

具有特殊权重的Paley-Wiener空间上的线性宽度问题

罗莹

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年4月14日; 录用日期: 2025年5月7日; 发布日期: 2025年5月16日

摘要

带有限函数空间在数值分析、数据拟合等方面有广泛的应用, 为许多问题提供了稳定性和可控性, 能够有效地处理近似问题, 找到最佳逼近方案。Paley-Wiener空间作为带有限函数空间的特殊情况, 也是广泛应用于分析和信号处理等领域。本文研究加权多元Paley-Wiener空间在概率框架和平均框架下的逼近特征, 特别地, 利用离散化的方法估计了在概率框架和平均框架下, 加权多元Paley-Wiener空间的线性 n -宽度的精确渐进阶。

关键词

加权多元Paley-Wiener空间, 概率框架, 平均框架, 线性 n -宽度

Linear Width Problem of Paley-Wiener Spaces with Special Weights

Ying Luo

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 16th, 2025

Abstract

Spaces of bounded functions have wide applications in numerical analysis, data fitting, and other fields. They provide stability and controllability for many problems, effectively handling approximation problems and finding optimal approximation solutions. As a special case of spaces of bounded functions, Paley-Wiener spaces are also widely used in fields such as analysis and signal processing. This paper studies the approximation properties of weighted multivariate Paley-Wiener spaces in probability

and average settings. Specifically, by using discretization methods, it estimates the exact asymptotic order of the linear n -width of weighted multivariate Paley-Wiener spaces in both the probabilistic and average settings.

Keywords

Weighted Multivariate Paley-Wiener Space, Probability Settings, Average Settings, Linear n -Width

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在解决问题的所有算法中, 找到计算成本最低的那个算法变得至关重要, 而这样的算法也称为最优算法, 由此衍生出了计算复杂性这门学科[1][2]。宽度是衡量函数空间或子集在特定逼近方法下可逼近程度的一个定量指标, 其作为函数逼近论中必不可少的一部分, 更是直接影响逼近算法的设计、复杂性分析和误差估计[3][4]。因此, 研究宽度不仅有着理论层面作用, 更是有着实际方面作用。宽度的概念最早由 Kolmogorov 提出, 并且他估计了 Sobolev 类在经典勒贝格空间上的 Kolmogorov 宽度, 并且得到了其精确渐近阶。

Paley-Wiener 空间作为带有限函数空间的特殊情况, 也是广泛应用于分析和信号处理等领域。2002 年, Fang 和 Chen [5][6]通过研究不规则分布离散样本得到了 Paley-Wiener 函数类的恢复。2013 年, Ledford [7][8]给出函数 $\varphi(x)$ 的充分条件, 称为插值器。由以上研究可知, 关于带有限函数空间的研究主要集中于数据处理和信号分析等方面, 对于其上的逼近问题研究甚少, 如 Li 等[9]研究了加权带有限函数空间在一致框架下的 Kolmogorov n -宽度和线性 n -宽度的精确渐近阶。本文将继续这一工作, 研究加权多元 Paley-Wiener 空间在概率框架下和平均框架下的逼近特征, 特别估计概率框架下和平均框架下加权多元 Paley-Wiener 空间 $B'_{\pi,2}(\mathbb{R}^d)$ 在 $B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)$ 中线性 n -宽度的精确渐近阶。

现介绍本文所用的相关记号。 $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Z}_0$ 表示非零整数集, $\mathbb{N}$ 表示自然数集, $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集, $\mathbb{R}$ 表示实数域, $\mathbb{C}$ 表示复数域。若 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为定义在集合 F 上的两个正函数, 用 $a(x) \ll b(x)$ 表示存在与 x 无关的正常数 c_1 , 使得对任意 $x \in F$ 有 $a(x) \leq c_1 b(x)$; 而 $a(x) \gg b(x)$ 表示存在与 x 无关的正常数 c_2 , 使得对任意 $x \in F$, 存在 $a(x) \geq c_2 b(x)$; $a(x) \asymp b(x)$ 表示 $a(x) \ll b(x)$ 与 $a(x) \gg b(x)$ 同时成立。

2. 加权多元 Paley-Wiener 空间及其主要性质

本节主要介绍本文研究的函数空间及其相关性质。

用 $L_p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的 p -次幂可积的经典 Lebesgue 空间, $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ 表示其范数;

