

基于饱和发生率的后疫情时代新冠社区传播与防控分析

邵 扬¹, 金银来^{1*}, 曹思琪^{1*}, 吴 敏¹, 李梦洁¹, 周 蕾¹, 高振伟¹, 马明芳², 郑晓雅²

¹临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

²临沂大学信息科学与工程学院, 山东 临沂

收稿日期: 2025年4月14日; 录用日期: 2025年5月7日; 发布日期: 2025年5月14日

摘 要

本文研究了一类总人口为常数的具有饱和发生率和饱和移出率的SIRS传染病模型, 得到了模型的基本再生数, 分析了无病平衡点的局部渐近稳定和不稳定的条件, 同时获得了地方病平衡点的存在唯一性条件以及渐近稳定性条件。进一步通过数值模拟对相关因素进行分析, 为社区应对传染病提供建议。

关键词

新冠, 饱和发生率, SIRS模型, 地方病

Analysis of COVID-19 Community Transmission and Prevention in the Post-Pandemic Era Based on Saturation Incidence Rates

Yang Shao¹, Yinlai Jin^{1*}, Siqi Cao^{1*}, Min Wu¹, Mengjie Li¹, Lei Zhou¹, Zhenwei Gao¹, Mingfang Ma², Xiaoya Zheng²

¹School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

²School of Computer Science & Engineering, Linyi University, Linyi Shandong

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 14th, 2025

Abstract

In this paper, the authors studied a class of SIRS infectious disease models with a constant total

*通讯作者。

文章引用: 邵扬, 金银来, 曹思琪, 吴敏, 李梦洁, 周蕾, 高振伟, 马明芳, 郑晓雅. 基于饱和发生率的后疫情时代新冠社区传播与防控分析[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 110-120. DOI: 10.12677/aam.2025.145239

population, saturation incidence and saturation removal rates, obtained the basic reproduction number of the model, analyzed the conditions for local asymptotic stability and instability of disease-free equilibrium points, and obtained the conditions for the existence, uniqueness, and asymptotic stability of endemic equilibrium points. Furthermore, numerical simulations were conducted to analyze relevant factors and provide recommendations for community response to infectious diseases.

Keywords

COVID-19, Saturated Incidence Rate, SIRS Model, Endemic Disease

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

传染病是一种在人与人、动物与动物或人与动物之间相互传播的疾病。传染病的暴发与流行对人类文明和社会发展影响巨大,导致经济遭受损失。人类与传染病的斗争一直伴随着社会的发展,人类在致力于传染病的治疗和防控的同时,也在探索影响其传播的因素及其流行的规律,近二三十年来,传染病动力学研究已经成为应用数学研究的热点。

社区作为居民活动的主要地点,是发现、识别传染病的“哨卡”,社区内其他居民亦有可能接触第一个或第一批传染病患者。因此,发挥社区的预防和控制力度,对传染病的防控有重要意义。

新冠肺炎自暴发以来,一度蔓延全球,对公共卫生体系造成严峻挑战,目前人类与新冠肺炎的斗争已经取得了决定性的胜利,进入常态化防控与局部应急处置相结合的新阶段,疫情传播与防控呈现复杂化、长期化、精准化特点。因此,后疫情时代,社区防控即成为疫情防控的核心环节。由于病毒持续变异导致传播力增强,社区传播呈现饱和状态,再者,由于医疗资源分配不均及康复周期延长,患病者的治愈与恢复也呈现饱和特征,亟需探索区域社区传播的规律以发挥社区防控的灵活精准高效的重要作用。

近几十年来,人们对于传染病传播规律的动力学模型的研究已经取得了一些显著的成果(部分成果可以参见[1]及其参考文献)。另外,文献[2]研究了一类具有饱和发生率和暂时免疫力的传染病 SIR 模型。文献[3]研究了一类具有饱和发生率的 SIS 数学模型。文献[4]研究了饱和发生率为 $\beta SI/(1+\alpha I)$, 考虑各类都有人群输入的 SIRS 传染病模型。

现实中不同年龄段人群对传染病的易感性、感染后的症状表现及传播能力也会表现出不同程度的差异,为了突出传染病在城市社区传播的基本动力学特征,本文我们不区分年龄结构的影响。另外,不同城市以及同一城市的不同区域,在人口密度、医疗卫生资源分布、居民生活习惯等方面均有差异,为使模型具备普适性,本文暂时不考虑这些空间差异带来的影响,从而便于从一般意义模拟和预测传染病在城市社区中的传播态势。

本文基于传染病动力学中的 SIRS 模型,根据社区群体的特性,以及与之有关的社会因素,忽略一些复杂的次要因素,只考虑一些主要因素的影响,建立一种具有简单形式的饱和发生率和饱和移出率的 SIRS 模型。分析地方病平衡点的存在及其稳定性,并通过数值模拟加以验证,为社区传染病的控制提供指导与建议。

