Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 450-464
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145274

半耗散格点Schrödinger方程组的统计解与Liouville型定理

何乐乐，赵才地

温州大学数理学院，浙江 温州

收稿日期：2025年4月28日；录用日期：2025年5月21日；发布日期：2025年5月30日

摘 要

本文研究了半耗散格点非线性Schrödinger方程组解的拉回渐近行为及其概率分布。该方程组描述带有杂质的Bose-Einstein浓缩模型，模型中的Bose波函数具有耗散性，杂质波函数的能量守恒。作者首先证明该问题的整体适定性，然后研究Bose波函数在适当意义下拉回吸引子的存在性，接着应用该拉回吸引子和广义Banach极限构造统计解，并证明统计解满足Liouville型定理。

关键词

半耗散格点非线性Schrödinger方程组，拉回吸引子，统计解，Liouville定理

Statistical Solutions of the Semi-Dissipative Lattice Schrödinger System of Equations and Liouville-Type Theorem

Lele He, Caidi Zhao

College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Apr. 28th, 2025; accepted: May 21st, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

In this paper, the pullback asymptotic behavior of solutions to the nonlinear Schrödinger system of equations with semi-dissipative lattices and their probability distributions are studied. The equations describe the Bose-Einstein condensation model with impurities, in which the Bose wave function is dissipative, and the energy of the impurity wave function is conserved. The authors first prove the global well-posed of the problem and then investigate the existence of a pullback attractor for the Bose

文章引用：何乐乐，赵才地．半耗散格点 Schrödinger 方程组的统计解与 Liouville 型定理[J]．应用数学进展, 2025, 14(5): 450-464. DOI: 10.12677/aam.2025.145274

wave function in a suitable sense. The authors then apply the pullback attractor and the generalized Banach limit to construct a statistical solution and show that the statistical solution satisfies the Liouville-type theorem.

Keywords

Semi-Dissipative Lattice Nonlinear Schrödinger System of Equations, Pullback Attractor, Statistical Solution, Liouville Theorem

1. 引言

研究下面非自治耦合格点非线性 Schrödinger 方程组的初值问题：

$$\begin{cases} i\dot{u}_m-(Au)_m+(1+i\gamma)u_m-\left(|u_m|^2+|v_m|^2\right)u_m=f_m(t), m\in\mathbb{Z}, t>\tau, \\ i\dot{v}_m+\delta(Av)_m+|v_m|^2 v_m=0, m\in\mathbb{Z}, t>\tau, \\ u_m(\tau)=u_{m,\tau}, v_m(\tau)=v_{m,\tau}, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，i 表示虚数单位，$u_m(\cdot)$ 和 $v_m(\cdot)$ 是未知的复值函数，$f_m(\cdot)$ 是给定的外力项，γ 和 δ 均为正的常数，$\tau\in\mathbb{R}$ 为初始时刻，$u_{m,\tau}$ 和 $v_{m,\tau}$ 为初值，线性算子 A 定义为：

$$(Au)_m=2u_m-u_{m+1}-u_{m-1}, \quad \forall u=(u_m)_{m\in\mathbb{Z}}.$$

方程组$(1)_1$~$(1)_2$来源于下面的非自治耦合格点非线性 Schrödinger 方程组

$$\begin{cases} iu_t+\Delta u+\left(1-|u|^2-|v|^2\right)u+i\gamma u=f(x,t), \\ iv_t-\delta\Delta v+|v|^2 v=0. \end{cases} \tag{2}$$

在一维直线 $\mathbb{R}$ 上对空间变量 x 离散化，取步长为 1，则由方程组(2)得到方程组$(1)_1$~$(1)_2$。

方程组(2)刻画了存在杂质的 Bose-Einstein 浓缩模型，其中 u 和 v 分别表示 Boson 和杂质波动函数，$\gamma>0$ 表示冷凝物的潮湿系数，$f(x,t)$ 是随着时间变化的外力项。