$l_p(\mathbb{Z}^d)$ ($l_p(\mathbb{Z}_0^d)$) ($1 \leq p < \infty$) 表示定义在 $\mathbb{Z}^d$ ($\mathbb{Z}_0^d$) 上 p -次幂可和的序列空间, $\|\cdot\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}$ ($\|\cdot\|_{l_p(\mathbb{Z}_0^d)}$) 表示其范数。

下面介绍指数型整函数的概念。

设 $g(z)$ 为 $\mathbb{C}^d$ 上的整函数。若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 有关的正常数 $A := A(\varepsilon)$, 使得

$$|g(z)| \leq A \exp \left(\sum_{j=1}^d (\pi + \varepsilon) |z_j| \right), \quad z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d.$$

则称函数 $g(z)$ 为指数 π -型整函数。用 $B_\pi(\mathbb{R}^d)$ 表示限制在 $\mathbb{R}^d$ 上有界的所有指数 π -型整函数的全体之集。

对 $1 < p < \infty, \sigma > 0$, 记

$$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d) := \{f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d) : f(k) = 0, k \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}_0^d\}.$$

易见, $\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 关于 $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ 为 $B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 的闭子空间, 即 $\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ 为 Banach 空间。

关于多元 Paley-Wiener 空间, 有如下主要性质。

引理 2.1 [6] 设 $1 < p < \infty$, 则

1) 对 $\forall f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \sin c_d(\pi x - k\pi), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

且上式右边级数在 $\mathbb{R}^d$ 上绝对一致收敛于 $f(x)$ 。其中

$$\sin c_d(x) = \prod_{j=1}^d \sin c(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

而

$$\sin ct = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

2) 存在仅依赖于 p 的常数 c'_p, c''_p , 使得对 $\forall f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$c'_p \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq c''_p \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3) 对 $\forall y = \{y_k\} \in l_p(\mathbb{Z}^d)$, 存在唯一的 $g \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 使得 $g(k) = y_k, \forall k \in \mathbb{Z}^d$ 。

注 2.1 1) 由引理 2.1 知, 对 $1 < p < \infty, f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \|\{f(k)\}\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}. \quad (1)$$

2) 对 $1 < p < \infty$, 记

$$\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d) := \{f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d) : f(k) = 0, k \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}_0^d\}.$$

由引理 2.1 知, $\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 为 $B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 的线性子空间, 且 $(\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d), L_p(\mathbb{R}^d))$ 为 Banach 空间, 引理 2.1 对 $\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 均成立。

3) 对 $t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}_0^d$, 记 $e_j(t) := \sin c(\pi t - j\pi)$, 对 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d$, 记

$$e_k^d(x) = \prod_{j=1}^d e_{k_j}(x_j), \quad \text{则 } \{e_k^d(x)\}_{k \in \mathbb{Z}_0^d} \text{ 为 } \mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d) \text{ 的 Schauder 基。}$$

为方便起见, 以下行文中, 若没有特殊说明, $B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 均表示 $\mathring{B}_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 。

下面, 介绍加权多元 Paley-Wiener 空间, 这也是本文研究的主要函数空间。

设 $1 < p < \infty, r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$, 且 $r_1 = r_2 = \dots = r_v < r_{v+1} \leq \dots \leq r_d, j = 1, \dots, d$ 。若 $f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 且

$$\{|k|^r f(k)\} \in l_p(\mathbb{Z}_0^d), \quad \text{其中 } |k|^r = \prod_{j=1}^d |k_j|^{r_j}, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d, \quad \text{则由引理 2.1 知级数}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_0^d} |k|^r f(k) e_k^d(x), x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

在 $\mathbb{R}^d$ 上绝对一致收敛, 记该函数为 $f^{(r)}(x)$, 则 $f^{(r)}(x) \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 。

反之, 若 $f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 且 $\sum_{k \in \mathbb{Z}_0^d} |k|^r f(k) e_k^d(x) \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$, 则 $\{|k|^r f(k)\} \in l_p(\mathbb{Z}_0^d)$ 。

因此, 由引理 2.1 易知

$$B_{\pi,p}^r(\mathbb{R}^d) = \{f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d) : f^{(r)} \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)\}$$

为 $B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ 的线性子空间, 且 $B_{\pi,p}^r(\mathbb{R}^d)$ 关于范数

$$\|f\|_{r,p} := \|f^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$$

为 Banach 空间, 称其为加权多元 Paley-Wiener 空间。

关于加权多元 Paley-Wiener 空间, 有如下主要性质。

引理 2.2 设 $1 < p, q < \infty, r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$, 且 $r_1 = \dots = r_v < r_{v+1} \leq \dots \leq r_d$, 若 $r_1 > \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right\}$, 则

