Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 589-600
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145285

*n*维扭曲立方体是超*k*-匹配图

宗　政，胡晓敏

太原理工大学数学学院，山西　太原

收稿日期：2025年4月28日；录用日期：2025年5月21日；发布日期：2025年5月30日

摘　要

图G的整数k-匹配是由$E(G)$到$\{0,1,\cdots,k\}$上的映射f，满足对任意点u，所有$f(e)$的加和不超过k，其中$f(e)$之和为所有以点u为端点的边e。当$k=1$时，整数k-匹配即为匹配。(强)整数k-匹配排除数由$mp^k(G)$　$(smp^k(G))$表示，是被一个图删去后该图既不存在完美整数k-匹配，也不存在几乎完美整数k-匹配的最小点集(点集与边集)的元素数。Caibing Chang、Xianfu Li and Yan Liu介绍了$smp^k(TQ_n)$。本文提出超强整数k-匹配的定义并证明TQ_n是超强整数k-匹配图。

关键词

超强整数k-匹配，TQ_n，几乎完美整数k-匹配，完美整数k-匹配

The TQ_n Is Super k-Matching Graph

Zheng Zong, Xiaomin Hu

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 28th, 2025; accepted: May 21st, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

An integer k-matching of a graph G is a function f from $E(G)$ to $\{0,1,\cdots,k\}$ such that the sum of $f(e)$ is not more than k for any vertex u, where the sum of $f(e)$ is taken over all edges e incident to u. When $k=1$, the integer k-matching is a matching. The (strong) integer k-matching preclusion number, denoted by $mp^k(G)$ $(smp^k(G))$, is the number of elements of the minimum vertex (vertices and edges) whose deletion results in a graph with neither perfect integer k-matching nor almost perfect integer k-matching. The $smp^k(TQ_n)$ was introduced by Caibing Chang, Xianfu

文章引用: 宗政, 胡晓敏. *n* 维扭曲立方体是超 *k*-匹配图[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 589-600.
DOI: 10.12677/aam.2025.145285

Li and Yan Liu. In this paper, we denote the super strong integer k-matching and prove that TQ_n is super strong integer k-matching graph.

Keywords

Super Strong Integer k-Matching, TQ_n, Almost Perfect Integer k-Matching, Perfect Integer k-Matching

1. 引言

分布式网络目前得到广泛应用，网络拓扑结构的设计与优化成为研究热点。网络拓扑的可靠性直接影响到系统的容错性和性能，因此，如何设计具有高可靠性和强容错能力的网络结构成为了一个重要课题。超立方体具备正则性、高容错性、对称性，受到了广泛关注。n 维扭曲立方体(TQ_n)基于超立方体构建，具有对称性和高连通性，能够确保网络的稳定运行。本文旨在研究 n 维扭曲立方体(TQ_n)是超强整数 k-匹配图，为大规模并行计算系统和分布式网络的拓扑设计提供理论支持。

Cheng 等人在[1]中研究了某些互联网络的匹配排除集，在[2]中研究了交替群图的匹配排除及其推广，在[3]中研究了条件匹配排除集；刘燕等人在[4]中提出了整数 k-匹配与强整数 k-匹配的概念。

整数 k-匹配作为近几年新提出的概念，已经吸引诸多学者研究讨论，如 n-维扭曲立方体与 $S_{n,s}$ 的整数 k-匹配排除数和它们的强整数 k-匹配排除数、图的 A_α-谱半径与整数 k-匹配排除数的关系等，这些成果为图论的研究进程作出了贡献。

2. 预备知识

2.1. 术语和概念

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个简单有限图，其中 $V(G)$ 表示点集，$E(G)$ 表示边集。(x,y) 表示点 x 和点 y 之间的边，文中有时简记为 xy。对于任意的点 $u\in V(G)$，用 $N_G(u)=\{w\in V(G)\,|\,(u,w)\in E(G)\}$ 表示 u 在 G 中的邻点集，用 $d(u)=|N_G(u)|$ 表示 u 在图 G 中的度。对于图 G 的顶点集 S，用 $N_G(S)=\{w\in V(G)\setminus S\,|\,\exists u\in S,(u,w)\in E(G)\}$ 表示 S 的开邻集，$N[S]=N(S)\cup S$ 表示 S 的闭邻集。当图 G 可以从文中清楚看出时，用 $N(u)$ 代替 $N_G(u)$，用 $N(S)$ 代替 $N_G(S)$。对于图 G 的两个顶点集 A 和 B，用 $E(A,B)=\{(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}$ 表示 A 和 B 之间的边集，用 $|E(A,B)|$ 表示顶点集 A 和 B 之间的边数。用 $G[H]$ 表示由 H 在 G 中诱导的子图。令圈 C 上的点 u 沿顺时针方向的继点为 u'。

2.2. TQ_n 的定义

n 为奇数，$V(TQ_n)=\{u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0:u_i\in\{0,1\},0\le i\le n-1\}$，则 $|V(TQ_n)|=2^n$ [1]。如果 $u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_0$ 为偶数，那么点 $u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0$ 被称为偶点。否则，该点称为奇点。注意到 $TQ_1=K_2$。假设 $n\ge 3$ 并且 TQ_{n-2} 也按照这种方式定义。令 $U=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0\in V(TQ_{n-2})$。则 TQ_n 的点 $iju_{n-3}u_{n-4}\cdots u_0$ 简单定义为 ijU，其中 $i,j\in\{0,1\}$。令 $V_{ij}=\{ijU\,|\,U\in V(TQ_{n-2})\}$。设 $TQ_n[V_{ij}]=ijTQ_{n-2}$，称其为子扭曲立方体并且它与 TQ_{n-2} 同构。那么 TQ_n 由四个子扭曲立方体 $00TQ_{n-2}$、$10TQ_{n-2}$、$01TQ_{n-2}$ 和 $11TQ_{n-2}$ （简记为 H_1、H_2、H_3、H_4)构成。