当系统不含任何杂质(即 $v(t)\equiv 0$)时，方程组(2)变成

$$iu_t+\Delta u+\left(1-|u|^2\right)u+i\gamma u=f(x,t). \tag{3}$$

方程(3)是下面 Schrödinger 方程

$$iu_t+\Delta u+\left(1-|u|^2\right)u=0 \tag{4}$$

带有弱阻力的形式。方程(4)作为现代数学物理的基本方程已经被广泛研究(参考[1]-[4])。

方程$(2)_1$具有耗散性，而方程$(2)_2$的能量(L^2 范数)守恒，因此耦合方程组(2)在 $L^2\times L^2$ 范数下不可能存在经典的全局吸引子或拉回吸引子(见[5])。为了克服方程$(2)_2$能量守恒带来的困难，在[6]中，作者将方程$(2)_2$解的集合作为方程$(2)_1$解映射生成的半过程的符号空间，在 L^2 空间中的范数拓扑下，以及在 H^1 空间中弱拓扑下证明了一致吸引子 $\mathcal{A}_\delta$ 的存在性，并研究了耦合参数 δ 趋于 0 时一致吸引子 $\mathcal{A}_\delta$ 的极限

行为。

在[7]中，作者利用[6]的思想证明了格点系统(1)在自治情形下一致吸引子的存在性并给出了其Kolmogorov-ε熵的上界估计。格点系统包括耦合的常微分方程组、耦合映射格点和细胞自动机。在某些情况下，格点系统表现为偏微分方程的空间变量离散化近似。已有许多关于格点系统的理论研究与应用，在应用方面涉及电气工程[8]、图像处理[9]、模式识别[10]等领域，其中关于吸引子理论方面的研究可以参考文献[11]-[17]。

本文的初衷是应用无穷维动力系统的途径研究系统(1)的统计解。统计解的概念来源于统计物理中人们对湍流的研究。湍流中的大多数物理量如速度、动能、能量耗散等，在不同时间和空间点上变化差异非常大，表现为高度的不规则和不可预测特征，但对这些量于时间或空间进行平均后则表现出一定的规律(见[18])。为了刻画湍流的这一共性，人们引入了统计解的概念。较早的统计解的概念有两种，一种是由 Foias 和 Prodi 引入的 Foias-Prodi 统计解(见[19])，它是一族以时间变量为参数的 Borel 概率测度，用来刻画二维不可压 Navier-Stokes 方程组的解在其相空间上的概率分布。另一种是由 Vishik 和 Fursikov 引入的 Vishik-Fursikov 统计解(见[20])，它是单个的 Borel 概率测度，用来描述三维不可压 Navier-Stokes 方程组的解在其时空速度场的概率分布。

目前，统计解已成为严格的数学概念，用来刻画微分方程的解在相应相空间中的概率分布，统计解的理论也有很大发展。例如，文献[21]研究了三维不可压 Navier-Stokes 型方程轨道统计解的存在性，文献[22]则给出了演化方程统计解与轨道统计解的理论框架；文献[23]利用自然平移半群和轨道吸引子构造了三维全局修正 Navier-Stokes 方程组的轨道统计解；文献[24]给出了一般自治发展方程轨道统计解存在的充分条件。其他从无穷维动力系统途径研究微分方程统计解的文献可以参考[25]-[28]等，这些文献中，作者先证明相应的解映射存在拉回吸引子或轨道吸引子，然后结合广义 Banach 极限构造解映射的不变测度，接着证明构造的不变测度为相应方程的统计解或轨道统计解。事实上，对于耗散演化系统不变测度的存在性，目前已有较成熟的结果。例如，文献[29]证明了耗散半群存在不变测度的充分条件，文献[30]将[31]的结果推广到了非自治情形，给出完备度量空间上的耗散过程存在不变测度的充分条件；文献[32]讨论了一阶格点系统的不变测度；最近，文献[33]证明了具有全局随机吸引子的随机动力系统存在不变样本测度的充分条件。需要指出的是，耗散性在上面提到的文献的研究中起到了关键作用。