2. 基于饱和发生率的社区传染病模型

本文将研究一类同时带有饱和发生率和饱和移出率的 SIRS 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{1+\alpha I} + dN - dS + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d+\mu)I - \frac{\xi I^2}{1+kI} \\ \frac{dR}{dt} = \frac{\xi I^2}{1+kI} + \mu I - dR - \delta R \end{cases} \quad (1)$$

其中, S 、 I 、 R 分别代表了 t 时刻的易感者、感染者以及获得临时免疫能力的恢复者的人口数量。自然出生率与自然死亡率皆为 d , dN 代表进入易感者类的补充人口, δ 代表恢复的感染者再次失去免疫能力成为易感者的比率, μ 是自然恢复率, 从易感者到感染者的饱和发生率率为 $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$, 从感染者到恢复者的治疗饱和发生率为 $\frac{\xi I^2}{1+kI}$ 。

令 $N = S + I + R$, 通过计算 $\frac{dN}{dt} = 0$ 得到人口数量 N 是常数。于是方程可化简为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{1+\alpha I} + (d+\delta)N - (d+\delta)S - \delta I \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d+\mu)I - \frac{\xi I^2}{1+kI} \end{cases} \quad (2)$$

3. 模型分析

3.1. 基本再生数

记 $f_1 := -\frac{\beta SI}{1+\alpha I} + (d+\delta)N - (d+\delta)S - \delta I$, $f_2 := \frac{\beta SI}{1+\alpha I} - (d+\mu)I - \frac{\xi I^2}{1+kI}$ 。设状态变量为 $X = (S, I)^T$ 。
 $I = 0$ 时, 解方程组

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

得 $S = N$, $I = 0$, 即得无病平衡点 $M_0(N, 0)$ 。

基于下一代矩阵法计算基本再生数[5]。

1) 感染项 $F(x)$, 主要来自 $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ 部分, 对 I 求偏导, 得:

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta SI}{1+\alpha I} \right) = \frac{\beta S(1+\alpha I) - \alpha \beta SI}{(1+\alpha I)^2} = \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}$$

在无病平衡点处,

$$\left. \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta SI}{1+\alpha I} \right) \right|_{(N,0)} = \beta N$$

将感染项在无病平衡点处线性化得到感染矩阵

$$F = (\beta N)_{1 \times 1}$$

2) 恢复项 $V(x)$, 来自 $(d+\mu)I + \frac{\xi I^2}{1+kI}$ 部分, 对 I 求偏导, 得:

$$\frac{\partial}{\partial I} \left((d+\mu)I + \frac{\xi I^2}{1+kI} \right) = (d+\mu) + \frac{2\xi I(1+kI) - k\xi I^2}{(1+kI)^2} = (d+\mu) + \frac{2\xi I + k\xi I^2}{(1+kI)^2}$$

在无病平衡点处,

$$\left. \frac{\partial}{\partial I} \left((d+\mu)I + \frac{\xi I^2}{1+kI} \right) \right|_{(N,0)} = (d+\mu)$$

同样可以得到恢复矩阵

$$V(x) = (d+\mu)_{1 \times 1}$$

3) 计算下一代矩阵及其谱半径的基本再生数。

由上述讨论可以得出:

$$FV = \left(\frac{\beta N}{d+\mu} \right)$$

对于 1×1 矩阵, 其谱半径即矩阵元素本身, 所以基本再生数 $R_0 = \frac{\beta N}{d+\mu}$ 。

3.2. 无病平衡点

系统在无病平衡点 $M_0(N, 0)$ 的雅可比矩阵:

$$J_0 = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \end{array} \right)_{(N,0)} = \left(\begin{array}{cc} -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - (d+\delta) & -\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} - \delta \\ \frac{\beta I}{1+\alpha I} & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} - \frac{2\xi I + k\xi I^2}{(1+kI)^2} - (d+\mu) \end{array} \right)_{(N,0)} \quad (4)$$

$$= \left(\begin{array}{cc} -(d+\delta) & -\beta N - \delta \\ 0 & \beta N - (d+\mu) \end{array} \right)$$

解特征方程

$$|J_0 - \lambda E| = \begin{vmatrix} -(d+\delta) - \lambda & -\beta N - \delta \\ 0 & \beta N - (d+\mu) - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + (d+\delta))(\lambda - \beta N + (d+\mu)) = 0$$

得到两个特征根:

$$\lambda_1 = -(d+\delta), \lambda_2 = \beta N - (d+\mu).$$

当 $\beta N - (d+\mu) < 0$, 即 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, 为结点, 无病平衡点局部渐近稳定。

当 $\beta N - (d+\mu) > 0$, 即 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, 为鞍点, 无病平衡点不稳定。

