Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(5), 88-90**
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145236

一个Hermite矩阵不等式在四元数自共轭矩阵的推广

唐　兴

绍兴文理学院数理信息学院，浙江　绍兴

收稿日期：2025年4月14日；录用日期：2025年5月7日；发布日期：2025年5月14日

摘　要

本文给出四元数自共轭矩阵的导出阵表示，得到了两个四元数自共轭矩阵及其特征值的不等式。

关键词

四元数自共轭矩阵，不等式

A Generalization of Hermite Matrix Inequalities in Quaternionic Self-Conjugate Matrices

Xing Tang

School of Mathematics Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Apr. 14th, 2025; accepted: May 7th, 2025; published: May 14th, 2025

Abstract

In this paper, the derived matrix representation of quaternionic self-conjugate matrices is given, and inequalities for two quaternionic self-conjugate matrices and their eigenvalues are obtained.

Keywords

Quaternionic Self-Conjugate Matrix, Inequality

文章引用: 唐兴. 一个 Hermite 矩阵不等式在四元数自共轭矩阵的推广[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 88-90.
DOI: 10.12677/aam.2025.145236

1. 引言

令 H 表示四元数体，C 表示复数域，Q 表示实数域，对任意 $a(a\in H)=a_0+a_1i+a_2j+a_3k(a_0,a_1,a_2,a_3\in R)=(a_0+a_1i)+(a_2+a_3i)j=z_1+z_2j(z_1,z_2\in C)$，$H^{n\times n}$ 表示 H 上全体 $n\times n$ 矩阵构成的集合，A^* 表示 A 的转置共轭矩阵，若 $A\in H^{n\times n}$ 且 $A^*=A$，(记为 $A\in SC_n(H)$)则称 A 为四元数自共轭矩阵。$SC_n(H)$ 表示所有 n 阶四元数自共轭方阵的集合。

定义 1：$a^\sigma=\begin{bmatrix} a_0+a_1i & -a_2-a_3i \\ a_2-a_3i & a_0-a_1i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{bmatrix}\in C^{2\times 2}$ 记为四元数 a 的导出阵，同理定义 $A^\sigma=\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ \overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix}\in C^{2n\times 2n}$ 记为 A ($A\in H^{n\times n}$)的导出阵。

定理 1 [1]：A 是四元数自共轭矩阵的充要条件是 A^σ 是 Hermite 方阵。

定理 2 [2]：若 $A\in SC_n(H)$，则存在 $H^{n\times n}$ 中的广义酉矩阵 U，使得

$$UAU^*=diag(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)).$$

由定理 1 易知定理 2 成立，因为 $\lambda_1(A)(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数，我们约定它们按如下大小递增排列：$\lambda_1(A)\le\lambda_2(A)\le\cdots\le\lambda_n(A)$。

定理 1 [3]：(Weyl 不等式)设 $A,B,A,B,A+B$ 都是 Hermite 矩阵且 $A,B,A,B,A+B$ 的特征值分别为 $\lambda_1(A)\le\lambda_2(A)\le\cdots\le\lambda_{n-1}(A)\le\lambda_n(A)$、$\lambda_1(B)\le\lambda_2(B)\le\cdots\le\lambda_{n-1}(B)\le\lambda_n(B)$、$\lambda_1(A+B)\le\lambda_2(A+B)\le\cdots\le\lambda_{n-1}(A+B)\le\lambda_n(A+B)$，则有：

$$\lambda_k(A)+\lambda_1(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_k(A)+\lambda_n(B),k(=1,2,\cdots,n).$$

定理 4 [4]：设 $A,B\in SC_n(Q)$ 且 $A,B,A+B$ 的特征值分别为 $\lambda_1(A)\le\lambda_2(A)\le\cdots\le\lambda_{n-1}(A)\le\lambda_n(A)$、$\lambda_1(B)\le\lambda_2(B)\le\cdots\le\lambda_{n-1}(B)\le\lambda_n(B)$、$\lambda_1(A+B)\le\lambda_2(A+B)\le\cdots\le\lambda_{n-1}(A+B)\le\lambda_n(A+B)$，则有：

$$\lambda_k(A)+\lambda_1(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_k(A)+\lambda_n(B),k(=1,2,\cdots,n).$$

定理 5 [5]：设自共轭矩阵，$A,B\in H^{n\times n}$，则对于满足 $1\le j,k\le n$ 且 $j+k\ge n+1$ 的 j 和 k 均有：

$$\lambda_{j+k-n}(A+B)\le\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$$

对于满足 $1\le j,k\le n$ 且 $j+k\le n+1$ 的 j 和 k 均有：

$$\lambda_{j+k-1}(A+B)\ge\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$$

2. 结论

定理 6：设 $A,B\in SC_n(Q)$，则对于 $1\le m\le n$，以及任何 i、j、k、j'，满足 $1\le i,j,k\le n$，$j+k=n+1$ 且 $j'=k-i+n$ 使得以下不等式式成立：

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(A)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(B)\le\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(A+B)\le\sum_{j=1}^{m}\lambda_i(A)+\sum_{j'=1}^{m}\lambda_{j'}(B)$$

证明：由定理 4 和由定理 5 可知对于自共轭矩阵，$A,B\in H^{n\times n}$，则对于 $1\le m\le n$，以及任何 i、j、k、j'，满足 $1\le i,j,k\le n$，$j+k=n+1$ 且 $j'=k-i+n$ 使得以下不等式式成立：

$$\lambda_i(A)+\lambda_j(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_i(A)+\lambda_{j'}(B)$$

应用数学归纳法证明定理 6，由定理 2 知若 $A\in SC_n(H)$，则存在 $H^{n\times n}$ 中的广义酉矩阵 U，使得 $UAU^*=diag(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A))$。

当 $m=1$ 时，定理 6 变为 $\lambda_i(A)+\lambda_j(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_i(A)+\lambda_{j'}(B)$，即满足定理 5。

设当 $m=n-1$ 时，定理 6 成立，下证当 $m=n$ 时，不等式成立。

当 $m=n-1$ 时，则下式成立：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(A)+\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(B)\le\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(A+B)\le\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(A)+\sum_{j'=1}^{n-1}\lambda_{j'}(B)$$

当 $m=n$ 时，取 $i=n$， $j=1$， $k=n$， $j'=n$，使得

$$\lambda_n(A)+\lambda_1(B)\le\lambda_n(A+B)\le\lambda_n(A)+\lambda_n(B)$$

上面两不等式对应相加，即得不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(B)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A+B)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)+\sum_{j'=1}^{n}\lambda_{j'}(B)$$

当且仅当 A 和 B 可交换，即 $AB=BA$ 时等号成立。即定理 6 得证。

参考文献

[1] 黄礼平. 四元数自共轭矩阵乘积的相似变换[J]. 数学进展, 2003, 32(4): 429-434.

[2] 谢邦杰. 任意体上可中心化矩阵的行列式[J]. 吉林大学学报(理学版), 1980(3): 1-33.

[3] 匡继昌, 编著. 常用不等式[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1989: 478.

[4] 李莹, 赵建立. 四元数自共轭矩阵特征值的变分特征及其应用[J]. 河北大学学报(自然科学版), 2009, 29(2): 116-118.

[5] 李晓沛, 顾广泽, 杨红伏, 等. 关于自共轭四元数矩阵特征值的一个不等式[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2000, 27(3): 6-8.