2, 这一现象凸显了高维逃逸集分形结构的复杂性. 值得注意的是, 若要在高维空间中进一步分析以特定速率逃逸的点集维数, 测度理论的支撑不可或缺.

在 Hausdorff 维数的估计中, 概率测度的存在性与紧性直接影响维数分析的有效性. 针对这一问题, 本文通过构造由 Zorich 映射逆分支生成的嵌套紧集族 $\{N_n\}$, 定义了一类支撑在迭代逆像集上的概率测度序列 $\{\mu_n\}$, 并利用 Prokhorov 定理证明了该测度序列的紧性. 这一结果为后续利用测度估计逃逸集维数的上下界奠定了理论基础.

2. 预备知识

2.1. Zorich 映射的定义与性质

我们先虑正方形 $Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ 和上半球面 $U := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$, 设 $h: Q \rightarrow U$ 为双 Lipschitz 映射, 定义 $F_0(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} h(x_1, x_2)$, 此时 $F_0: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, 通过沿正方形梁的边和 (X_1, X_2) 平面之间的反射, 映射 F_0 被扩展为 Zorich 映射 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. 对于任意的 $a \in \mathbb{R}$, 进一步定义 $f(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2, x_3) - (0, 0, a)$.

在此基础上, 定义集合 $P(r_1, r_2) = P(r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 2r_1| < 1, |x_2 - 2r_2| < 1\}$, 其中 $(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}^2$. 不难看出, $P(r)$ 将复平面划分为无穷多个正方形, 依据定义, 当 $r_1 + r_2$ 为偶数时, 映射 f 会把 $P(r_1, r_2) \times \mathbb{R}$

双射到上半空间; 而当 $r_1 + r_2$ 为奇数时, f 会将其双射到另一个半空间。

进一步, 对于 $M \in \mathbb{C}$, 我们定义 $H_{\geq M} := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq M\}$, 类似地定义半空间 $H_{\leq M}$ 、 $H_{>M}$ 、 $H_{<M}$ 以及超平面 $H_{=M}$ 。我们注意到, 导数 $DF(x)$ “几乎处处存在” (即除了一个零测集外, 导数在定义域内所有点都存在)。特别地, 若 $DF(x_1, x_2, 0)$ 存在, 则有如下关系:

$$DF(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} DF(x_1, x_2, 0) \quad (1)$$

这一等式表明, 当第三坐标 x_3 变化时, 导数 $DF(x)$ 随指数因子 e^{x_3} 缩放。

进一步地, 存在实数 α, m, M 满足 $0 < \alpha < 1$ 和 $m < M$, 使得:

- 在区域 $H_{\leq m}$ 内, 导数的“最大模长” (即映射的最大局部伸缩率) 几乎处处满足:

$$|DF(x)| := \sup_{|h|=1} |DF(x)(h)| \leq \alpha \quad (2)$$

- 在区域 $H_{\geq M}$ 内, 导数的“最小模长” (即映射的最小局部伸缩率) 几乎处处满足:

$$\ell(DF(x)) := \inf_{|h|=1} |DF(x)(h)| \geq \frac{1}{\alpha} \quad (3)$$

我们设 $T(r) := \{x \in P(r_1, r_2) \times H_{\geq M} : r_1 + r_2 \text{ 为偶数}\}$, 并假设 $M \geq 0$ 。文献[6]指出, 如果 $a \geq e^M - m$, 经计算可得 $f_a(T(r)) \supset H_{\geq M}$ (见[6] (2.1))。因此, 存在 f_a 的逆函数的一个分支 $\Lambda^r : H_{\geq M} \rightarrow T(r)$ 。令 $\Lambda := \Lambda^{(0,0)} : H_{\geq M} \rightarrow T(0)$, 则对于所有 $x \in H_{\geq M}$ 以及所有 $r \in S := \{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2 : s_1 + s_2 \text{ 为偶数}\}$, 均满足 $\Lambda^{(r_1, r_2)}(x) = \Lambda(x) + (2r_1, 2r_2, 0)$ 。