3.3. 地方病平衡点

当 $I \neq 0$ 时, 解方程组(3), 化简得到关于 I 的一元二次方程:

$$aI^2 + bI + c = 0$$

其中, $a = -k\beta\delta - \beta\xi - (d+\delta)\alpha\xi - (d+\mu)k\beta - (d+\mu)(d+\delta)k\alpha < 0$,

$$b = -\beta\delta + k\beta(d+\delta)N - (d+\delta)\xi - (d+\mu)\beta - (d+\mu)(d+\delta)\alpha - (d+\mu)(d+\delta)k$$

$$= k(d+\delta)(d+\mu)(R_0 - 1) - \beta\delta - (d+\delta)\xi - (d+\mu)\beta - (d+\mu)(d+\delta)\alpha,$$

$$c = \beta(d + \delta)N - (d + \mu)(d + \delta) = (d + \delta)(d + \mu)(R_0 - 1).$$

1) 当 $R_0 < 1$ 时, $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, 根据韦达定理, 有 $I_1 + I_2 = -\frac{b}{a} < 0$, $I_1 I_2 = \frac{c}{a} > 0$, 此时两根全为负根, 系统无地方病平衡点。

2) 当 $R_0 = 1$ 时, $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$, 此时方程可化为关于 I 的一次方程 $aI + b = 0$, 方程有唯一根 $I = -\frac{b}{a} < 0$, 此时系统无地方病平衡点。

3) 当 $R_0 > 1$ 时, $a < 0$, $c > 0$, 根据韦达定理 $I_1 I_2 = \frac{c}{a} < 0$, 且 $\Delta = b^2 - 4ac$, 根据 $a < 0$, $c > 0$, 得 $\Delta = b^2 - 4ac > b^2$, 方程有两个符号相反的实根, 容易判断 $I_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} < 0$, $I_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} > 0$, 则有唯一的地方病平衡点 $M^*(S^*, I^*)$, 其中 $I^* = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ 。

综上所述, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点存在且唯一。此时, 系统的雅可比矩阵是:

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{-\beta I}{1 + \alpha I} - (d + \delta) & -\frac{\beta S}{(1 + \alpha I)^2} - \delta \\ \frac{\beta I}{1 + \alpha I} & \frac{\beta S}{(1 + \alpha I)^2} - \frac{2\xi I + k\xi I^2}{(1 + kI)^2} - (d + \mu) \end{pmatrix}$$

由方程

$$\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (d + \mu)I - \frac{\xi I^2}{1 + kI} = 0$$

得系统的雅可比矩阵可变形为:

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{-\beta I}{1 + \alpha I} - (d + \delta) & -\frac{d + \mu}{1 + \alpha I} - \frac{\xi I}{(1 + kI)(1 + \alpha I)} - \delta \\ \frac{\beta I}{1 + \alpha I} & \frac{d + \mu}{1 + \alpha I} + \frac{\xi I}{(1 + kI)(1 + \alpha I)} - \frac{2\xi I + k\xi I^2}{(1 + kI)^2} - (d + \mu) \end{pmatrix}$$

此时, 雅可比矩阵的迹为:

$$\text{Tr}(J^*) = \frac{-\beta I}{1 + \alpha I} - (d + \delta) + \frac{d + \mu}{1 + \alpha I} + \frac{\xi I}{(1 + kI)(1 + \alpha I)} - \frac{2\xi I + k\xi I^2}{(1 + kI)^2} - (d + \mu)$$

化简得到:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J^*) &= \frac{1}{1 + \alpha I} \frac{1}{(1 + kI)^2} \left[-\beta I(1 + kI)^2 - (d + \delta)(1 + \alpha I)(1 + kI)^2 - \xi I \right. \\ &\quad \left. - (2\xi I + k\xi I^2)\alpha I - (d + \mu)(1 + kI)^2 \alpha I \right] \end{aligned} \quad (5)$$

观察(5)式各项系数前符号, 即可得到:

$$\text{Tr}(J^*) < 0$$

再考虑雅可比矩阵的行列式 $\det(J^*)$,

$$\det(J^*) = \left[\frac{-\beta I}{1+\alpha I} - (d+\delta) \right] \left[\frac{d+\mu}{1+\alpha I} + \frac{\xi I}{(1+kI)(1+\alpha I)} - \frac{2\xi I + k\xi I^2}{(1+kI)^2} - (d+\mu) \right] + \frac{\beta I}{1+\alpha I} \left[\frac{d+\mu}{1+\alpha I} + \frac{\xi I}{(1+kI)(1+\alpha I)} + \delta \right]$$

化简得到:

$$\det(J^*) = \frac{1}{1+\alpha I} \frac{1}{(1+kI)^2} \left\{ \left(\frac{\beta I}{1+\alpha I} + d+\delta \right) \left[\alpha(d+\mu)(1+kI)^2 I \right] + \frac{\beta I}{1+\alpha I} (2+kI)\xi I(1+\alpha I) + (d+\delta)\xi I \left[1+2\alpha I + \alpha k I^2 \right] + \frac{\beta I}{1+\alpha I} \left[(d+\mu)(1+kI)^2 + \delta(1+\alpha I)(1+kI)^2 \right] \right\} \quad (6)$$