两个不同子扭曲立方体之间的边被称为交叉边。令 $C(E)$ 为 TQ_n 的交叉边集并定义 $\bar{i}=1-i$，其中 $i\in\{0,1\}$。对任意 $i,j\in\{0,1\}$，定义：

$$C(E)=\left\{\left(ijU,\bar{i}\bar{j}U\right):U\in V\left(TQ_{n-2}\right)\right\}\cup\left\{\left(ijU,\bar{i}\bar{j}U\right):U\in V\left(TQ_{n-2}\right)\text{且}U\text{是偶点}\right\}$$
$$\cup\left\{\left(ijU,\bar{i}\bar{j}U\right):U\in V\left(TQ_{n-2}\right)\text{且}U\text{是奇点}\right\}$$

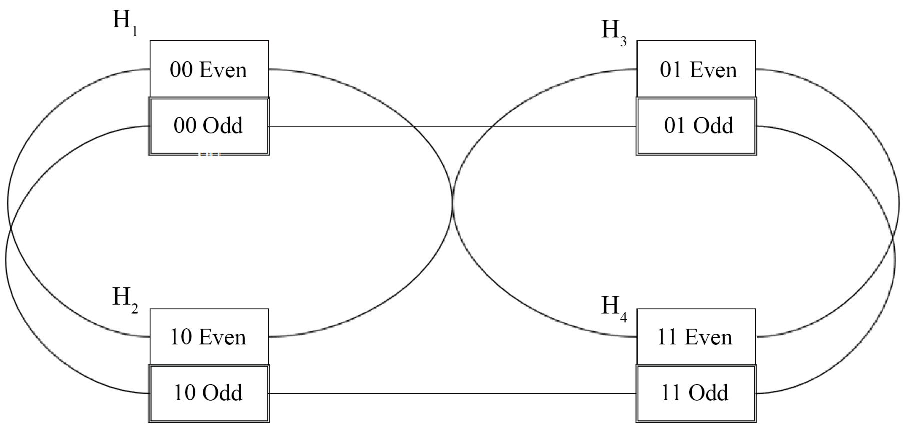

Figure 1. TQ_n
图 1. n **维扭曲立方体**

根据 $C(E)$ 的定义，$ijTQ_{n-2}$ 的每一点 ijU 在 TQ_{n-2} 中有两个邻点 $\bar{i}\bar{j}U$ 与 $\bar{i}\bar{j}U$ （或 $\bar{i}\bar{j}U$）并且它们在不同的子扭曲立方体中，称它们为 ijU 的外邻点。如果 u 在 $ijV\left(TQ_{n-2}\right)$ 中有外邻点，我们称子扭曲立方体 $ijV\left(TQ_{n-2}\right)$ 与点 u 相邻。则 TQ_n 的每一个点与一个子扭曲立方体不相邻。根据 TQ_n 的定义，TQ_n 为 n-正则并且 $ijTQ_{n-2}$ 的每一个点有 2^{n-1} 个外邻点。如图 1 所示。

可以得到 $\left|E\left(H_1,H_2\right)\right|=\left|E\left(H_3,H_4\right)\right|=2^{n-2}$，$\left|E\left(H_1,H_3\right)\right|=\left|E\left(H_1,H_4\right)\right|=\left|E\left(H_2,H_3\right)\right|=\left|E\left(H_2,H_4\right)\right|=2^{n-3}$。

定义 2.1：图 G 的匹配是由 $E(G)$ 到 $\{0,1\}$ 的一个映射 f，满足对任意点 u，$\sum_{e\sim u}f(e)\le 1$，其中 $e\sim u$ 表示 e 是 u 的端点。如果对任意点 u，$\sum_{e\sim u}f(e)=1$，则 f 为完美匹配。如果存在一点 v，$\sum_{e\sim v}f(e)=0$ 并且其他任意点 u，满足 $\sum_{e\sim u}f(e)=1$，则匹配 f 为几乎完美匹配。$F\subset V(G)\cup E(G)$，如果 $G-F$ 既不存在完美匹配，也不存在几乎完美匹配，则 F 为 G 的强匹配排除集[2]。F 为 G 的最小强匹配排除集，$|F|$ 即为 G 的强匹配排除数(简记为 $smp(G)$)。

定义 2.2：h 是由 $E(G)$ 到 $\{0,1,\cdots,k\}$ 的映射，满足对任意点 u，$\sum_{e\sim u}f(e)\le k$，则 h 为整数 k-匹配。整数 k-匹配 h 满足对任意点 u，$\sum_{e\sim u}f(e)\le k$，整数 k 匹配 h 为完美整数 k 匹配。整数 k-匹配 h 满足存在一点 v，$\sum_{e\sim v}f(e)=k-1$ 并且其他任意点 u，满足 $\sum_{e\sim u}f(e)=k$，则匹配 f 为几乎完美整数 k 匹配。$F\subset V(G)\cup E(G)$，如果 $G-F$ 既不存在完美整数 k-匹配，也不存在几乎完美整数 k-匹配，则 F 为 G 的强整数 k 匹配排除集。F 为 G 的最小强整数 k-匹配排除集，$|F|$ 即为 G 的强整数 k-匹配排除数(简记为 $smp^k(G)$) [3] [5]-[7]。

定义 2.3：G 的任意最小强整数 k 匹配排除集 F，$F\subset V(G)\cup E(G)$，如果 $G-F$ 存在有且仅有一个孤立点，则称 G 为超强整数 k 匹配图。显然，图 G_1 为超强整数 k 匹配图。