那么, 在 $x \in H_{\geq M}$ 上几乎处处有

$$D\Lambda(x) = Df_a(\Lambda(x))^{-1} = DF(\Lambda(x))^{-1} \quad (4)$$

由此, 根据公式(3)可得,

在 $x \in H_{\geq M}$ 上几乎处处有

$$|D\Lambda(x)| \leq \alpha \quad (5)$$

这意味着, 对于 $x, y \in H_{\geq M}$, 有

$$|\Lambda(x) - \Lambda(y)| \leq \alpha |x - y| \quad (6)$$

注意到 $Df_a(x) = DF(x)$, 由公式(1)我们可以推断出, 存在正常数 c_1 和 c_2 , 使得

$$c_1 e^{x_3} \leq \ell(Df_a(x)) \leq |Df_a(x)| \leq c_2 e^{x_3} \quad \text{a.e.} \quad (7)$$

$$\frac{1}{L} c_1^3 e^{3x_3} \leq J_f(x) \leq L c_2^3 e^{3x_3}$$

其中, $J_f(x)$ 表示雅可比行列式, L 被称为 f_a 的伸缩率。

文献[6]表明, 存在正常数 c_3 和 c_4 , 使得

$$\frac{c_3}{|x|} \leq \ell(D\Lambda(x)) \leq |D\Lambda(x)| \leq \frac{c_4}{|x|}, \text{ 对 } x \in H_{\geq M} \text{ 几乎处处成立。} \quad (8)$$

因此,

$$|\Lambda(x) - \Lambda(y)| \leq c_4 \pi \frac{|x - y|}{\min\{|x|, |y|\}} \quad (9)$$

考虑用立方体 B 对 $T(r)$ 进行覆盖, 要求该覆盖具备以下性质:

- 立方体 B 的各边长度为 2;

- 水平的面包含于 $T(r)$ 内;
- 顶面不属于 B 。

将由这些覆盖构成的族记为 B 。若 $x \in I_\infty^0$, 我们用 $B_n(x)$ 表示 B 中包含 $f^n(x)$ 的唯一立方体。记

$$K_n(x) = (\Lambda^{r_0} \circ \Lambda^{r_1} \circ \dots \circ \Lambda^{r_{n-1}})(B_n(x))$$

根据上述定义, 有 $f^n(K_{n-1}(x)) = f(B_{n-1}(x))$ 。显然, $f^n(K_{n-1}(x))$ 是一个半球壳, 它由以原点为中心的半球壳向下平移 a 个单位得到。分别用 $r_n(x)$ 和 $R_n(x)$ 表示该半球壳的内半径与外半径, 因此

$$\frac{R_n(x)}{r_n(x)} = e^2, \quad (10)$$

对于任意 $\alpha, \beta \in K_{n-1}(x)$, 映射的导数满足不等式:

$$\frac{|D(f^n)(\alpha)|}{|D(f^n)(\beta)|} \leq K^n,$$

其中, K 是双 Lipschitz 映射 $h: Q \rightarrow U$ 的 Lipschitz 常数(描述映射对距离比例的最大伸缩率)。由链式法我们得到:

$$\begin{aligned} |D(f^n)(x)| &= \prod_{j=0}^{n-1} |Df(f^j(x))| \\ &\leq c_2 e^{x_3} \cdot c_2 e^{f(x)_3} \dots c_2 e^{f^{n-1}(x)_3} \\ &\leq c_2^n \prod_{j=1}^n R_j(x), \end{aligned} \quad (11)$$

类似地, 导数的下界为:

$$c_1^n \prod_{j=1}^n r_j(x) \leq l(D(f^n)(x)), \quad (12)$$

结合公式(11)和(12)存在一个正常数 K_1 , 使得导数模长被壳层半径的连乘控制:

$$K_1^{-n} \prod_{j=1}^n r_j(x) \leq l(D(f^n)(x)) \leq |D(f^n)(x)| \leq K_1^n \prod_{j=1}^n r_j(x). \quad (13)$$

由于在几乎处处的意义下, $B_n(x) \subset f^n(K_{n-1}(x))$, 根据公式(8)~(10)可得:

$$\frac{c_3}{10r_n(x)} \leq \text{diam} \Lambda^{r_{n-1}}(B_n(x)) \leq \frac{10c_4}{r_n(x)}. \quad (14)$$