观察(6)式各项符号, 可以发现

$$\det(J^*) > 0$$

综上, 地方病平衡点是渐近稳定的。

3.4. 数值模拟

选取初始值 $(S_0, I_0, R_0) = (10, 10, 10)$, 首先验证无病平衡点的正确性, 选取参数 $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.01$, $\delta = 0.05$, $\xi = 0.5$, $k = 0.6$, $d = 0.3$, $\mu = 0.2$, 通过计算可得 $R_0 = 0.2 < 1$, $(S, I, R) = (30, 0, 0)$, 其图像如图 1 所示。

对于相同的初始值, 为了验证地方病平衡点的稳定性, 选取参数 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\delta = 0.05$, $\xi = 0.3$, $k = 0.65$, $d = 0.35$, $\mu = 0.25$, 通过计算可得 $R_0 = 5 > 1$, $(S, I, R) = (30, 0, 0)$, 图像如图 2 所示。

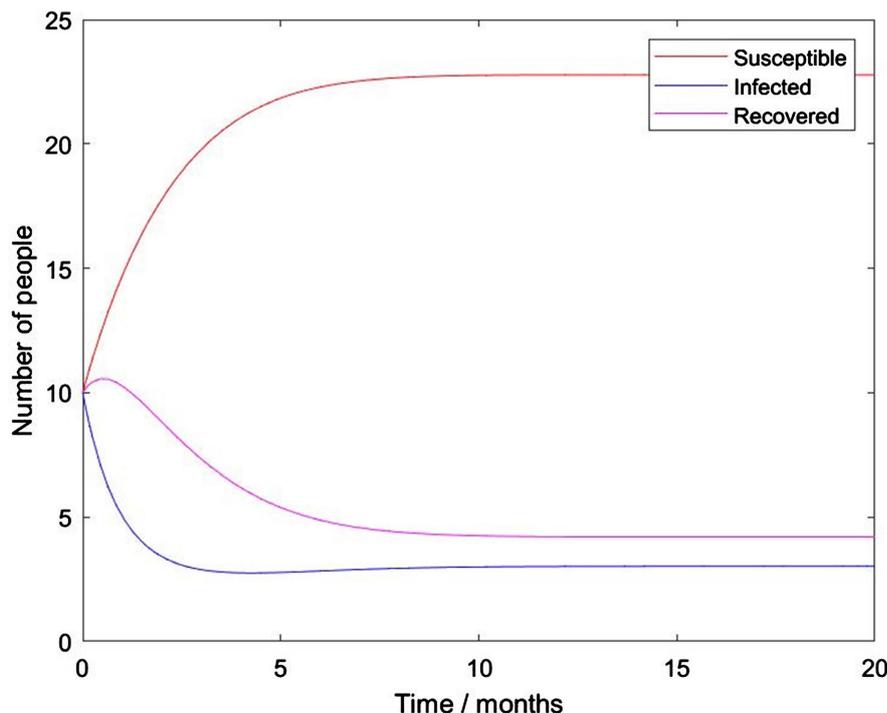


Figure 1. Basic reproduction number < 1

图 1. 基本再生数 < 1

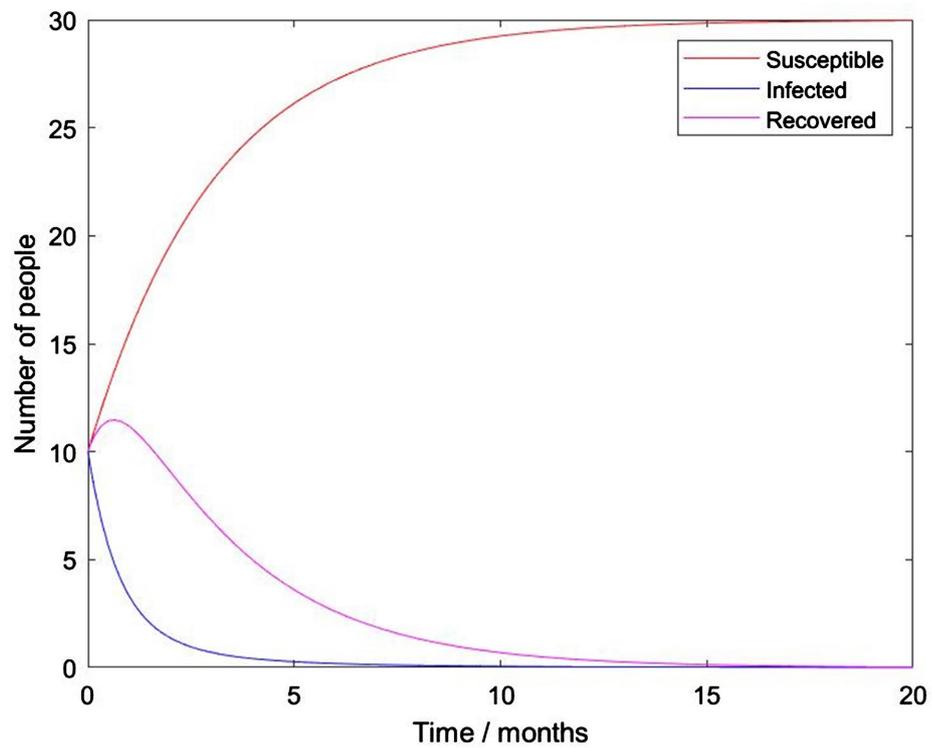