超强整数 k 匹配图的提出有助于更好地刻画某个图的强整数 k-匹配排除集的结构，为片上网络、数据中心网络以及超级计算机互连等领域提供理论支撑。

由上述定义，我们可以得到 $mp^1(G)=mp(G)$ 与 $smp^1(G)=smp(G)$。于是我们仅考虑 $k\geq 2$ 的情况。当 $k\geq 2$ 时，由于对任一点 v，与 v 相邻的点集为整数 k-匹配排除集，所以 $smp^k(G)\leq mp^k(G)\leq \delta(G)$。在[4]中，我们知道当 k 为偶数时，G 存在完美整数 k-匹配当且仅当 G 存在完美分数匹配。当 G 有一个几乎完美整数 k-匹配 h 时，因为 $\sum_{e\in E(G)} h(e)=\frac{k|V(G)|-1}{2}$ 是整数，所以 k 为奇数并且 $|V(G)|$ 为奇数。因此，对于任一偶数 k，$mp^k(G)=fmp(G)$ 并且 $smp^k(G)=fsmp(G)$。所以我们可以假设 $k\geq 3$ 为奇数。而且我们知道，如果 G 有一个完美整数 k-匹配，则 $|V(G)|$ 为偶数。如果 G 有一个几乎完美整数 k-匹配，则 $|V(G)|$ 为奇数。

根据匹配的定义，当图 G 有完美匹配时，图 G 就有完美整数 k-匹配。

当 k 为奇数时，如果图 G 有一个奇数阶哈密顿圈 C，对 C 的边交替赋值 $\frac{k-1}{2}$ 与 $\frac{k+1}{2}$，则图 G 有一个几乎完美整数 k-匹配；如果图 G 有一个偶数阶哈密顿圈 C，对 C 的边交替赋值 k 与 0，则图 G 有一个完美整数 k-匹配；如果图 G 有一个偶数阶哈密顿圈 P，对 P 的边交替赋值 k 与 0，则图 G 有一个完美整数 k-匹配。

引理 2.4：当 $n\geq 3$ 时，$F\subset V(G)\cup E(G)$ 并且 $|F|\leq n-2$，则 TQ_n 是哈密顿图。

定理 2.5：当 $n\geq 7$ 时，TQ_n 是超强整数 k 匹配图。

证明：我们通过证明任意集合 $F\subset V(G)\cup E(G)$，$|F|\leq \delta(G)=n$，$G-F$ 或者存在孤立点，或者存在完美整数 k-匹配，或者存在几乎完美整数 k-匹配来证明定理。

记 $F_i=F\cap H_i$，$G_i=H_i-F_i$。根据 TQ_n 的对称性，假设 $|F_1|\geq|F_2|\geq|F_3|\geq|F_4|$。我们通过讨论 $|F_1|$ 的大小来证明引理。

情况 1：$|F_1|\leq n-4$

因为 $|F_1|\geq|F_2|\geq|F_3|\geq|F_4|$，所以根据引理 2.4，$G_1$ 有哈密顿圈 C_1，G_2 有哈密顿圈 C_2，G_3 有哈密顿圈 C_3，G_4 有哈密顿圈 C_4。

情况 1.1：G_1 是偶图，G_2 是偶图，G_3 是偶图，G_4 是偶图。

G_1 有偶数阶哈密顿圈 C_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 1.2：G_1 是奇图，G_2 是偶图，G_3 是偶图，G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿圈 C_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 1.3：G_1 与 G_2 是奇图，G_3 与 G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿圈 C_1，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然，$G_3\cup G_4$ 有一个完美匹配。

当 $n\geq 7$ 时，因为 $|E(H_1,H_2)|=2^{n-2}>n$，所以 $|E(G_1,G_2)|\geq 1$。假设 $v_1v_2\in E(G-F)$，$v_1\in V(G_1)$，$v_2\in V(G_2)$，则 $G_1\cup G_2$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_1v_1v_2C_2v_2'$。所以 $G_1\cup G_2$ 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 1.4：G_1 与 G_3 是奇图，G_2 与 G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿圈 C_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然，$G_2\cup G_4$ 有一个完美匹配。当 $n\geq 7$ 时，因为 $|E(H_1,H_3)|=2^{n-3}>n$，所以 $|E(G_1,G_3)|\geq 1$。假设

$v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_1)$， $v_2 \in V(G_3)$，则 $G_1 \cup G_3$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_1v_1v_2C_3v_2'$。所以 $G_1 \cup G_3$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 1.5： G_1、G_2、G_3 是奇图， G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿圈 C_1， G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然，G_3 有一个几乎完美整数 k-匹配，G_4 有一个完美匹配。当 $n \ge 7$ 时，因为 $\left|E(H_1,H_2)\right| = 2^{n-2} > n$，所以 $\left|E(G_1,G_2)\right| \ge 1$。假设 $v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_1)$， $v_2 \in V(G_2)$，则 $G_1 \cup G_2$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_1v_1v_2C_2v_2'$。所以 $G_1 \cup G_2$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 1.6： G_1， G_2， G_3 与 G_4 均为奇图。

G_1 有奇数阶哈密顿圈 C_1， G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有奇数阶哈密顿圈 C_4。当 $n \ge 7$ 时，因为 $\left|E(H_1,H_2)\right| = 2^{n-2} > n$， 所以 $\left|E(G_1,G_2)\right| \ge 1$。假设 $v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_1)$， $v_2 \in V(G_2)$，则 $G_1 \cup G_2$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_1v_1v_2C_2v_2'$。所以 $G_1 \cup G_2$ 有一个完美匹配。同理，$G_3 \cup G_4$ 也有一条偶数哈密顿路，因此有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 2： $\left|F_1\right| = n-3$