然而，本文研究的耦合格点非线性 Schrödinger 方程组$(1)_1$~$(2)_1$仅具有半耗散的特征，已有的方法将不能直接应用，这是本文研究中需要解决的主要困难。事实上，经简单计算可知$\|v(t)\| = \|v_\tau\|, t \in R$，这表明杂质波函数$v(\cdot)$的能量是守恒的，将导致方程组$(1)_1$~$(1)_2$在$\ell^2 \times \ell^2$范数下不可能存在经典的全局吸引子或拉回吸引子(见[5])。为克服这一困难，我们考虑集合$\Xi_j = \left\{ v \middle| \|v\|^2 \le j \right\}$，其中$j$为任意给定的自然数，把方程$(1)_1$看作带有势函数$|v_m(\cdot)|^2 u_m(\cdot)$和外力项$f_m(\cdot)$的非自治演化方程，其中$\left(v_m(t)\right)_{m\in\mathbb{Z}} \in \Xi_j, \forall t \in \mathbb{R}$，进而在非自治格点系统的理论框架下研究方程$(1)_1$的拉回吸引子，并应用拉回吸引子和广义 Banach 极限构造其解映射的不变测度，最后证明该不变测度是$(1)_1$的统计解且满足 Liouville 定理。

2. 解的整体适定性

首先介绍一些符号空间和算子。对于$1 \le p < +\infty$，记

$$\ell^p = \left\{ u = (u_m)_{m\in\mathbb{Z}} \mid u_m \in \mathbb{C}, \sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} |u_m|^p < +\infty \right\}$$

并赋以范数$\|u\|_p = \left(\sum\nolimits_{m\in Z} |u_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}$。特别地，当$p=1$时，在$\ell^2$上定义内积和范数为$(u,v) = Re\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} u_m \overline{v}_m$，$\|u\|^2 = (u,u)$，$\forall u = (u_m)_{m\in\mathbb{Z}}, v = (v_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$，其中$\overline{v}_m$表示$v_m$的共轭。显然，$\left(\ell^2, (\cdot,\cdot)\right)$为 Hilbert 空间。

在 ℓ^2 上定义线性算子 B 和 B^* 如下：

$$\left(Bu\right)_m = u_{m+1} - u_m, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall u = \left(u_m\right)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2,$$

$$\left(B^* u\right)_m = u_{m-1} - u_m, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall u = \left(u_m\right)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2.$$

不难验证 B^* 是 B 的伴随算子，且

$$\left(Au, v\right) = \left(B^* Bu, v\right) = \left(Bu, Bv\right), \forall u, v \in \ell^2,$$

$$\|Au\|^2 \le 16\|u\|^2, \|Bu\|^2 \le 4\|u\|^2, \forall u \in \ell^2.$$

下面记 $u = \left(u_m\right)_{m\in\mathbb{Z}}$，$v = \left(v_m\right)_{m\in\mathbb{Z}}$，$|u|^2 = \left(|u_m|^2\right)_{m\in\mathbb{Z}}$，$|v|^2 = \left(|v_m|^2\right)_{m\in\mathbb{Z}}$，$f(t) = f(t) = \left(f_m(t)\right)_{m\in\mathbb{Z}}$，$\left(u_{m,\tau}\right)_{m\in\mathbb{Z}} = u_\tau$，$\left(v_{m,\tau}\right)_{m\in\mathbb{Z}} = v_\tau$。考虑方程(1)$_1$ 相应的初值问题如下：

$$\begin{cases} i\dot{u} - Au + \left(1 - |u|^2\right)u + i\gamma u = f(t) + |v|^2 u, t > \tau, \\ u(\tau) = u_\tau, \end{cases} \tag{5}$$

其中，$v \in \Xi_j$，j 为某自然数。为保证初值问题(5)解的整体适定性，我们假设函数 $f(\cdot)$ 满足下面条件：

(H)：设 $f(t) = \left(f_m(t)\right)_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}\left(\ell^2\right)$，且存在正的常数 $\kappa \in \left(0, \frac{\gamma}{2}\right)$ 使得

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\gamma\theta} \|f(\theta)\|^2 \,\mathrm{d}\theta < \mathrm{e}^{\left(\frac{\gamma}{2}+\kappa\right)t} K(t), t \in R, \tag{6}$$