$B_{\pi,p}^r(\mathbb{R}^d)$ 可以连续嵌入 $B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)$ 中。

证明: 参考文献[9]的证明方法可得引理 2.2, 此处略去证明。

另外, 易见 $B_{\pi,2}(\mathbb{R}^d)$ 与 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 分别关于内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx, f, g \in B_{\pi,2}(\mathbb{R}^d)$$

和

$$\langle f, g \rangle_r := \langle f^{(r)}, g^{(r)} \rangle, f, g \in B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$$

为 Hilbert 空间, 其诱导的范数分别为 $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ 与 $\|\cdot\|_{r,2}$, 且由引理 2.1 易知 $\{e_k^d(x)\}_{k \in \mathbb{Z}_0^d}$ 为它们的标准正交基。

Li 等[9]讨论了一致框架下, $B_{\pi,p}^r(\mathbb{R})$ 在 $B_{\pi,q}(\mathbb{R}) \left(1 < p, q < \infty, r_1 > \max\left\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right\}\right)$ 中 Kolmogorov n-宽度的渐进阶。本文继续这一研究, 讨论概率框架和平均框架下 Hilbert 空间 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 在 $B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)$ 中的 Kolmogorov n-宽度的渐进阶。其中, $1 < q < \infty, r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d, \frac{1}{2} < r_1 = \dots = r_v \leq r_{v+1} \leq \dots \leq r_d$ 。为此, 首先在 Hilbert 空间 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 上赋予高斯测度 μ , μ 的期望为零元, 协方差算子 C_μ 对应的特征函数为 $e_k^d(x), k \in \mathbb{Z}_0^d$, 且相应的特征值为

$$\lambda_k = |k|^{-\rho}, \rho > 1, k \in \mathbb{Z}_0^d.$$

即

$$C_\mu e_k^d(x) = \lambda_k e_k^d(x), k \in \mathbb{Z}_0^d. \quad (2)$$

由文献[10]知, $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 上满足以上条件的高斯测度 μ 是唯一的。令 $y_1, \dots, y_n$ 为 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 中的 n 个正交向量, $\sigma_j = \langle C_\mu y_j, y_j \rangle, (j=1, \dots, n)$ 。B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 子集, 则 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 中的柱集

$$G = \left\{f \in B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d) : \left(\langle f, y_1^{(-r)} \rangle_r, \dots, \langle f, y_n^{(-r)} \rangle_r\right) \in B\right\}$$

的测度为

$$\mu(G) = \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_B \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{|\mu_j|^2}{2}\right) d\mu_1 \cdots d\mu_n.$$

关于 Hilbert 空间上高斯测度的详细信息可参考文献[11]。本文主要研究 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 上赋予上述测度情形下，其在 $B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)$ 中的线性 n -宽度。

3. 概率框架和平均框架下加权多元 Paley-Wiener 空间的线性 n -宽度

定义 3.1 令 T 是一个从 Z 到 Z 的线性算子，则 TW 到 W 的线性距离为

$$\lambda(W, T, Z) := \sup_{x \in W} \|x - Tx\|.$$

W 在 Z 的线性 n -宽度的定义为

$$\lambda_n(W, Z) := \inf_{T_n} \lambda(W, T_n, Z) = \inf_{T_n} \sup_{x \in W} \|x - T_n x\|.$$

其中， T_n 取遍 Z 中的秩不超过 n 的所有线性有界算子。

定义 3.2 设 B 是 W 上的 Borel 域， μ 是定义在 B 上的概率测度，令 $\delta \in (0, 1]$, $0 < p < \infty$ ，分别称

$$\lambda_{n,\delta}(W, \mu, Z) := \inf_{G_\delta} \lambda_n(W \setminus G_\delta, Z)$$

和

$$\lambda_n^{(a)}(W, \mu, Z)_p := \inf_{T_n} \left(\int_W \|x - T_n x\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

为概率框架下， W 在 Z 中的线性 n -宽度和平均框架下 W 在 Z 中的 p -平均线性 n -宽度，分别简称为 W 在 Z 中关于测度 μ 的线性 (n, δ) 宽度和平均线性 n -宽度。其中 G_δ 取遍 B 中测度不超过 δ 的子集， F_n 取遍 Z 中的所有维数不超过 N 的线性子空间， T_n 取遍 Z 中的秩不超过 n 的线性算子。

本节主要是估计 $r > \frac{1}{2}$ 时， $\lambda_{n,\delta}(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d))$ 和 $\lambda_n^{(a)}(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d))_p$ 的精确渐进阶。其主要结果如下。

