Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 128-132
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145241

Hans汉斯

一类四阶边值问题解的存在唯一性及迭代算法

李光军[1]，解永晓[2]

[1]山东工程职业技术大学基础教学部，山东 济南
[2]山东师范大学数学与统计学院，山东 济南

收稿日期：2025年4月14日；录用日期：2025年5月7日；发布日期：2025年5月15日

摘 要

文章考虑如下四阶隐式微分方程边值问题：$\begin{cases} f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)=0,\ t\in[0,1] & (1) \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 & (2) \end{cases}$。以格林函数为工具，利用泛函分析中的压缩映象原理，直观给出该问题解的存在性和唯一性条件，及唯一解的迭代序列，并通过具体实例来实现结果的应用。

关键词

四阶边值问题，存在性，唯一性，迭代算法

On the Existence, Uniqueness and Iterative Algorithm of Solution to a Fourth-Order Boundary Value Problem

Guangjun Li[1], Yongxiao Xie[2]

[1]Basic Teaching Department, Shandong University of Engineering and Vocational Technology, Jinan Shandong
[2]School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 15th, 2025

Abstract

In this paper, we consider the following fourth-order implicit differential equation boundary value problem: $\begin{cases} f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)=0,\ t\in[0,1] & (1) \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 & (2) \end{cases}$. By using the Green function as a tool and the

文章引用: 李光军, 解永晓. 一类四阶边值问题解的存在唯一性及迭代算法[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 128-132.
DOI: 10.12677/aam.2025.145241

principle of compression mapping in functional analysis, the existence and uniqueness conditions of the solution to this problem are intuitively, as well as the iterative sequence of the unique solution. The results are implemented by specific examples.

Keywords

Fourth-Order Boundary Value Problem, Existence, Uniqueness, Iterative Algorithm

1. 引言

微分方程边值问题的研究主线是将其转化为积分方程，进而利用算子理论及不动点定理，转化为不动点存在性问题。而四阶微分方程在工程学、物理学、生物学等方面都有着广泛的应用，长期以来引起了众多学者的思考与关注[1]-[7]。近年来，针对该类问题的研究取得了一系列的成果。例如文献[1]利用锥上的不动点定理研究了$\begin{cases} u^{(4)}(t)+a(t)u(t)=f\left(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)\right),t\in[0,\omega] \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(\omega),i=0,1,2,3 \end{cases}$的正解存在性。

文献[2]-[5]分别运用 Leray-Schauder 不动点理论及上下解方法等得到了四阶微分方程边值问题解的存在性结论。

受以上成果的启发，本文研究四阶隐式微分方程边值问题$\begin{cases} f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)=0,\ \ t\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases}$，以格林函数为转化工具，利用压缩映像原理，给出解存在和唯一的直观条件及迭代算法，解决了显式方程唯一解的判定方法难以扩展到隐式方程的问题。

2. 预备知识

定义 1 [8]：Lipschitz 条件：设 E_1 和 E_2 是两个 Banach 空间，$D\subset E_1$，设算子 $A:D\to E_2$，那么 A 叫作在 D 上满足 Lipschitz 常数为 q 的 Lipschitz 条件，若有常数 q 使得对于 $\forall f,g\in D$ 都有
$\|Af-Ag\|\le q\|f-g\|$；

定义 2 [8]：A 叫作满足局部 Lipschitz 条件，若对每个有界的 $S\subset D$，A 在 S 上满足 Lipschitz 常数为 q_s (可以依赖 S)的 Lipschitz 条件；

定义 3 [8]：A 叫作压缩的，如果 A 满足 Lipschitz 常数 $q<1$ 的 Lipschitz 条件。

定理(压缩映象原理) [8]：假设 A 是将 Banach 空间 E 的闭子集 B 映到 B 且是压缩的算子，则 A 在 B 中恰有一个不动点 $\overline{f}$，并且对任意初值 $f_0\in D$，逼近序列 $f_{n+1}=Af_n\,(n\in N)$，收敛于 $\overline{f}$，对收敛速度有下述估计：

$$\left\|\overline{f}-f_n\right\|\le q^n(1-q)^{-1}\left\|Af_0-f_0\right\|$$

3. 主要结果

下面主要给出的是算子 f 的某些条件，以此来保证问题(1)、(2)解的存在唯一性。

定理：如果在四阶隐式微分边值问题

$$\begin{cases} f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)=0, 0\le t\le 1 & (1) \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 & (2) \end{cases}$$

中下面的条件成立：

(H1) $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续；

(H2) 对 $\forall(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in R^3$，存在正数 K_1,K_2,K_3 满足

$$\left|f(t,x_1,y_1,z_1)+z_1-f(t,x_2,y_2,z_2)-z_2\right|\le K_1|x_1-x_2|+K_2|y_1-y_2|+K_3|z_1-z_2|$$