在此条件下，根据引理 2.4， G_1 有一条哈密顿路 $a_1P_1b_1$， G_2 有一个哈密顿圈 C_2， G_3 有一个哈密顿圈 C_3， G_4 有一个哈密顿圈 C_4， $\left|F-F_1\right| \le 3$。

情况 2.1： P_1 是偶数阶哈密顿路， G_2 是奇图， G_3 是奇图， G_4 是奇图。

G_1 有偶数阶哈密顿路 P_1，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有奇数阶哈密顿圈 C_4。显然，G_1 有一个完美匹配，G_2 有一个几乎完美整数 k-匹配。当 $n \ge 7$ 时，因为 $\left|E(H_3,H_4)\right| = 2^{n-2} > n$，所以 $\left|E(G_3,G_4)\right| \ge 1$。假设 $v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_3)$， $v_2 \in V(G_4)$，则 $G_3 \cup G_4$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_3v_1v_2C_4v_2'$。所以 $G_3 \cup G_4$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 2.2： P_1 是偶数阶哈密顿路， G_2 是偶图， G_3 是奇图， G_4 是奇图。

G_1 有偶数阶哈密顿路 P_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有奇数阶哈密顿圈 C_4。显然， G_1 有一个完美匹配， G_2 有一个完美匹配。当 $n \ge 7$ 时， 因为 $\left|E(H_3,H_4)\right| = 2^{n-2} > n$， 所以 $\left|E(G_3,G_4)\right| \ge 1$。假设 $v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_3)$， $v_2 \in V(G_4)$，则 $G_3 \cup G_4$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_3v_1v_2C_4v_2'$。所以 $G_3 \cup G_4$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 2.3： P_1 是偶数阶哈密顿路， G_2 是奇图， G_3 是偶图， G_4 是奇图。

G_1 有偶数阶哈密顿路 P_1，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有奇数阶哈密顿圈 C_4。显然， G_1 有一个完美匹配， G_3 有一个完美匹配。当 $n \ge 7$ 时， 因为 $\left|E(H_2,H_4)\right| = 2^{n-3} > n$， 所以 $\left|E(G_2,G_4)\right| \ge 1$。假设 $v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_2)$， $v_2 \in V(G_4)$，则 $G_2 \cup G_4$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_2v_1v_2C_4v_2'$。所以 $G_2 \cup G_4$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 2.4： P_1 是偶数阶哈密顿路， G_2 是偶图， G_3 是偶图， G_4 是奇图。

G_1 有偶数阶哈密顿路 P_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有奇数阶哈密顿圈 C_4。显然， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 2.5： P_1 是偶数阶哈密顿路， G_2 是偶图， G_3 是偶图， G_4 是偶图。

G_1 有偶数阶哈密顿路 P_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 2.6： P_1 是奇数阶哈密顿路， G_2 是偶图， G_3 是偶图， G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿路 P_1，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，$\left|F-F_1\right| \le 3$。则一定存在某一 G_i 如 G_2，$\exists v_1 \in V(G_2)$，$b_1v_1 \in E(G-F)$，

所以 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k -匹配。G_3、G_4 分别有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

情况 2.7：P_1 是奇数阶哈密顿路，G_2 是奇图，G_3 是偶图，G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿路 P_1，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，$|F-F_1|\le 3$。

如果 $\exists v_1\in V(G_2)$，$b_1v_1\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。G_3、G_4 分别有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

如果 $\exists v_2\in V(G_3)$，$b_1v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_2\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_3-\{v_2\}$ 有一个奇数哈密顿圈 C_3'。当 $n\ge 7$ 时，因为 $|E(H_2,H_3)|=2^{n-3}>n$，所以 $|E(G_2,G_3-\{v_2\})|\ge 1$。假设 $v_3v_4\in E(G-F)$，$v_3\in V(G_2)$，$v_4\in V(G_3)-\{v_2\}$，则 $G_2\cup(G_3-\{v_2\})$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_3'C_2v_3v_4C_3'v_4'$。所以 $G_2\cup(G_3-\{v_2\})$ 有一个完美匹配。G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 2.8：P_1 是奇数阶哈密顿路，G_2 是奇图，G_3 是奇图，G_4 是偶图。

G_1 有奇数阶哈密顿路 P_1，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，$|F-F_1|\le 3$。

如果 $\exists v_1\in V(G_2)$，$b_1v_1\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。G_3 有一个几乎完美整数 k -匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

如果 $\exists v_2\in V(G_4)$，$b_1v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_2\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_4-\{v_2\}$ 有一个奇数哈密顿圈 C_4'。当 $n\ge 7$ 时，因为 $|E(H_2,H_4)|=2^{n-3}>n$，所以 $|E(G_2,G_4-\{v_2\})|\ge 1$。假设 $v_3v_4\in E(G-F)$，$v_3\in V(G_2)$，$v_4\in V(G_4)-\{v_2\}$，则 $G_2\cup(G_4-\{v_2\})$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_3'C_2v_3v_4C_4'v_4'$。所以 $G_2\cup(G_4-\{v_2\})$ 有一个完美匹配。G_3 有一个几乎完美整数 k -匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

情况 2.9：P_1 是奇数阶哈密顿路，G_2 是奇图，G_3 是奇图，G_4 是奇图。

G_1 有奇数阶哈密顿路 P_1，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，$|F-F_1|\le 3$。则一定存在某一 G_i 如 G_2，$\exists v_1\in V(G_2)$，$b_1v_1\in E(G-F)$，所以 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有偶数阶哈密顿圈，因此有一个完美匹配。当 $n\ge 7$ 时，因为 $|E(H_3,H_4)|=2^{n-2}>n$，所以 $|E(G_3,G_4)|\ge 1$。假设 $v_2v_3\in E(G-F)$，$v_2\in V(G_3)$，$v_3\in V(G_4)$，则 $G_3\cup G_4$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_2'C_3v_2v_3C_4v_3'$。所以 $G_3\cup G_4$ 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 3：$|F_1|=n-2$