此外, 对于足够大的 K_2 , 我们有

$$K_2^{-n} \left(\prod_{j=1}^n r_j(x) \right)^{-1} \leq \text{diam} K_n(x) \leq K_2^n \left(\prod_{j=1}^n r_j(x) \right)^{-1} \quad \text{对于几乎处处的 } x. \quad (15)$$

2.2. 嵌套集与概率测度构造

固定任意一个立方体 $B_0 \in B$, 令 $B^0 = \{B_0\}$ 。从 B 中选取所有满足以下条件的立方体 Q : Q 包含在半球壳 $f(B_0)$ 内, 且

$$\min_{x \in Q} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sup_{x \in Q} \frac{|x|}{(\log|x|)^\delta},$$

于是 B^i 由所有以这种方式选取的立方体 Q 组成。

我们用“后代”一词来表示通过 f 的迭代, 从母立方体 B 生成的、满足特定条件的立方体 Q 。假设已经构造了族 B^n , 则后续的族 B^{n+1} 由 B^n 中每个立方体的所有后代构成。

若 $B_i \in B^i$ 且 B_{i+1} 是 B_i 的后代, 令

$$f_*^{-n} := \Lambda^{s_0} \circ \Lambda^{s_1} \circ \dots \circ \Lambda^{s_{n-1}},$$

则存在 f^n 唯一的逆分支 $f_*^{-n} : B_n \rightarrow B_0$, 使得对所有 $i = 0, \dots, n$ 有 $f^i(f_*^{-n}(B_n)) \subseteq B_i$ 。令 $f_*^{-n}(B^n)$ 为所有 $f_*^{-n}(B_n)$ ($B_n \in B^n$) 形式的集合的全体, 由此得到由 Zorich 映射的拉回生成的一系列嵌套交集集合 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$, 其具有以下性质:

- 每个 $K_n \in f_*^{-n}(B^n)$ 都包含在唯一的 $K_{n-1} \in f_*^{-(n-1)}(B^{n-1})$ 中;
 - 每个 K_{n-1} 至少包含一个 K_n (称其为 K_{n-1} 的子集合), K_{n-1} 的所有子集合构成的族记为 $ch(K_{n-1})$ 。
- 令 N_n 表示所有 K_n 的闭包的并集。对每个 n , 集合 $N_{n+1} \subseteq N_n$ 。将所有 $n \geq 0$ 时 N_n 的交集记为 N_∞ 。

现构造一系列概率测度 μ_n : 假设 $\mu_0(N_0) = 1$ 且已定义 N_n 上的测度 μ_n 。通过归纳法, 对每个 $K_n \in N_n$, 定义 N_{n+1} 上的 μ_{n+1} 与 N_{n+1} 上的体积测度成比例, 即

$$\mu_{n+1}|_{K_{n+1}} = \frac{\text{Vol}(K_{n+1})}{\sum_{K \in ch(K_n)} \text{Vol}(K)} \cdot \mu_n|_{K_n} \quad (16)$$

3. 概率测度的收敛性

引理 3.1 (Prokhorov 定理) 对于欧几里得空间, 若 μ_n 是 $P(\mathbb{R}^m)$ (即 m 维欧几里得空间上全体概率测度的集合) 中的一个紧序列, 则存在一个子列 (μ_{n_k}) 和一个概率测度 $\mu \in P(\mathbb{R}^m)$, 使得 μ_{n_k} 弱收敛于 μ 。

定理 3.2 测度序列 μ_n 具有紧性, 即对于任意 $\delta > 0$, 存在紧集 M , 使得对于所有的 n , 都有 $\mu_n(M) \geq 1 - \delta$ 。

证明: 为了定理的证明, 我们需要引入下面的引理:

引理 3.3 [8] 设 x_0 充分大, 对所有满足 $|x_d| \geq x_0$ 的 $x \in \mathbb{R}^d$, 定义集合

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |f_d(x)| < \exp\left(\frac{1}{2}|x_d|\right) \right\}$$

其中, $f_d(x)$ 表示映射的第 d 个坐标分量。记 $Q(x)$ 为以 x 为中心的轴对齐立方体, 则集合 S 在 $Q(x)$ 中的占比不超过 $\delta(|x_d|)$, 其中 $\delta(t) = C \cdot \exp\left(-\frac{t}{4} + 1\right)$ (C 为常数)。