其中，$K(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续函数，对每个 $t \in \mathbb{R}$，$K(\cdot)$ 在区间 $(-\infty, t]$ 上有界。

引理 2.1： 设条件(H)成立，则对任意自然数 j，任意初始时刻 $\tau \in \mathbb{R}$，以及任意 $u_\tau \in \ell^2$，初值问题(5)存在唯一的解 $u \in \mathcal{C}\left([\tau, +\infty]; \ell^2\right) \cap \mathcal{C}^1\left((\tau, +\infty); \ell^2\right)$，满足

$$\|u(t)\|^2 \le \|u_\tau\|^2 \mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)} + \frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\gamma} \int_\tau^t \mathrm{e}^{\gamma s} \|f(s)\|^2 \,\mathrm{d}s, \forall t \ge \tau. \tag{7}$$

并且，解 $u(\cdot)$ 在 ℓ^2 范数下连续地依赖于初值。

证明： 容易验证方程(5)$_1$ 中的非线性项满足局部 Lipschitz 条件。对任意给定的自然数 j，任意初始时刻 $\tau \in \mathbb{R}$，以及任意 $u_\tau \in \ell^2$，解的整体存在性可由经典的常微分方程理论得到。下面先证明估计式(7)。用 $u(t)$ 与(5)$_1$ 式作内积 $(\cdot,\cdot)$ 并取虚部，然后用 Hölder 不等式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2 + \gamma\|u(t)\|^2 \le \frac{1}{\gamma}\|f(t)\|^2, \forall t \ge \tau. \tag{8}$$

对(8)式应用 Gronwall 不等式即得(7)。

下面证明解关于初值的连续依赖性。设 $u^{(k)}(\cdot) = u^{(k)}\left(\cdot, \tau; u_\tau^{(k)}\right), k = 1, 2$，分别为初值问题(5)的解，记 $\tilde{u}(\cdot) = u^{(1)}(\cdot) - u^{(2)}(\cdot)$，则 $\tilde{u}(s)$ 满足

$$\begin{cases} i\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}(s)}{\mathrm{d}s} - A\tilde{u}(s) + (1 + i\gamma)\tilde{u}(s) = G\left(u^{(1)}(s), s\right) - G\left(u^{(2)}(s), s\right), s > \tau, \\ \tilde{u}(\tau) = u^{(1)}(\tau) - u^{(2)}(\tau), \end{cases} \tag{9}$$

其中，$G(u, t) = |u|^2 u + |v|^2 u, v \in \Xi_j$。用 $\tilde{u}(s)$ 与(9)$_1$ 式在 ℓ^2 上作内积并取虚部得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\tilde{u}(s)\|^2+\gamma\|\tilde{u}(s)\|^2=Im\left(G\left(u^{(1)}(s),s\right)-G\left(u^{(2)}(s),s\right),\tilde{u}(s)\right). \tag{10}$$

直接计算得到

$$\begin{aligned}Im\left(G\left(u^{(1)}(s),s\right)-G\left(u^{(2)}(s),s\right),\tilde{u}(s)\right)&\le\left|G\left(u^{(1)}(s),s\right)-G\left(u^{(2)}(s),s\right),\tilde{u}(s)\right|\\&\le\left\|G\left(u^{(1)}(s),s\right)-G\left(u^{(2)}(s),s\right)\right\|\|\tilde{u}(s)\|\\&\le c_1\|\tilde{u}(s)\|^2,\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$c_1=c_1\left(\left\|w_\tau^{(1)}\right\|,\left\|w_\tau^{(2)}\right\|,t,\tau\right)$ 是只依赖于 $\left\|u_\tau^{(1)}\right\|,\left\|u_\tau^{(2)}\right\|,t,\tau$ 和 j，但不依赖于 s 的正的常数。结合(10)和(11)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\tilde{u}(s)\|^2\le 2(c_1-\gamma)\|\tilde{u}(s)\|^2.$$

应用 Gronwall 不等式，即得

$$\left\|u\left(t,\tau;u_\tau^{(1)}\right)-u\left(t,\tau;u_\tau^{(2)}\right)\right\|^2\le \mathrm{e}^{2(c_1-\gamma)(t-\tau)}\left\|u_\tau^{(1)}-u_\tau^{(2)}\right\|^2. \tag{12}$$