定理 3.1 设 $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{2} < r_1 = \dots = r_v < r_{v+1} \leq \dots \leq r_d$, $\rho > 1$ 且 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ ，则

$$\lambda_{n,\delta}(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)) \asymp (n^{-1} \ln^{v-1} n)^{\eta + \frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1 + n^{-\min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \right).$$

通过定理 3.1，按文献[11]的证明方法易知定理 3.2 成立，其证明过程省略。

定理 3.2 设 $1 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{2} < r_1 = \dots = r_v < r_{v+1} \leq \dots \leq r_d$ ，且 $\rho > 1$ ，则

$$\lambda_n^{(a)}(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)) \asymp (n^{-1} \ln^{v-1} n)^{\eta + \frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}.$$

本文主要采用离散化的方法估计定理 3.1 的上、下界。为此，首先介绍有限维空间的相应结果。

设 $1 \leq p \leq \infty$ ，用 l_p^m 表示在 $\mathbb{R}^m$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_p$ 的 Banach 空间，其中

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq k \leq m} |x_k|, & p = \infty \end{cases}, x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

用 B_p^m 表示 l_p^m 中的单位球。

现在 $\mathbb{R}^m$ 上赋予标准高斯测度 $\nu := \nu_m$

$$\nu(G) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_G \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_{l_m^2}^2\right) dx.$$

其中, G 为 $\mathbb{R}^m$ 中的 Borel 集, 显然 $\nu(\mathbb{R}^m) = 1$ 。

以下引理对证明定理 3.1 至关重要。

引理 3.3 设 $1 < q < \infty, m \geq 2n, \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 则

$$1) \lambda_{n,\delta}(\mathbb{R}^m, \nu, l_q^m) \asymp m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}}, 1 < q \leq 2.$$

$$2) \lambda_{n,\delta}(\mathbb{R}^m, \nu, l_q^m) \asymp m^{\frac{1}{q}} + \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}, 2 \leq q < \infty.$$

离散化定理的建立:

设 $S = (S_1, \dots, S_d) \in \mathbb{N}^d$, 令 $\rho_s = \{n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_0^d : 2^{s_{j-1}} < |n_j| \leq 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}$ 。则

$$|\rho_s| = 2^{(s,1)}, \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \rho_s = \mathbb{Z}_0^d \text{ 且 } \rho_{s'} \cap \rho_s = \emptyset, s', s \in \mathbb{N}_+^d, s \neq s'.$$

下面, 对 $\mathbb{N}_+^d$ 再进行分块, 令 $\rho = \left(1, \dots, 1, \frac{r_{v+1} + \frac{\rho}{2}}{r_1 + \frac{\rho}{2}}, \dots, \frac{r_d + \frac{\rho}{2}}{r_1 + \frac{\rho}{2}}\right)$, 对 $l \in \mathbb{N}_+$,

令

$$S_l = \{s \in \mathbb{N}^d : l-1 \leq (s, \gamma) < l\}. \quad (3)$$

再设 $\|S_l\| = \sum_{s \in S_l} |\rho_s| = \sum_{l-1 \leq (s, \gamma) < l} 2^{(s,1)}$ 。由(3)知, $\|S_l\| \asymp 2^l l^{v-1}$ 。

设 $l \in \mathbb{N}^+$, 对 $f \in B_{\pi,p}(\mathbb{R}^d)$ ($1 < p < \infty$), 令

$$(\Delta_l f)(x) = \sum_{s \in S_l} \sum_{n \in \rho_s} C_n e_{n,\pi}^d(x), x \in \mathbb{R}^d$$

其中, $C_n := f(n)$, 易知

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{l \geq 1} \|\Delta_l f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

令

$$F_l = \text{span}\{e_n^d(x) : n \in \rho_s, s \in S_l\}$$

易见 $\dim F_l = \|S_l\|$ 。再令

$$I_l : F_l \rightarrow \mathbb{R}^{\|S_l\|}$$

$$f \rightarrow \left\{ \left\langle f, \frac{e_n^d(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\}_{n \in \rho_s, s \in S_l} \quad (4)$$

易见 I_l 为 F_l 到 $l^{\|S_l\|}_q$ 的线性同构映射。由(4)可知,

$$\sigma_n = \left\langle C_\mu \frac{e_n^d(t)}{\sqrt{\lambda_n}}, \frac{e_n^d(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle = 1, n \in \rho_s.$$