Figure 2. Basic reproduction number > 1
图2. 基本再生数 > 1

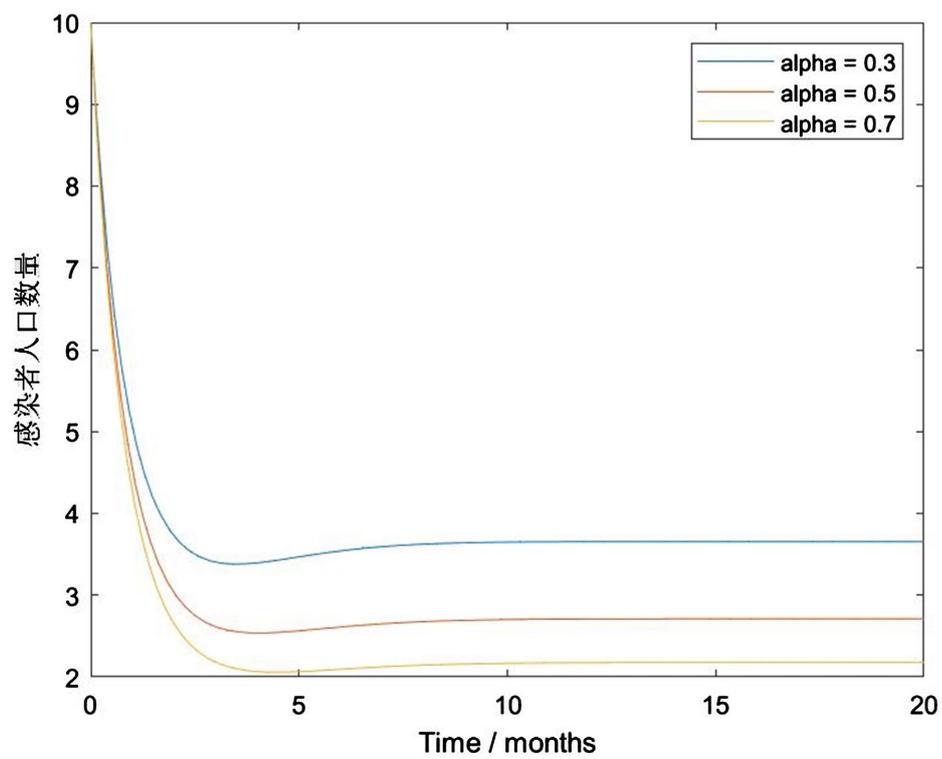


Figure 3. Different infection saturation coefficient α
图3. 不同感染饱和系数 α

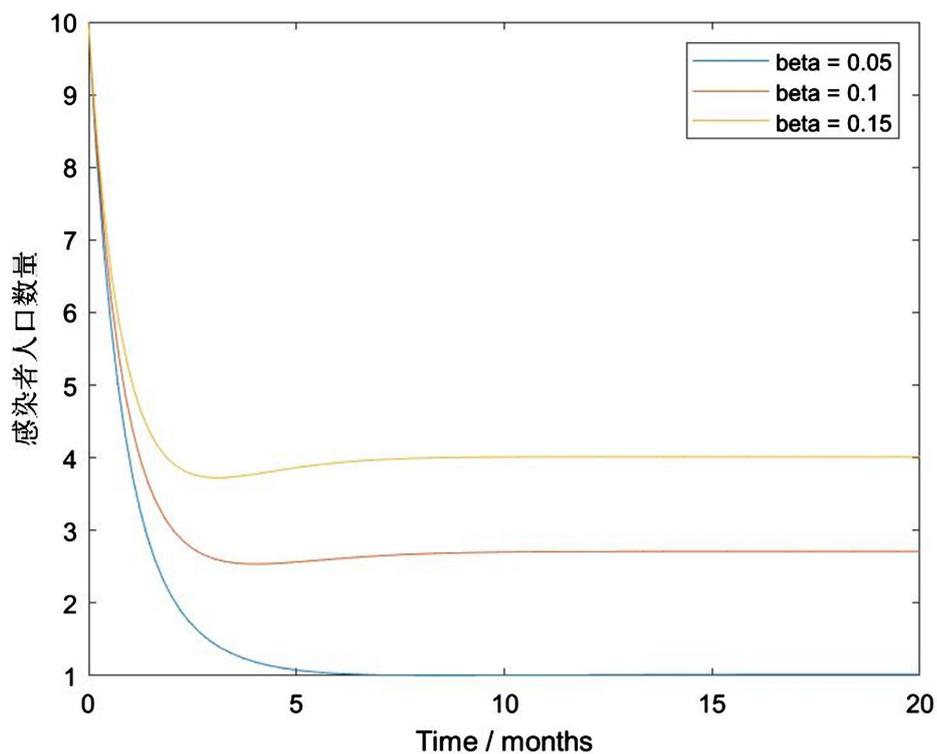


Figure 4. Different infection coefficient β

图 4. 不同感染系数 β

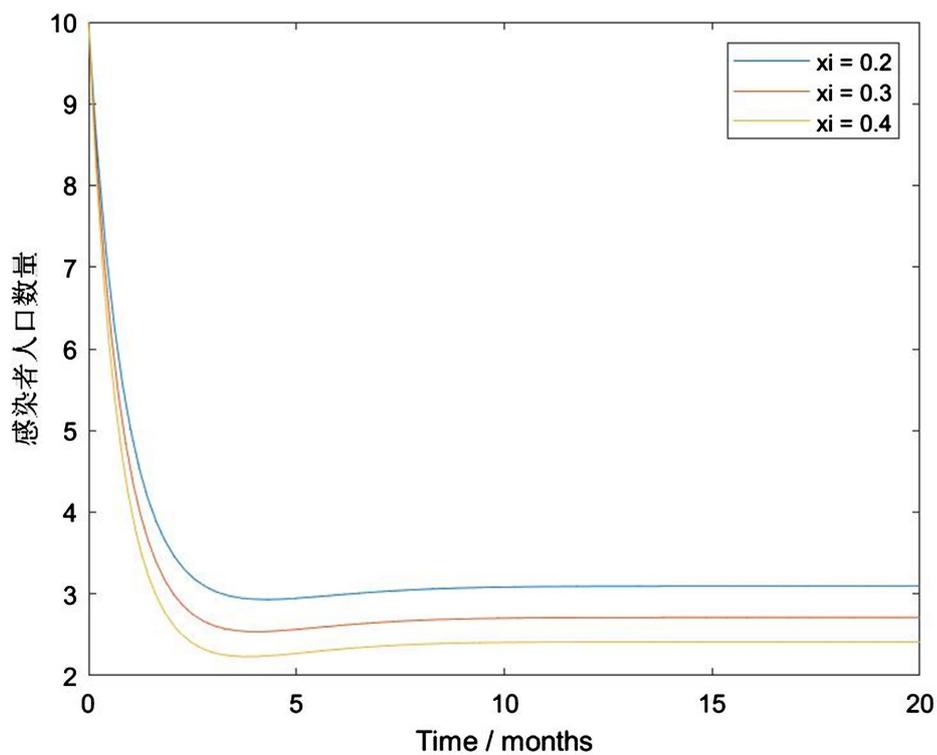


Figure 5. Different treatment recovery saturation coefficient ζ

图 5. 不同治疗恢复饱和系数 ζ

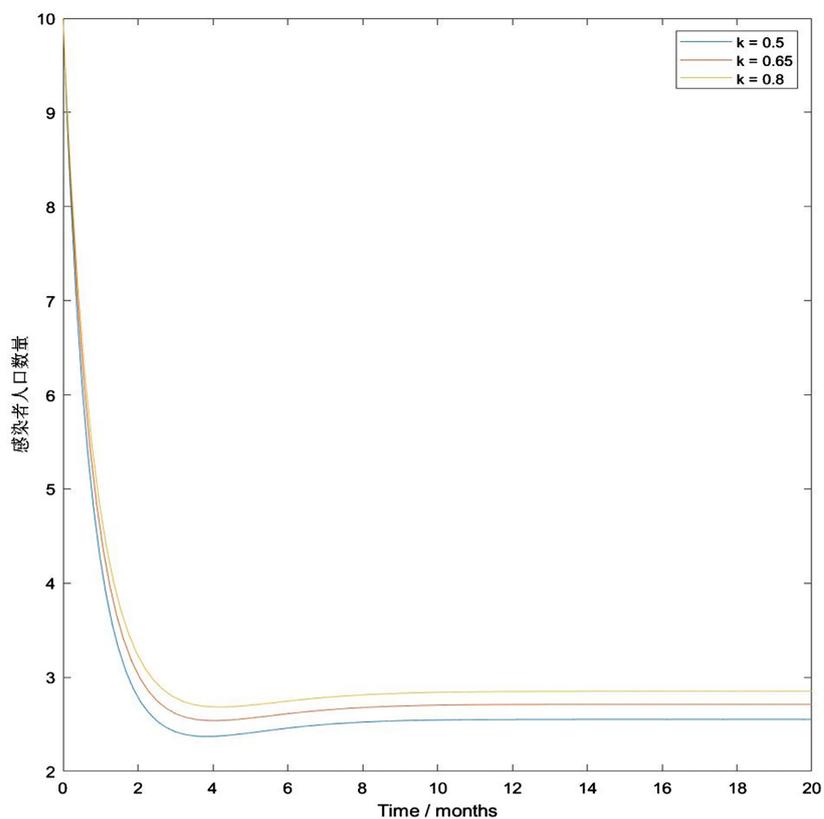


Figure 6. Different recovery treatment coefficient k

图 6. 不同恢复治疗系数 k

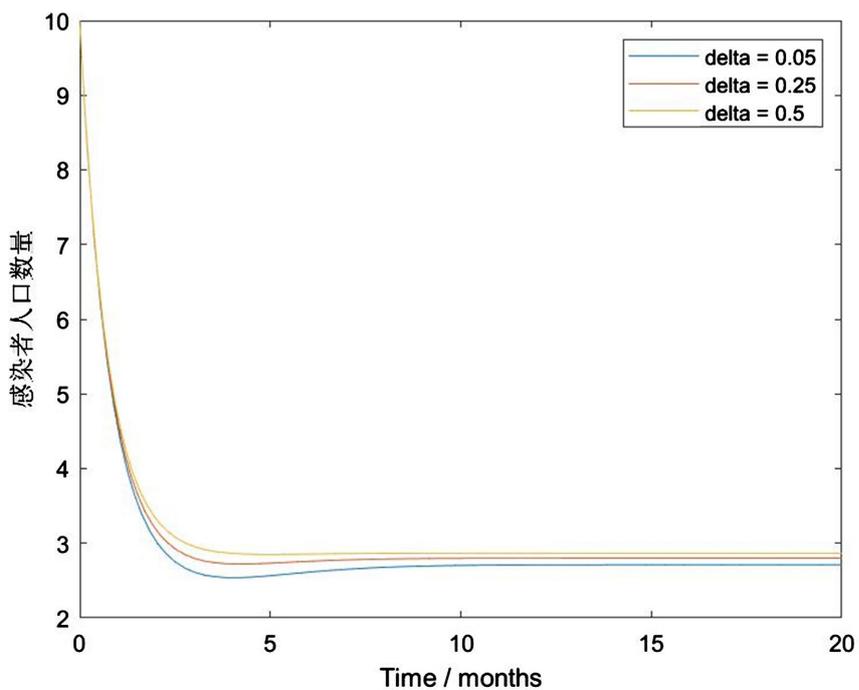


Figure 7. Different immune loss coefficient δ

图 7. 不同免疫丧失系数 δ

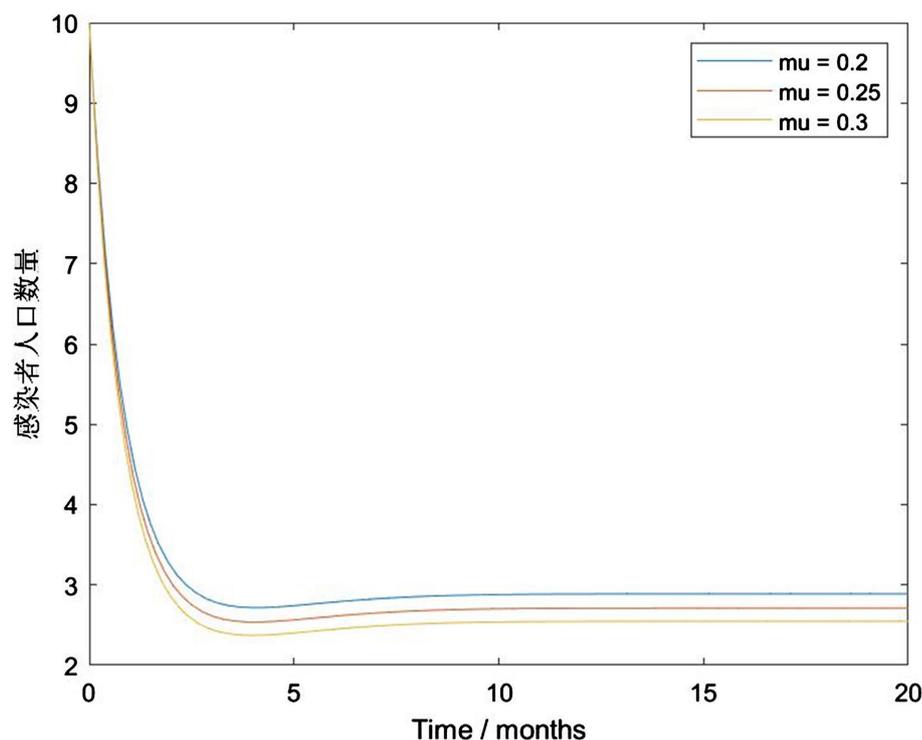