证明完毕。

由引理 2.1 知对于任意给定的自然数 j，问题(5)的解映射

$$U(t,\tau):u_\tau\in\ell^2\mapsto u(t)=u(t,\tau;u_\tau)=U_1(t,\tau)u_\tau\in\ell^2,\forall t\ge\tau,$$

在 ℓ^2 上生成过程一个连续的过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$，其中 $u(t)=u(t,\tau;u_\tau)$ 表示问题(5)在初始时刻 τ 以 u_τ 为初值的解。

3. 拉回吸引子的存在性

在这一节中，我们先证明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中存在一个有界拉回吸收集，然后证明其具有拉回渐近零性质，进而得到拉回吸引子的存在性。

记 $\mathcal{P}\left(\ell^2\right)$ 为 ℓ^2 中所有非空子集构成的集合。根据(6)式，我们记 $\mathcal{D}_\gamma$ 为一族非空子集 $\hat{D}_\gamma=\left\{D_\gamma(s)\,|\,s\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{P}\left(\ell^2\right)$，其中 $D_\gamma(s)\subset\ell^2$ 并且满足

$$\lim_{s\to-\infty}\mathrm{e}^{\gamma s}\sup_{\xi\in D_\gamma(s)}\|\xi\|^2=0. \tag{13}$$

则 ℓ^2 中所有有界集都属于 $\mathcal{D}_\gamma$。

定义 3.1：1) 若存在 $\hat{\mathcal{B}}_0=\left\{\mathcal{B}_0(s)\,|\,s\in\mathbb{R}\right\}$，其中对每个 $s\in\mathbb{R}$，$\mathcal{B}_0(s)$ 是 ℓ^2 中的有界集，使得对任意 $\hat{D}_\gamma=\left\{D_\gamma(s)\,|\,s\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{D}_\gamma$，存在 $\tau_0=\tau_0\left(t,\hat{D}_\gamma\right)\le t$ 有 $U(t,\tau)D_\gamma(\tau)\subset\mathcal{B}_0(t),\forall\tau\le\tau_0$，则称 $\hat{\mathcal{B}}_0$ 为过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中的有界拉回吸收集。

2) 设 $t\in\mathbb{R}$ 给定。若对任意满足 $\tau_n\le t$ 且 $\lim_{n\to\infty}\tau_n=-\infty$ 的数列 $\{\tau_n\}_{n\ge1}$，任意 $\hat{D}=\left\{D(s)\in\ell^2\,|\,s\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{D}_\gamma,u_{\tau_n}\in D(\tau_n)$，序列 $\left\{U(t,\tau_n)u_{\tau_n}\right\}_{n\ge1}$ 在 ℓ^2 中存在收敛的子列，则称过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中是拉回渐近紧的。

3) $\left\{\mathcal{A}_\gamma(t)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$ 称为过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中的拉回吸引子，若其满足下面三个性质：

① 紧性：对每一个 $t\in\mathbb{R}$，$\mathcal{A}_\gamma(t)$ 是 ℓ^2 中的非空紧子集；

② 不变性：$U(t,\tau)\mathcal{A}_\gamma(\tau)=\mathcal{A}_\gamma(t),\forall t\ge\tau$；

③ 拉回吸引性：$\lim\limits_{\tau\to-\infty}\operatorname{dist}_{\ell^2}\left(U(t,\tau)D_\gamma(\tau),\mathcal{A}_\gamma(t)\right)=0,\forall\hat{D}_\gamma=\left\{D_\gamma(s)\mid s\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{D}_\gamma,t\in\mathbb{R}$，其中 $\operatorname{dist}_{\ell^2}(\cdot,\cdot)$ 表示 ℓ^2 的子集间的 Hausdorff 半距离。

下面先证明过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中存在一个有界拉回吸收集。

引理 3.1：设条件(H)成立，则过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中存在一个有界拉回吸收集。

证明：记

$$R_\gamma(t)=\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\gamma}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\gamma s}\left|f(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}},t\in R. \tag{14}$$