在此条件下，根据引理 2.4，$\exists\alpha\in V(F_1)\cup E(F_1)$，$G_1+\alpha$ 有一条哈密顿路 P，所以 G_1 由一条路或两条路构成。G_2 有一个哈密顿圈 C_2，G_3 有一个哈密顿圈 C_3，G_4 有一个哈密顿圈 C_4，$|F-F_1|\le 2$。

情况 3.1：G_1 由一条路构成。

根据情况 2，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配或一个几乎完美整数 k -匹配，并且没有孤立点。

情况 3.2：G_1 由两条路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ 构成。

情况 3.2.1： G_1 有一个孤立点和一条路。

对任意点 $v_0 \in V(G_1)$， H_1 中存在 $(n-2)$ 个点 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}$， $G-H_1$ 中存在 2 个点 u_{n-1},u_n 与 $\sim v_0$ 相邻。 H_1 中存在 $(n-2)$ 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-2}$， $G-H_1$ 中存在 2 条边 e_{n-1},e_n 以 v_0 为端点。当：

$$F=\{\alpha_i \mid \alpha_i \in V(H_1)\cup E(H_1), i=1,2,\cdots,n-2, \alpha_i \in V(G-H_1)\cup E(G-H_1), i=n-1,n,$$
$$\text{当}\alpha_u,\alpha_m\text{是两个点时则不相邻,当}\alpha_u,\alpha_m\text{是两条边时则不相交,}$$
$$\text{当}\alpha_u,\alpha_m\text{是一条边一个点时则该点不为该边的端点}\}$$

时， $G-F$ 有且仅有一个孤立点 v_0。

情况 3.2.2： $a_1P_1b_1$ 是偶数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， G_2 与 G_3 是偶图。

G_1 由两条偶数阶路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ 构成， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 3.2.3： $a_1P_1b_1$ 是偶数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， G_2 是偶图， G_3 是奇图。

G_1 由两条偶数阶路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ 构成， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。显然， G_1、 G_2、 G_4 分别有一个完美匹配。 G_3 有一个几乎完美整数 k -匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 3.2.4： $a_1P_1b_1$ 是偶数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， G_2 是奇图， G_3 是奇图。

G_1 由两条偶数阶路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ 构成， G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。当 $n\geq 7$ 时，因为 $|E(H_2,H_3)|=2^{n-3}>n$， 所以 $|E(G_2,G_3)|\geq 1$。假设 $v_1v_2 \in E(G-F)$， $v_1 \in V(G_2)$， $v_2 \in V(G_3)$，则 $G_2 \cup G_3$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_1'C_2v_1v_2C_3v_2'$。所以 $G_2 \cup G_3$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 3.2.5： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， G_2 是偶图， G_3 是偶图。

G_1 有一条奇数阶路 $a_1P_1b_1$ 与一条偶数阶路 $a_2P_2b_2$，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， $|F-F_1|\leq 2$。则一定存在某一 G_i 如 G_2， $\exists v_1 \in V(G_2)$，$b_1v_1 \in E(G-F)$，所以 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有一条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$，因此 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k -匹配。 $G_3 \cup G_4$ 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

情况 3.2.6： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， G_2 是奇图， G_3 是偶图。

G_1 有一条奇数阶路 $a_1P_1b_1$ 与一条偶数阶路 $a_2P_2b_2$，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， $|F-F_1|\leq 2$。

如果 $\exists v_1 \in V(G_2)$， $b_1v_1 \in E(G-F)$， 则 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$、 $a_2P_2b_2$， 因此 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。 G_3 有一个完美匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

如果 $\exists v_2 \in V(G_3)$， $b_1v_2 \in E(G-F)$， 则 $G_1 \cup \{v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_2$、 $a_2P_2b_2$， 因此 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_3-\{v_2\}$ 有一个奇数哈密顿圈 C_3'。当 $n\geq 7$ 时， 因为 $|E(H_2,H_3)|=2^{n-3}>n$， 所以 $|E(G_2,G_3-\{v_2\})|\geq 1$。假设 $v_3v_4 \in E(G-F)$， $v_3 \in V(G_2)$， $v_4 \in V(G_3)-\{v_2\}$，则 $G_2 \cup (G_3-\{v_2\})$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_3'C_2v_3v_4C_3'v_4'$。所以 $G_2 \cup (G_3-\{v_2\})$ 有一个完美匹配。 G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 3.2.7： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， G_2 是奇图， G_3 是奇图。

G_1 有一条奇数阶路 $a_1P_1b_1$ 与一条偶数阶路 $a_2P_2b_2$，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， $|F-F_1|\leq 2$。

如果 $\exists v_1 \in V(G_2)$， $b_1v_1 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$ 、 $a_2P_2b_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。G_3 有一个几乎完美整数 k -匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

如果 $\exists v_2 \in V(G_4)$， $b_1v_2 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_2$ 、 $a_2P_2b_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_4-[v_2]$ 有一个奇数哈密顿圈 C_4'。当 $n \ge 7$ 时，因为 $|E(H_2,H_4)| = 2^{n-3} > n$ ，所以 $|E(G_2,G_4-\{v_2\})| \ge 1$ 。假设 $v_3v_4 \in E(G-F)$， $v_3 \in V(G_2)$， $v_4 \in V(G_4)-\{v_2\}$ ，则 $G_2 \cup (G_4-\{v_2\})$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_3'C_2v_3v_4C_4'v_4'$ 。所以 $G_2 \cup (G_4-\{v_2\})$ 有一个完美匹配。 G_3 有一个几乎完美整数 k -匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

情况 3.2.8： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是奇数阶路， G_2 是偶图， G_3 是偶图。