由于 Zorich 映射迭代时, 仅上半空间的点会逃逸至无穷远, 因此无需考虑 $x_d < 0$ 的情形。即对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 且 $x_d \geq 0$, 恒有

$$\text{dens}(S, Q(x)) \leq \delta(x_d)$$

成立, 这里 $\delta(t) = C \cdot \exp\left(-\frac{t}{4} + 1\right)$ 。这说明, 对于那些在迭代过程中“暂时不逃逸”的点, 它们的比例随着 $|x_d|$ 的增大而指数级减少, 也就是说, 在高维空间中, 每个立方体 $Q(x)$ 内的点大部分都会被映射到更远的区域(逃逸), 只有极少数点可能暂时留在 S 中。而随着 x 离原点越来越远, 这个“极少数”的比例会像指数函数一样快速趋近于零。

根据上一章中所述, 集合 N_n 定义为 K_n 闭包的并, 其中 K_n 是正方体 B_n 做 n 次 f 的逆映射拉回后的原

像, 正方体 B_n 是有界闭集, 经过双李普希兹映射后仍然是有界闭集, 因此集合 N_n 也是有界闭集, 从而构成紧集。进一步地, 定义集合 $M = N_n \setminus (f^{-n}(S) \cap N_n)$, 作为 $f^{-n}(S) \cap N_n$ 这一开子集在 N_n 中的补集, 故 M 也是一个紧集。由之前的预备知识可知, 概率测度 $\mu_n(M)$ 与 M 在 N_n 中的密度相关, 即

$$\mu_n(M) = \text{dens}(M, N_n) = 1 - \text{dens}(f^{-n}(S) \cap N_n, N_n).$$

根据引理 3.3, $\text{dens}(S, Q(x))$ 呈指数衰减。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_1^n \cdot \exp\left(-\frac{r_n}{4} + 1\right) = 0$, 因此对任意的 δ , 当 n 足够大时有

$$\begin{aligned} \mu_n(M) &\geq 1 - K_1^n \cdot \text{dens}(S \cap f^n(N_n), f^n(N_n)) \\ &\geq 1 - C \cdot K_1^n \cdot \exp\left(-\frac{r_n}{4} + 1\right) \\ &\geq 1 - \delta \end{aligned} \quad (17)$$

成立。因此, μ_n 具有紧性。

由引理 3.1 可得, 概率测度 μ_n 弱收敛于极限 μ 并且有

$$\mu(K_n) = \mu_n(K_n) \text{ 对每一个 } K_n \in N_n. \quad (18)$$

根据(15)、(16)、(18)可得, 对于某个正数 c_5 , 有下面的等式成立:

$$\begin{aligned} \mu(K_n(x)) &= \mu_n(K_n(x)) = \frac{\text{Vol}(K_n(x))}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{n-1}(x))} \text{Vol}(K)} \cdot \mu_{n-1}(K_{n-1}(x)) \\ &= \frac{\text{Vol}(K_n(x)) \cdots \text{Vol}(K_1(x))}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{n-1}(x))} \text{Vol}(K) \cdots \sum_{K \in \text{ch}(K_0(x))} \text{Vol}(K)} \cdot \mu_0(K_0(x)) \\ &= \text{Vol}(K_n(x)) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\text{Vol}(K_{i-1}(x))}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{i-1}(x))} \text{Vol}(K)} \cdot \frac{1}{\text{Vol}(K_0(x))} \\ &= c_5 (\text{diam}(K_n(x)))^3 \prod_{i=1}^n \frac{\text{Vol}(K_{i-1}(x))}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{i-1}(x))} \text{Vol}(K)} \end{aligned}$$