对 $1 < q < \infty, n = (n_1, \dots, n_d) \in \rho_s$, 由于 $|n| = \prod_{j=1}^d |n_j| = 2^{(s,1)}$, 所以对 $f \in F_l$, 有

$$\begin{aligned} \|I_l f\|_{l_q^{S_l}} &= \left\| \left\langle f, \frac{e_n^d(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\|_{n \in \rho_s, s \in S_l} \Big\|_{l_q^{S_l}} \\ &\asymp 2^{\frac{(s,1)}{2} \rho} \left\| \{f(n)\}_{n \in \rho_s, s \in S_l} \right\|_{l_q^{S_l}} \asymp 2^{\frac{(s,1)}{2} \rho} \|f\|_{\sigma, q} \end{aligned} \quad (5)$$

以及

$$\begin{aligned} \|f^{(r)}\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} &\asymp \left(\sum_{s \in S_l} \sum_{n \in \rho_s} |n|^{rq} |f(n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{s \in S_l} \sum_{n \in \rho_s} 2^{(s,r)q} |f(n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{s \in S_l} \sum_{n \in \rho_s} 2^{(s,r) \left(\eta + \frac{\rho}{2} \right) q - (s,1) \frac{\rho}{2}} |f(n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp 2^{\left(\eta + \frac{\rho}{2} \right) l - (s,1) \frac{\rho}{2}} \left(\sum_{s \in S_l} \sum_{n \in \rho_s} |f(n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp 2^{\left(\eta + \frac{\rho}{2} \right) l - (s,1) \frac{\rho}{2}} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \end{aligned} \quad (6)$$

所以, 对于 $f \in F_l$, 由(1)、(2)、(5)和(6)得

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-\left(\eta + \frac{\rho}{2} \right) l + (s,1) \frac{\rho}{2}} \|f^{(r)}\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-\left(\eta + \frac{\rho}{2} \right) l} \left\| \left\langle D^r f, \frac{e_n^d(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\|_{n \in \rho_s, s \in S_l} \Big\|_{l_q^{S_l}} \quad (7)$$

现在建立估计定理 3.1 上界的离散化定理。

定理 3.4 设 $1 < q < \infty, \frac{1}{2} < r_1 = \dots = r_v < r_{v+1} \leq \dots \leq r_d, r_i \in \mathbb{R}^d, i=1, \dots, d, n \in \mathbb{N}$, 且 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 取非负整数序列 $\{n_l\}$ 以及非负实序列 $\{\delta_l\}$, 满足 $0 \leq n_l \leq \|S_l\|$ 且 $\sum_l n_l \leq n, \sum_l \delta_l \leq \delta$, 则

$$\lambda_{n,\delta} \left(B_{\sigma,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\sigma,q}(\mathbb{R}^d) \right) \ll \sum_l 2^{-\left(\eta + \frac{\rho}{2} \right) l} d_{n_l, \delta_l} \left(\mathbb{R}^{\|S_l\|}, \nu, l_q^{\|S_l\|} \right).$$

证明: 设 T_l 是 $\mathbb{R}^{\|S_l\|}$ 到 $\mathbb{R}^{\|S_l\|}$ 的一个线性算子, 且其秩 $\text{rank } T_l \leq n_l$, 且

$$\nu \left\{ y \in \mathbb{R}^{\|S_l\|} : \|y - T_l y\|_{l_q^{S_l}} > \lambda_{n_l, \delta_l} \right\} \leq \delta_l \quad (8)$$

其中

$$\lambda_{n_l, \delta_l} := \lambda_{n_l, \delta_l} \left(\mathbb{R}^{\|S_l\|}, \nu, l_q^{\|S_l\|} \right).$$

对于 $\forall f \in B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$, 由(7)式知, 存在正常数 C_0 , 有

$$\begin{aligned} & \|\delta_l f - D^{-r} I_l^{-1} T_l I_l \delta_l f\|_{\sigma,q} \\ &= C_0 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \left\| \left\langle D^r f, \frac{e_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle - T_l \left\{ \left\langle D^r f, \frac{e_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\}_{n \in S_l} \right\|_{l_q^{S_l}} \end{aligned} \quad (9)$$

考虑 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d)$ 的子集 G_l ,

$$G_l = \left\{ f \in B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d) : \|\delta_l f - D^{-r} I_l^{-1} T_l I_l \delta_l f\|_{\sigma,q} > C_0 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \lambda_{n_l, \delta_l} \right\}.$$