(H3) $0<\frac{K_1}{64}+\frac{K_2}{8}+K_3\le\alpha<1$，则问题(1)、(2)存在唯一解。

定理证明：在隐式方程(1)两边同时加上 $u^{(4)}(t)$，可以得到与(1)等价的微分方程：

$$u^{(4)}(t)=f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)+u^{(4)}(t) \tag{3}$$

边值问题(1)、(2)的解等价于如下问题的解：

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)+u^{(4)}(t) & (3) \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 & (2) \end{cases}$$

令

$$u^{(4)}(t)=\omega(t) \tag{4}$$

由于 $\begin{cases} u^{(4)}(t)=\omega(t) \\ u''(0)=u''(1)=0 \end{cases}$，利用格林函数可得出：

$$u''(t)=-\int_0^1 G(t,s),\omega(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

由此将原微分方程转化为积分方程可得：

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,v),\omega(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,v)\omega(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s \tag{6}$$

其中，在该 Green 函数，$G(t,s)=\begin{cases} s(1-t) & 0\le s\le t\le 1 \\ t(1-s) & 0\le t\le s\le 1 \end{cases}$。

利用算子理论，进而可以定义算子 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 如下：

$$Tu^{(4)}(t)=f\left(t,u(t),u''(t),u^{(4)}(t)\right)+u^{(4)}(t),u(t)\in C^{(4)}[0,1] \tag{7}$$

由(4)~(7)可知：

$$T\omega(t)=f\left(t,\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,v)\omega(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s,\int_0^1 G(t,s),\omega(s)\mathrm{d}s,\omega(t)\right)+\omega(t),\ \omega(t)\in C[0,1]$$

若 $\omega(t)$ 是算子 T 的一个不动点，则 $\omega(t)$ 即为边值问题(3)、(2)的解。至此即建立算子的不动点存在性与微分方程解的存在性之间的对应关系，而这同时也是解决微分方程边值问题的经典方法。

令

$$T_1\omega=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(s,v)\omega(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s \tag{8}$$

$$T_2\omega=\int_0^1 G(t,s),\omega(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

将上述(8)、(9)代入算子 T 可得如下结论：

$$T\omega(t)=f\left(t,T_1\omega(t),T_2\omega(t),\omega(t)\right)+\omega(t),\ \omega(t)\in C[0,1],$$

此时，对任意 $\omega_1(t),\omega_2(t)\in C[0,1]$ 有：

$$\left|T\omega_1-T\omega_2\right|=\left|f\left(t,T_1\omega_1,T_2\omega_1,\omega_1\right)+\omega_1-f\left(t,T_1\omega_2,T_2\omega_2,\omega_2\right)-\omega_2\right|$$

根据条件(H_2)可知：

$$\left|T\omega_1-T\omega_2\right|\le K_1T_1\max\left|\omega_1-\omega_2\right|+K_2T_2\max\left|\omega_1-\omega_2\right|+K_3\max\left|\omega_1-\omega_2\right|$$

本文中考虑的 Banach 空间为 $[0,1]$ 上的连续函数空间，范数为 $\|u\|=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right|$。

即

$$\left\|T\omega_1-T\omega_2\right\|\le K_1T_1\left\|\omega_1-\omega_2\right\|+K_2T_2\left\|\omega_1-\omega_2\right\|+K_3\left\|\omega_1-\omega_2\right\| \tag{10}$$

根据(8)、(9)可易得出：

$$T_1\left|\omega_1-\omega_2\right|\le\frac{1}{64}\left|\omega_1-\omega_2\right|,\quad T_2\left|\omega_1-\omega_2\right|\le\frac{1}{8}\left|\omega_1-\omega_2\right| \tag{11}$$

(其中格林函数的对称性和非负性在微分方程边值问题转化为算子问题时也起到了巨大的作用，其中在文献[9]中针对 Green 函数有较为详细的描述：该问题背景下的格林函数为 $G(t,s)=\begin{cases}s(1-t) & 0\le s\le t\le 1\\ t(1-s) & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$，显然 $G(t,s)$ 非负，对于固定的 t，在 $s=t$ 处达到最大值，且 $G(t,t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$ 处取得最大值 $\frac{1}{4}$，因此有 $0\le G(t,s)\le\frac{1}{4}$，

而 $\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s=\int_0^ts(1-t)\mathrm{d}s+\int_t^1t(1-s)\mathrm{d}s=(1-t)\int_0^ts\mathrm{d}s+t\int_t^1(1-s)\mathrm{d}s=\frac{t^2(1-t)}{2}+\frac{t(1-t)^2}{2}=\frac{t(1-t)}{2}$