由(7)我们可以对右边的连乘项进一步放缩:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}(K_{i-1}(x))}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{i-1}(x))} \text{Vol}(K)} &\geq \left(\frac{c_1^3}{L^2 c_2^3}\right)^i \frac{\text{Vol} f^i(K_{i-1}(x))}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{i-1}(x))} \text{Vol} f^i(K)} \\ &= \left(\frac{c_1^3}{L^2 c_2^3}\right)^i \frac{\frac{2}{3} \pi (e^6 - 1) r_i^3(x)}{\sum_{K \in \text{ch}(K_{i-1}(x))} \text{Vol} f^i(K)} \\ &\geq \frac{\frac{2}{3} \pi (e^6 - 1) r_i^3(x)}{\left(\frac{r_i(x)}{(\log r_i(x))^\varepsilon}\right)^2 \cdot r_i(x)} \\ &= \frac{2}{3} \pi (e^6 - 1) (\log r_i(x))^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

因此, 结合(15), 我们有:

$$\begin{aligned}\mu(K_n(x)) &\geq c_5 \left(\frac{2}{3}\pi(e^6-1)\right)^n K_2^{-3n} \left(\prod_{j=1}^n r_j(x)\right)^{-3} \prod_{i=1}^n (\log r_i(x))^{2\varepsilon} \\ &= A^n \left(\prod_{j=1}^n r_j(x)\right)^{-(1+\delta)} \prod_{i=1}^n (r_i(x))^{\delta-2} (\log r_i(x))^{2\varepsilon} \\ &\geq \left(\frac{A}{K_2}\right)^n \text{diam}(K_n(x))^{1+\delta} \prod_{i=1}^n (r_i(x))^{\delta-2} (\log r_i(x))^{2\varepsilon},\end{aligned}\quad (19)$$

其中, $A^n := c_5 \frac{2}{3}\pi(e^6-1)K_2^{-3n}$ 。

由于 $r_n(x)$ 是正方体 $B_{n-1}(x)$ 的下底面在经过一次 Zorich 映射迭代后得到的半球壳的内壳的模, 根据 Zorich 映射的定义我们有 $\log r_n(x) \sim O(r_{n-1}(x))$ 。那么通过建立双参数 (δ, δ) 的约束关系, 我们可将乘积项

$$\prod_{i=1}^n (r_i(x))^{\delta-2} (\log r_i(x))^{2\delta}$$

转化为关于迭代阶数 n 的指数控制因子。从而基于(19)式, 进一步建立起定义在 $K_n(x)$ 上的测度与其直径之间的数量关系, 为后续应用 Frostman 引理确立 Hausdorff 维数下界提供了核心估计工具。

致 谢

作者衷心感谢崔巍巍为本文提供的宝贵意见, 同时我们也衷心感谢山西省基础研究计划(202103021224069)的支持。

参考文献

- [1] Devaney, R.L. and Krych, M. (1984) Dynamics of $\text{Exp}(z)$. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **4**, 35-52. <https://doi.org/10.1017/s014338570000225x>
- [2] McMullen, C. (1987) Area and Hausdorff Dimension of Julia Sets of Entire Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **300**, 329-342. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1987-0871679-3>
- [3] Karpińska, B. (1999) Area and Hausdorff Dimension of the Set of Accessible Points of the Julia Sets of λe^z and $\lambda \sin(z)$. *Fundamenta Mathematicae*, **159**, 269-287. https://doi.org/10.4064/fm_1999_159_3_1_269_287
- [4] Karpińska, B. (1999) Hausdorff Dimension of the Hairs without Endpoints for $\lambda \text{Exp } z$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, **328**, 1039-1044. [https://doi.org/10.1016/s0764-4442\(99\)80321-8](https://doi.org/10.1016/s0764-4442(99)80321-8)
- [5] Karpinska, B. and Urbanski, M. (2006) How Points Escape to Infinity under Exponential Maps. *Journal of the London Mathematical Society*, **73**, 141-156. <https://doi.org/10.1112/s0024610705022465>
- [6] Bergweiler, W. (2010) Karpińska's Paradox in Dimension 3. *Duke Mathematical Journal*, **154**, 599-630. <https://doi.org/10.1215/00127094-2010-047>
- [7] Zorich, V.A. (1967) A Theorem of MA Lavrent'ev on Quasiconformal Space Maps. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **3**, 389-403. <https://doi.org/10.1070/sm1967v003n03abeh002751>
- [8] Vogel, S. (2015) On the Measure of the Escaping Set of a Quasiregular Analogue of Sine. Ph.D. Thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.