由(8)和(9)式以及测度 μ, ν 定义知

$$\mu(G_l) \ll \nu \left\{ y \in \mathbb{R}^{\|S_l\|} : \|y - T_l y\|_{l_q^{S_l}} > \lambda_{n_l, \delta_l} \right\} \leq \delta_l.$$

取 $G = \bigcup_l G_l, F = \sum_l D^{-r} I_l^{-1} T_l I_l$, 其中 F 是 $D^{-r} I_l^{-1} T_l I_l$ 的直和, 因此

$$\mu(G) \leq \sum_l \mu(G_l) \leq \sum_l \delta_l \leq \delta, \text{rank } T_n \leq \sum_l \text{rank } T_l \leq \sum_l n_l \leq n.$$

所以, 由 $G, F, \{G_l\}, \{T_l\}$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right) &\leq \sup_{f \in B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d) \setminus G} \|f - T_n f\|_{\pi,q} \\ &\leq \sup_{f \in B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d) \setminus G} \sum_l \|\delta_l f - D^{-r} I_l^{-1} T_l I_l \delta_l f\|_{\pi,q} \\ &\ll \sum_l 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \lambda_{n_l, \delta_l} \end{aligned}$$

因此

$$\lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right) \ll \sum_l 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \lambda_{n_l, \delta_l} \left(\mathbb{R}^{\|S_l\|}, \nu, l_q^{S_l} \right).$$

定理得证。

接下来建立估计定理 3.1 下界的离散化定理。

设

$$S = S_{k_0} = \left\{ s = (s_1, \dots, s_v, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d : (s, 1) = k = [k_0] \right\} \quad (10)$$

其中, k_0 稍后选取。 $[k_0]$ 表示不超过 k_0 的最大整数, 不难验证 $|s| \asymp k^{\nu-1}$, 现在选取 $k_0, C_0 \geq 0$, 使得

$$\|S\| := \sum_{s \in S} |\square_s| = \sum_{s \in S} 2^{(s,1)} = |S| 2^k \geq C_{k_0} k_0^{\nu-1} 2^{k_0} = 2n.$$

因此, $2^k k^{\nu-1} \asymp n \asymp |S| 2^k$ 。

现在考虑空间 $F_s := \text{span} \{e_n^d(x) : n \in \square_s, s \in S\}$ 。

对 $1 < q < \infty$, 令

$$I_s : F_s \rightarrow l_q^{\|S\|}, f \rightarrow \left\{ \left\langle D^r f, \frac{e_n^d(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\}_{n \in \square_s, s \in S}.$$

易见 I_s 为 F_s 到 $l_q^{\|s\|}$ 的线性同构映射, 类似(8)、(9)的方法可得

$$\left\| \left\langle D^r f, \frac{e_n^d(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\rangle \right\|_{n \in \mathbb{Q}_s, s \in S} \Big\|_{l_q^{\|s\|}} \asymp 2^{\eta + \frac{\rho}{2}} \|f\|_{B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)}, f \in F_s. \quad (11)$$

通过(11), 下面建立估计定理 3.1 下界的离散化定理。

定理 3.5 设 $1 < q < \infty, \frac{1}{2} < r_1 = \dots = r_v < r_{v+1} \leq \dots \leq r_d, r_i \in \mathbb{R}^d, i=1, \dots, d, n \in \mathbb{N}$, 且 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 则

$$\lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right) \geq 2^{-\left(\eta + \frac{\rho}{2}\right)k} \lambda_{n,\delta} \left(\mathbb{R}^{\|s\|}, \nu, l_q^{\|s\|} \right).$$

证明: 设 T_1 是作用到 $B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d) \cap F_s$ 的线性算子, 使得 $\text{rank } T_1 \leq n$, 且

$$\mu \left\{ f \in B_{\sigma,2}^r(\mathbb{R}^d) \cap F_k : \|f - T_1 f\|_{\sigma,q} > \lambda_{n,\delta} \right\} \leq \delta.$$

其中

$$\lambda_{n,\delta} = \lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right).$$

考虑集合

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^{\|s\|} : \|y - I_k T_1 D^r I_k^{-1} y\|_{l_q^{\|s\|}} > C_0^{-1} 2^{\left(\eta + \frac{\rho}{2}\right)k} \lambda_{n,\delta} \right\}.$$

由(9)式以及测度 μ, ν 定义知

$$\nu(G) \leq \mu \left\{ f \in B_{\sigma,2}^r(\mathbb{R}^d) \cap F_k : \|f - T_1 f\|_{\sigma,q} > \lambda_{n,\delta} \right\} \leq \delta.$$