G_1 有两条奇数阶路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ ， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2 ， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3 ， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4 。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，这八个点各不相同， $|F-F_1| \le 2$ 。

如果 $\exists v_1 \in V(G_2)$， $b_1v_1 \in E(G-F)$ ， $\exists v_2 \in V(G_3)$， $b_2v_2 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$ 、 $a_2P_2b_2v_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈： C_2'， $G_3-\{v_2\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈： C_3'。当 $n \ge 7$ 时，因为 $|E(H_2,H_4)| = 2^{n-3} > n$ ，所以 $|E(G_2,G_4-\{v_2\})| \ge 1$ 。假设 $v_3v_4 \in E(G-F)$， $v_3 \in V(G_2)-\{v_1\}$， $v_4 \in V(G_3)-\{v_2\}$ ，则 $(G_2-\{v_1\}) \cup (G_3-\{v_2\})$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_3'C_2'v_3v_4C_3'v_4'$ 。所以 $(G_2-\{v_1\}) \cup (G_3-\{v_2\})$ 有一个完美匹配。 G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

如果 $\exists v_1,v_2 \in V(G_2)$， $b_1v_1,b_2v_2 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_2$ 、 $a_2P_2b_2v_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1,v_2\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。 G_3 有一个完美匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k -匹配。

情况 3.2.9： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是奇数阶路， G_2 是奇图， G_3 是偶图。

G_1 有两条奇数阶路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ ， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2 ， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3 ， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4 。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，这八个点各不相同， $|F-F_1| \le 2$ 。根据 TQ_n 的性质， a_1 与 b_1 、 a_2 与 b_2 至少有一点与 G_2 相连。

如果 $\exists v_1 \in V(G_2)$， $b_1v_1 \in E(G-F)$ ， $\exists v_2 \in V(G_3)$， $b_2v_2 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$ 、 $a_2P_2b_2v_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数阶哈密顿圈，因此有一个完美匹配， $G_3-\{v_2\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈： C_3' ，所以有一个几乎完美整数 k -匹配。 G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

如果 $\exists v_1,v_2 \in V(G_2)$， $b_1v_1,b_2v_2 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_2$ 、 $a_2P_2b_2v_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1,v_2\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k -匹配。 G_3 有一个完美匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k -匹配。

情况 3.2.10： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是奇数阶路， G_2 是奇图， G_3 是奇图。

G_1 有两条奇数阶路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ ， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2 ， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3 ， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4 。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，这八个点各不相同， $|F-F_1| \le 2$ 。根据 TQ_n 的性质， a_1 与 b_1 、 a_2 与 b_2 至少有一点与 G_2 相连。

如果 $\exists v_1 \in V(G_2)$， $b_1v_1 \in E(G-F)$ ， $\exists v_2 \in V(G_3)$， $b_2v_2 \in E(G-F)$ ，则 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$ 、 $a_2P_2b_2v_2$ ，因此 $G_1 \cup \{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配， $G_3-\{v_2\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。 G_4 有一个完美匹配。

因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

如果 $\exists v_1,v_2\in V(G_2)$，$b_1v_1,b_2v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$、$a_2P_2b_2v_2$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2\cup\{v_1,v_2\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

如果 $\exists v_1\in V(G_2)$，$b_1v_1\in E(G-F)$，$\exists v_2\in V(G_4)$，$b_2v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有两条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$、$a_2P_2b_2v_2$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配，$G_4-\{v_2\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈 C_4'。当 $n\geq 7$ 时，因为 $\left|E(H_3,H_4)\right|=2^{n-2}>n$，所以 $\left|E(G_3,G_4-\{v_2\})\right|\geq 1$。假设 $v_3v_4\in E(G-F)$，$v_3\in V(G_3)$，$v_4\in V(G_4)-\{v_2\}$，则 $G_3\cup(G_4-\{v_2\})$ 有一条偶数阶哈密顿路 $v_3'C_3v_3v_4C_4'v_4'$。所以 $G_3\cup(G_4-\{v_2\})$ 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 4：$|F_1|=n-1$

在此条件下，根据引理 2.4，$\exists\alpha,\beta\in V(F_1)\cup E(F_1)$，$G_1+\alpha+\beta$ 有一条哈密顿路 P，所以 G_1 由一条路或两条路或三条路构成。G_2 有一个哈密顿圈 C_2，G_3 有一个哈密顿圈 C_3，G_4 有一个哈密顿圈 C_4，$|F-F_1|\leq 1$。

情况 4.1：G_1 由一条路构成。

根据情况 2，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配或一个几乎完美整数 k-匹配，并且没有孤立点。

情况 4.2：G_1 由两条路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ 构成。

根据情况 3 (除情况 3.2.1)，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配或一个几乎完美整数 k-匹配，并且没有孤立点。根据情况 3.2.1，$G-F$ 有且仅有一个孤立点。

情况 4.3：G_1 由三条路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$ 与 $a_3P_3b_3$ 构成。

情况 4.3.1：$a_1P_1b_1$ 是偶数阶路，$a_2P_2b_2$ 是偶数阶路，$a_3P_3b_3$ 是偶数阶路，G_2 是偶图。

G_1 有三条偶数阶路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$ 与 $a_3P_3b_3$，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 4.3.2：$a_1P_1b_1$ 是偶数阶路，$a_2P_2b_2$ 是偶数阶路，$a_3P_3b_3$ 是偶数阶路，G_2 是奇图。

G_1 有三条偶数阶路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$ 与 $a_3P_3b_3$，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有奇数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。G_3 有一个几乎完美整数 k-匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 4.3.3：$a_1P_1b_1$ 是奇数阶路，$a_2P_2b_2$ 是偶数阶路，$a_3P_3b_3$ 是偶数阶路，G_2 是偶图。