Figure 8. Different natural recovery rate μ
图 8. 不同自然恢复率 μ

4. 模型的影响因素分析与防控

突发公共卫生事件对人类构成了巨大威胁。由于传染病暴发具有高度不确定性、演变复杂性等特点。因此，社区防控者及时有效地应对突发公共卫生事件对疾病的防控至关重要。

4.1. 易感者到感染者的饱和和发生率对社区人口的影响

由图 3、图 4 可知，饱和系数 α 越大，感染系数 β 越小，感染者数量越少，此时社区健康的人群数量越多，因此可以通过控制饱和和发生率的各项系数进行防控。具体措施通常有：增强公共卫生宣传，针对不同人群，开展健康教育活动，对老年人、儿童、流动人口等设计差异化的宣传材料，采用短视频、社区广播等多媒体形式传播，提高人们的疫情防控意识。定期举办培训课程，发放居家消毒操作手册，来减少感染的概率。

对参数的影响：降低感染率，减少易感者被感染风险。

对疾病传播的影响：增强公共卫生宣传能力，让人们更注重个人防护，进一步减少易感者与病毒接触的机会，减少新发病例，大幅降低感染率，减少疾病传播的潜在路径，减缓传播速度，还能促使民众主动配合防疫措施，减轻疫情防控压力，有效控制疾病传播。

4.2. 从感染者到恢复者的饱和和发生率对社区人口的影响

由图 5、图 6 可知，治疗恢复饱和系数 ξ 越大，恢复治疗系数 k 越小，感染者数量越少，此时健康人群最多。为了提高恢复人群数量，社区常常采用“四早”原则，即早发现，早报告，早诊断，早隔离，加强疫情的检测，可以在小区广场、便利店设置自助采样亭，24 小时开放，为行动不便者提供上门采样服务，由志愿者或社区医生执行，早发现早治疗。保证社区医院物资和药品充足，以给感染者快速有效的