显然 $\text{rank } I_k T_1 D^r I_k^{-1} \leq n$, 因此, 由上式可得

$$\lambda_{n,\delta} \left(\mathbb{R}^{\|s\|}, \nu, l_q^{\|s\|} \right) \leq \sup_{f \in \mathbb{R}^{\|s\|} \setminus G} \|y - I_k T_1 D^r I_k^{-1} y\|_{l_q^{\|s\|}} \ll 2^{\left(\eta + \frac{\rho}{2}\right)k} \lambda_{n,\delta}.$$

因此

$$\lambda_{n,\delta} \left(B_{\sigma,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\sigma,q}(\mathbb{R}^d) \right) \gg 2^{\left(\eta + \frac{\rho}{2}\right)k} \lambda_{n,\delta} \left(\mathbb{R}^{\|s\|}, \nu, l_q^{\|s\|} \right).$$

定理得证。

为了证明定理 3.1, 还需要以下引理。

引理 3.6 设 $0 < \beta < 1$, S_l 的定义见(3), 对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $u > 0$, 使得 $n \asymp 2^u u^{v-1}$, 定义序列 $\{n_l\}$ 如下

$$n_l := \begin{cases} \|S_l\|, & l \leq u \\ \|S_l\| 2^{(1+\beta)(u-l)}, & l > u \end{cases} \quad (12)$$

则 $\sum_l n_l \ll n$ 。

定理 3.1 的证明:

首先估计 $d_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right)$ 的上界。

按引理 3.2 定义非负整数序列 $\{n_l\}$, 令

$$\delta_l = \begin{cases} \frac{\delta n_l}{n}, & l > u \\ 0, & l \leq u \end{cases} \quad (13)$$

则 $\sum_l \delta_l \ll \delta$ 。易见, $\{n_l\}$ 和 $\{\delta_l\}$ 满足定理 3.3 的条件, 由线性 n -宽度易知

$$\lambda_{\eta_l, \delta_l}(\mathbb{R}^{\|\mathbf{s}\|}, \mathbf{v}, l_q^{\|\mathbf{s}\|}) = 0, l \leq u.$$

根据(12)和(13)中的定义, 定义序列 $\{n_l\}$ 和 $\{\delta_l\}$ 。它们满足定理 3.1 中的条件, 可得 $\|S\| \asymp 2' k^{v-1}$ 。

1) $1 < q < 2$ 时

先估计上界。

由引理 3.3 和定理 3.4, 有

$$\begin{aligned} & \lambda_{n, \delta}(B_{\pi, 2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi, q}(\mathbb{R}^d)) \\ & \ll \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \|S_l\|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{\|S_l\| + \ln \frac{n}{n_l \delta}} \\ & \ll \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{\frac{l}{q}} l^{(v-1)/q} + \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} n^{\frac{1}{2}} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} \\ & \quad + \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{\delta}} \\ & =: I'_1 + I'_2 + I'_3 \end{aligned}$$

首先估计 I'_1 , 有

$$I'_1 := \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{\frac{l}{q}} l^{(v-1)/q} \ll \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}\right)l} l^{(v-1)/q} \ll 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)u} \left(2^u u^{v-1}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}$$

同样对于 I'_2 , 取 $0 < \beta < \min\{1, 2r_1 + \rho - 1\}$, 则

$$\begin{aligned} I'_2 & := \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} n^{\frac{1}{2}} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} \\ & \ll n^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1+\beta}{2}u} u \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}+\frac{\beta}{2}\right)l} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\ & \ll n^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1+\beta}{2}u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)u} \left(2^u u^{v-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1+\beta}{2}u} \\ & \ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

最后, 对于 I'_3 , 有

$$\begin{aligned} I'_3 & := \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} 2^{l\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{\delta}} \\ & \ll \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)l} l^{(v-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \\ & \ll 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)u} \left(2^u u^{v-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \\ & \ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \end{aligned}$$

所以

$$\lambda_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)\right) \ll I'_1 + I'_2 + I'_3 \ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1+n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}\right)$$

其次估计下界。

根据定理 3.5 和引理 3.3-2), 以及 $\|S\| \asymp 2^k k^{v-1} \asymp n$, 知

$$\begin{aligned} \lambda_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)\right) &\gg 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)k} \|S\|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{\|S\| + \ln \frac{1}{\delta}} \\ &\gg \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\delta}} \\ &\gg \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1+n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}\right) \end{aligned}$$

因此, $1 < q < 2$ 时,

$$\lambda_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)\right) \asymp \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1+n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}\right).$$