G_1 有一条奇数阶路 $a_1P_1b_1$，两条偶数阶路 $a_2P_2b_2$ 与 $a_3P_3b_3$，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，$|F-F_1|\leq 1$。$\exists v_1\in V(G_2)$，$b_1v_1\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1\}$ 有三条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$、$a_2P_2b_2$、$a_3P_3b_3$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有一个奇数哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 4.3.4：$a_1P_1b_1$ 是奇数阶路，$a_2P_2b_2$ 是偶数阶路，$a_3P_3b_3$ 是偶数阶路，G_2 是奇图。

G_1 有一条奇数阶路 $a_1P_1b_1$，两条偶数阶路 $a_2P_2b_2$ 与 $a_3P_3b_3$，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，$|F-F_1|\leq 1$。$\exists v_1\in V(G_2)$，$b_1v_1\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1\}$ 有三条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_1$，$a_2P_2b_2$，$a_3P_3b_3$ 因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 4.3.5：$a_1P_1b_1$ 是奇数阶路，$a_2P_2b_2$ 是奇数阶路，$a_3P_3b_3$ 是偶数阶路，G_2 是偶图。

G_1 有两条奇数阶路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$，一条偶数阶路 $a_3P_3b_3$，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，这八个点各不相同。a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连，a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连，$|F-F_1|\le 1$。则 $\exists v_1,v_2\in V(G_2)$，$b_1v_1,b_2v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有三条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$、$a_2P_2b_2v_2$、$a_3P_3b_3$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1,v_2\}$ 有一个偶数阶哈密顿圈，因此有一个完美匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 4.3.6：$a_1P_1b_1$ 是奇数阶路，$a_2P_2b_2$ 是奇数阶路，$a_3P_3b_3$ 是偶数阶路，G_2 是奇图。

G_1 有两条奇数阶路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$，一条偶数阶路 $a_3P_3b_3$，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，这八个点各不相同。a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连，a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连，$|F-F_1|\le 1$。则 $\exists v_1,v_2\in V(G_2)$，$b_1v_1,b_2v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有三条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$、$a_2P_2b_2v_2$、$a_3P_3b_3$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1,v_2\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 4.3.7：$a_1P_1b_1$ 是奇数阶路，$a_2P_2b_2$ 是奇数阶路，$a_3P_3b_3$ 是奇数阶路，G_2 是偶图。

G_1 有三条奇数阶路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$、$a_3P_3b_3$，G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，a_3 与 b_3 在 TQ_n 中有四个外邻点，这十二个点各不相同。a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连，a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连，a_3 与 b_3 至少有一个点与 G_2 相连，$|F-F_1|\le 1$。则 $\exists v_1,v_2,v_3\in V(G_2)$，$b_1v_1,b_2v_2,b_3v_3\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3\}$ 有三条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$、$a_2P_2b_2v_2$、$a_3P_3b_3v_3$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1,v_2,v_3\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 4.3.8：$a_1P_1b_1$ 是奇数阶路，$a_2P_2b_2$ 是奇数阶路，$a_3P_3b_3$ 是奇数阶路，G_2 是奇图。

G_1 有三条奇数阶路 $a_1P_1b_1$、$a_2P_2b_2$、$a_3P_3b_3$，G_2 有奇数阶哈密顿圈 C_2，G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3，G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点，a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，a_3 与 b_3 在 TQ_n 中有四个外邻点，这十二个点各不相同。a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连，a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连，a_3 与 b_3 至少有一个点与 G_2 相连，$|F-F_1|\le 1$。则 $\exists v_1,v_2,v_3\in V(G_2)$，$b_1v_1,b_2v_2,b_3v_3\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3\}$ 有三条偶数阶哈密顿路：$a_1P_1b_1v_2$、$a_2P_2b_2v_2$、$a_3P_3b_3v_3$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1,v_2,v_3\}$ 有一个偶数阶哈密顿圈，因此有一个完美匹配。G_3 有一个完美匹配。G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 5：$|F_1|=n$

在此条件下，根据引理 2.4，$\exists\alpha,\beta,\gamma\in V(F_1)\cup E(F_1)$，$G_1+\alpha+\beta+\gamma$ 有一条哈密顿路 P，所以 G_1 由一条路或两条路或三条路或四条路构成。G_2 有一个哈密顿圈 C_2，G_3 有一个哈密顿圈 C_3，G_4 有一个哈密顿圈 C_4，$|F-F_1|=0$。

情况 5.1：G_1 由一条路构成。

根据情况 2，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配或一个几乎完美整数 k-匹配，并且没有孤立点。

情况 5.2：G_1 由两条路 $a_1P_1b_1$ 与 $a_2P_2b_2$ 构成。

根据情况 3 (除情况 3.2.1)，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配或一个几乎完美整数 k-匹配，

并且没有孤立点。根据情况 3.2.1， $G-F$ 有且仅有一个孤立点。

情况 5.3： G_1 由三条路 $a_1P_1b_1$、 $a_2P_2b_2$ 与 $a_3P_3b_3$ 构成。

根据情况 4，我们可以得到 $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配或一个几乎完美整数 k-匹配，并且没有孤立点。

情况 5.4： G_1 由四条路 $a_1P_1b_1$、 $a_2P_2b_2$、 $a_3P_3b_3$ 与 $a_4P_4b_4$ 构成。

情况 5.4.1： $a_1P_1b_1$ 是偶数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， $a_3P_3b_3$ 是偶数阶路， $a_4P_4b_4$ 是偶数阶路。

G_1 有四条偶数阶路 $a_1P_1b_1$、 $a_2P_2b_2$、 $a_3P_3b_3$、 $a_4P_4b_4$， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 5.4.2： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是偶数阶路， $a_3P_3b_3$ 是偶数阶路， $a_4P_4b_4$ 是偶数阶路。