可得当 $t=\frac{1}{2}$ 时 $\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s$ 取最大值 $\frac{1}{8}$)。

综合(10)、(11)可得出任意 $\omega_1(t),\omega_2(t)\in C[0,1]$ 有：

$$\left\|T\omega_1-T\omega_2\right\|\le\left(\frac{K_1}{64}+\frac{K_2}{8}+K_3\right)\left\|\omega_1-\omega_2\right\| \tag{12}$$

显然当条件(H_3)成立时有：$\left\|T\omega_1-T\omega_2\right\|\le\alpha\left\|\omega_1-\omega_2\right\|,0<\alpha<1$ (这里 $0<\alpha<1$ 是为保证算子 T 的压缩性，以及 $\{u_n(t)\}$ 是柯西序列，有唯一的极限点 $u(t)$，该极限点为压缩算子 T 的不动点，即为原微分方程的解)。

这就说明算子 T 是 $C[0,1]$ 上的压缩映像，根据压缩映像原理自然可以得出算子 T 有唯一不动点，即问题(7)有唯一解(边值问题(1)、(2)有唯一解)。

接下来，给出边值问题(1)、(2)唯一解的迭代算法：

以下列方式构造迭代序列 $\{u_n(t)\}$ [3]，对于任意的 $u_0(t)\in C[0,1]$ 都有：

$$\begin{cases}u_{n+1}^{(4)}(t)=f\left(t,u_n(t),u_n''(t),u_n^4(t)\right)+u_n^4(t)\\ \quad u_{n+1}(0)=u_{n+1}(1)=u_{n+1}''(0)=u_{n+1}''(1)\end{cases}$$

易证序列 $\{u_n(t)\}$ 是柯西序列，并且逼近边值问题(1)、(2)的唯一解。

至此，定理证明结束。

接下来的例子可以直观说明文章结果的应用。

例：考虑下列微分方程边值问题解的存在唯一性

$$\begin{cases} \sin u(t)+\sqrt{e^t}u''(t)-\dfrac{\left(\cos u^{(4)}\right)^2-(3t+13)u^{(4)}}{16}=0 \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{T}$$

其中，$f(t,x,y,z)=\sin x+\sqrt{e^t}y+\dfrac{(\cos z)^2-(3t+13)z}{16}$，$(t\in[0,1])$。

那么，显然 f 满足(H1)且 $f(t,x,y,z)+z=\sin x+\sqrt{e^t}y+\dfrac{(\cos z)^2-(3t-3)z}{16}$，$(t\in[0,1])$。

容易证明对于任意的 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in R^3$ 都满足：

$$\left|f(t,x_1,y_1,z_1)+z_1-f(t,x_2,y_2,z_2)-z_2\right|\le K_1|x_1-x_2|+K_2|y_1-y_2|+K_3|z_1-z_2|$$

这里可以取定：$K_1=\max\cos\xi\ \left(\xi\in[\min u(t),\max u(t)]\right)$，$K_2=\max\sqrt{e^t}$，$K_3=\max\dfrac{-\sin 2z-3t+3}{16}(t\in[0,1])$，因此 $K_1=1,K_2=\sqrt{e},K_3\le\dfrac{1}{4}$ (即 f 满足(H2))。

显然 $0<\dfrac{K_1}{64}+\dfrac{K_2}{8}+K_3\le\alpha<1$ (即 f 满足(H3))。

根据本节主要结果：可以判定上述问题(T)有且仅有唯一解。

参考文献

[1] 王晓萍, 韩晓玲. 一类完全非线性四阶微分方程正周期解的存在性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2024, 47(1): 55-59.

[2] 李朝倩. 一类非线性四阶边值问题解的存在唯一性[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(6): 93-100.

[3] Feng, Y. (2007) On the Existence of Solution to a Fourth-Order Implicit Differential Equation. *Soochow Journal of Mathematics*, **33**, 515-523.

[4] 邓瑞娟, 崔洪瑞. 一类四阶边值问题解的存在唯一性[J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 2022, 36(4): 1-4.

[5] 赵娇, 马如云. 一类四阶微分方程边值问题解的存在唯一性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2021, 37(1): 81-90.

[6] 韦孝东, 白占兵. 一类四阶弹性梁方程正解的存在唯一性[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2021, 40(3): 89-95.

[7] Yao, Q. (2004) Existence of Solutions and Positive Solutions to a Fourth-Order Two-Point BVP with Second Derivative. *Journal of Zhejiang University Science*, **5**, 353-357. https://doi.org/10.1631/jzus.2004.0353

[8] 张鸿庆. 泛函分析[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007.

[9] P.B.贝利, L.F.沙姆平, 等. 非线性两点边值问题[M]. 黄启昌, 等, 译. 内蒙古: 内蒙古人民出版社, 1985.