得证。

2) $2 \leq q < \infty$ 时

先估计上界。

类似于 1), 由定理 3.4 和引理 3.3-2), 有

$$\begin{aligned} &\lambda_{n,\delta}\left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d)\right) \\ &\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \left(\|S_l\|^{\frac{1}{q}} + \sqrt{\ln \frac{n}{n_l \delta}}\right) \\ &\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \left(2^l l^{v-1}\right)^{\frac{1}{q}} + \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \left(2^l l^{v-1}\right)^{-\frac{1}{2}} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} + \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \\ &:= K'_1 + K'_2 + K'_3 \end{aligned}$$

由 $K'_1 = I'_1$, 知

$$K'_1 \ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}}$$

下面估计 K'_2 , 类似地

$$\begin{aligned} K'_2 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \left(2^l l^{v-1}\right)^{-\frac{1}{2}} 2^{(1+\beta)(l-u)/2} \\ &\ll n^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1+\beta}{2}u} u \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\beta}{2}\right)l} l^{-\frac{v-1}{2}} \\ &\ll n^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1+\beta}{2}u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)u} \left(2^u u^{v-1}\right)^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1+\beta}{2}u} \\ &\ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} \\ &\ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

对于 K'_3 , 有

$$\begin{aligned} K'_3 &:= \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \\ &\ll \sum_{l>u} 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)l} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \\ &\ll 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)u} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \\ &\ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} n^{-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

即

$$\lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right) \ll \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1 + n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}\right)$$

得证。

继续估计下界。

类似地, 由定理引理 3.3-2) 和定理 3.5, 以及 $\|S\| \asymp 2^k k^{v-1} \asymp n$, 有

$$\begin{aligned} \lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right) &\gg 2^{-\left(\eta+\frac{\rho}{2}\right)k} \left(\|S\|^{\frac{1}{q}} + \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \right) \\ &\gg \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} \left(n^{\frac{1}{q}} + \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}} \right) \\ &\gg \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1 + n^{-\frac{1}{q}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}\right) \end{aligned}$$

因此, 综上所述

$$\lambda_{n,\delta} \left(B_{\pi,2}^r(\mathbb{R}^d), \mu, B_{\pi,q}(\mathbb{R}^d) \right) \asymp \left(n^{-1} \ln^{v-1} n\right)^{\eta+\frac{\rho}{2}} n^{\frac{1}{q}} \left(1 + n^{-\frac{1}{q}} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}\right).$$

定理 3.1 得证。

参考文献

- [1] Packel, E.W. and Traub, J.F. (1987) Information-Based Complexity. *Nature*, **328**, 29-33. <https://doi.org/10.1038/328029a0>
- [2] Traub, J.F. and Wozniakowski, H. (1988) Information Based Complexity. Academic Press.
- [3] Kolmogoroff, A. (1936) Über Die Beste Annäherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse. *The Annals of Mathematics*, **37**, 107-110. <https://doi.org/10.2307/1968691>
- [4] DeVore, R.A. and Lorentz, G.G. (1993) Constructive Approximation. Springer, 303.
- [5] Fang, G. and Chen, X. (2002) The Recovery of Functions of Paley-Wiener Class from Irregular Samplings. *Acta Mathematica Scientia*, **22**, 466-472. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(17\)30319-3](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(17)30319-3)
- [6] Fang, G.S. (2001) Recovery of Functions via Their Irregular Sampling Values. *Science in China*, **43**, 268-271.
- [7] Ledford, J. (2013) Recovery of Paley-Wiener Functions Using Scattered Translates of Regular Interpolators. *Journal of Approximation Theory*, **173**, 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.04.010>
- [8] Baxter, B.J.C. (1992) The Asymptotic Cardinal Function of the Multiquadratic $\phi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$ as $c \rightarrow \infty$. *Computers & Mathematics with Applications*, **24**, 1-6. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(92\)90166-f](https://doi.org/10.1016/0898-1221(92)90166-f)

-
- [9] Li, Y., Chen, G., Xu, Y. and Pan, X. (2024) The Approximation Characteristics of Weighted Band-Limited Function Space. *Mathematics*, **12**, Article 1348. <https://doi.org/10.3390/math12091348>
- [10] Bogachev, V. (1998) Gaussian Measures. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/surv/062>
- [11] Maĭorov, V.E. (1994) Kolmogorov's (n, δ) -Widths of Spaces of Smooth Functions. *Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics*, **79**, 265-279. <https://doi.org/10.1070/sm1994v079n02abeh003499>