G_1 有一条奇数路 $a_1P_1b_1$，三条偶数阶路 $a_2P_2b_2$、 $a_3P_3b_3$、 $a_4P_4b_4$， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， $|F-F_1|=0$。根据 TQ_n 的性质， a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连。则 $\exists v_1\in V(G_2)$， $b_1v_1\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1\}$ 有四条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$、 $a_2P_2b_2$、 $a_3P_3b_3$、 $a_4P_4b_4$，因此 $G_1\cup\{v_1\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1\}$ 有一个奇数哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。 G_3 有一个完美匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 5.4.3： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是奇数阶路， $a_3P_3b_3$ 是偶数阶路， $a_4P_4b_4$ 是偶数阶路。

G_1 有两条奇数路 $a_1P_1b_1$、 $a_2P_2b_2$，两条偶数阶路 $a_3P_3b_3$、 $a_4P_4b_4$， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点，这八个点各不相同， $|F-F_1|=0$。根据 TQ_n 的性质， a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连， a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连。则 $\exists v_1,v_2\in V(G_2)$， $b_1v_1,b_2v_2\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有四条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$、 $a_2P_2b_2v_2$、 $a_3P_3b_3$、 $a_4P_4b_4$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1,v_2\}$ 有一个偶数哈密顿圈，因此有一个完美匹配。 G_3 有一个完美匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

情况 5.4.4： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是奇数阶路， $a_3P_3b_3$ 是奇数阶路， $a_4P_4b_4$ 是偶数阶路。

G_1 有三条奇数路 $a_1P_1b_1$、 $a_2P_2b_2$、 $a_3P_3b_3$，一条偶数阶路 $a_4P_4b_4$， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_3 与 b_3 在 TQ_n 中有四个外邻点，这十二个点各不相同， $|F-F_1|=0$。根据 TQ_n 的性质， a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连， a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连， a_3 与 b_3 至少有一个点与 G_2 相连。则 $\exists v_1,v_2,v_3\in V(G_2)$， $b_1v_1,b_2v_2,b_3v_3\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3\}$ 有四条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$、 $a_2P_2b_2v_2$、 $a_3P_3b_3v_3$、 $a_4P_4b_4$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3\}$ 有一个完美匹配。根据引理 2.4， $G_2-\{v_1,v_2,v_3\}$ 有一个奇数阶哈密顿圈，因此有一个几乎完美整数 k-匹配。 G_3 有一个完美匹配， G_4 有一个完美匹配。因此， $G-F$ 有一个几乎完美整数 k-匹配。

情况 5.4.5： $a_1P_1b_1$ 是奇数阶路， $a_2P_2b_2$ 是奇数阶路， $a_3P_3b_3$ 是奇数阶路， $a_4P_4b_4$ 是奇数阶路。

G_1 有四条奇数路 $a_1P_1b_1$、 $a_2P_2b_2$、 $a_3P_3b_3$、 $a_4P_4b_4$， G_2 有偶数阶哈密顿圈 C_2， G_3 有偶数阶哈密顿圈 C_3， G_4 有偶数阶哈密顿圈 C_4。 a_1 与 b_1 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_2 与 b_2 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_3 与 b_3 在 TQ_n 中有四个外邻点， a_4 与 b_4 在 TQ_n 中有四个外邻点，这十六个点各不相同， $|F-F_1|=0$。根据 TQ_n 的性质， a_1 与 b_1 至少有一个点与 G_2 相连， a_2 与 b_2 至少有一个点与 G_2 相连， a_3 与 b_3 至少有一个点与 G_2 相连， a_4 与 b_4 至少有一个点与 G_2 相连，则 $\exists v_1,v_2,v_3,v_4\in V(G_2)$， $b_1v_1,b_2v_2,b_3v_3,b_4v_4\in E(G-F)$，则 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 有四条偶数阶哈密顿路： $a_1P_1b_1v_1$、 $a_2P_2b_2v_2$、 $a_3P_3b_3v_3$、 $a_4P_4b_4v_4$，因此 $G_1\cup\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 有

一个完美匹配。根据引理 2.4，$G_2-\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 有一个偶数阶哈密顿圈，因此有一个完美匹配。G_3 有一个完美匹配，G_4 有一个完美匹配。因此，$G-F$ 有一个完美整数 k-匹配。

参考文献

[1] Cheng, E. and Lipták, L. (2007) Matching Preclusion for Some Interconnection Networks. *Networks*, **50**, 173-180. https://doi.org/10.1002/net.20187

[2] Cheng, E., Lesniak, L., Lipman, M.J. and Lipták, L. (2008) Matching Preclusion for Alternating Group Graphs and Their Generalizations. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **19**, 1413-1437. https://doi.org/10.1142/s0129054108006364

[3] Cheng, E., Lesniak, L., Lipman, M.J. and Lipták, L. (2009) Conditional Matching Preclusion Sets. *Information Sciences*, **179**, 1092-1101. https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.10.029

[4] Chang, C., Li, X. and Liu, Y. (2023) Integer *k*-Matching Preclusion of Twisted Cubes and (*n*, *s*)-Star Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **440**, Article ID: 127638. https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127638

[5] Brigham, R.C., Harary, F., Violin, E.C., *et al*. (2005) Perfect-Matching Preclusion. *Congressus Numerantium*, **174**, Article 42.

[6] Liu, Y., Su, X. and Xiong, D. (2021) Integer *k*-Matchings of Graphs: *k*-Berge-Tutte Formula, *k*-Factor-Critical Graphs and *k*-Barriers. *Discrete Applied Mathematics*, **297,** 120-128.

[7] Liu, Y. and Liu, X. (2018) Integer *k*-Matchings of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **235**, 118-128. https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.08.013