治疗。

对参数的影响：提高恢复率，让感染者更快恢复为康复者。

对疾病传播的影响：减少感染者在人群中停留传播疾病的时间，降低疾病传播范围和速度。

4.3. 免疫丧失系数 δ 对社区人口的影响

免疫丧失率是指在特定人群中，由于各种原因导致免疫系统功能减退或丧失的个体所占的比例。如图 7 由分析可知， δ 越小染病者数量越少。社区内人员要保持良好的个人卫生习惯，增加体育锻炼，提高免疫力，接种疫苗，保持社交距离，在公共场合佩戴口罩等。

对参数的影响：一定程度上降低免疫丧失率。长期保持健康生活方式提升人群整体免疫力，使得易感者群体对疾病的抵抗力增强，在同样接触感染源的情况下，感染疾病的概率可能降低。

对疾病传播的影响：通过提升人群整体健康水平，降低人群对疾病的易感性，减少感染发生的可能性。

4.4. 自然恢复率 μ 对社区人口的影响

对图 8 进行分析可知，自然恢复率 μ 越高，染病者数量越少，由此患者可以加强体育锻炼，多吃一些高营养的食品，提高自身抵抗能力，保持室内环境卫生，定期给室内通风，保持空气流通，给患者创造一个良好的环境。

对参数的影响：一定程度上提高自然恢复率。

对疾病传播的影响：染病者数量减少，疾病传播速度变慢。

5. 结论

本文研究了一类具有饱和发生率的 SIRS 模型的动力学系统，给出模型的基本再生数 R_0 ，得到各类平衡点。如果 $R_0 \leq 1$ ，无病平衡点渐近稳定，此时疾病将被根除；如果 $R_0 > 1$ ，地方病平衡点局部渐近稳定，此时疾病将发展为地方病。利用特征值判别法证明两处平衡点都是局部渐近稳定的，并给出数值模拟验证结论。最后通过分析各项系数对疾病的传播和防控提出建议。

基金项目

临沂大学大学生创新创业训练计划项目(2023)和山东省自然科学基金(ZR2018MA016, ZR2015AL005)项目支持。

参考文献

- [1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 靳祯. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] 成红胜, 成诚. 基于 COVID-19 传染病 SIR 模型的稳定性分析[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2021, 20(4): 290-295.
- [3] 努尔别克·艾孜玛洪, 瓦提·对山汗, 哈依沙尔·海拉提, 等. 具有饱和发生率的 SIS 传染病模型稳定性[J]. 山东航空学院学报, 2024, 41(4): 127-131.
- [4] 崔倩倩, 张强, 杨霞. 具有饱和发生率的 SIRS 传染病模型的稳定性[J]. 石河子大学学报(自然科学版), 2013, 31(6): 789-791.
- [5] 于颖. 基于网络搜索数据的流感传播动力学建模与应用研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2023.