则由(6)、(13)、条件(H)和定义 3.1-1)知 $\hat{\mathcal{B}}_0=\left\{\mathcal{B}\left(0;R_\gamma(s)\right)\mid s\in\mathbb{R}\right\}$ 即为过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\ge\tau}$ 在 ℓ^2 中的有界拉回吸收集，其中 $B\left(0;R_\gamma(s)\right)=\left\{u\in\ell^2\mid\|u\|^2\le R_\gamma(s)\right\}$。

接下来证明过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\ge\tau}$ 具有拉回渐近零的性质。

引理 3.2：设条件(H)成立。则对于给定的 $t\in\mathbb{R},\varepsilon>0$ 和 $\hat{D}_\gamma=\left\{D_\gamma(s)\mid s\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{D}_\gamma$，存在 $M_\star=M_\star\left(t,\varepsilon,\hat{D}_\gamma\right)\in\mathbb{N}$ 和 $\tau_\star=\tau_\star\left(t,\varepsilon,\hat{D}_\gamma\right)\le t$，使得

$$\sup_{u_\tau\in D_\gamma(\tau)}\sum_{|m|\ge M_\star}\left|\left(U(t,\tau)u_\tau\right)_m\right|^2\le\varepsilon^2,\forall\tau\le\tau_\star. \tag{15}$$

证明：根据 Urysohn 引理知存在光滑函数 $\chi(\cdot)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ 满足

$$\begin{cases}\chi(x)=0,\ 0\le x\le1,\\ 0\le\chi(x)\le1,\ 1\le x\le2,\\ \chi(x)=1,\ x\ge2,\\ \left|\chi'(x)\right|\le\chi_0(\text{某正数}),\ x\ge0.\end{cases} \tag{16}$$

考虑任意的 $\hat{D}_\gamma=\left\{D_\gamma(s)\mid s\in\mathbb{R}\right\}\in\mathcal{D}_\gamma$。对任意 $t,\tau\in\mathbb{R},t\ge\tau$，$u_\tau\in D_\gamma(\tau)$，记 $u(t)=U(t,\tau)u_\tau\in\ell^2$，则 $u(\cdot)$ 是方程(5)以 $u(\tau)=u_\tau$ 为初值，以 $v(\cdot)\in\Xi_j$ 为势函数的解。设 M 为某自然数。

$$p_m(\cdot)=\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)u_m(\cdot),m\in\mathbb{Z},p=p(\cdot)=\left(p_m(\cdot)\right)_{m\in\mathbb{Z}}.$$

用 $p(s)$ 与$(5)_1$式作内积 $(\cdot,\cdot)$ 并取虚部得

$$\begin{aligned}&Im\left(i\dot{u}(s)-Au(s)+(1+i\gamma)u(s)-\left|u(s)\right|^2u(s),p(s)\right)\\&=Im\left(\left|v(s)\right|^2u(s)+f(s),p(s)\right),s\in(\tau,t].\end{aligned} \tag{17}$$

化简得

$$\left(\dot{u}(s),p(s)\right)+\gamma\left(u(s),p(s)\right)=Im\left(f(s),p(s)\right)+Im\left(Au(s),p(s)\right),s\in(\tau,t). \tag{18}$$

经计算和估计，得到

$$\left(\dot{u}(s),p(s)\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(s)\right|^2, \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
Im\left(Au(s),p(s)\right) &= Im\left(Bu(s),Bp(s)\right) \\
&= Im\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(u_{m+1}-u_m\right)\left(\chi\left(\frac{|m+1|}{M}\right)\bar{u}_{m+1}-\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\bar{u}_m\right)\right) \\
&= -Im\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)u_{m+1}\bar{u}_m+\chi\left(\frac{|m+1|}{M}\right)\bar{u}_{m+1}u_m\right)\right) \\
&\le \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\left|\chi\left(\frac{|m+1|}{M}\right)-\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\right|\cdot|u_{m+1}|\cdot|u_m|\right) \\
&\le \frac{\chi_0 R_\gamma^2(s)}{M},\forall s\ge\tau_0\ge\tau,
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\gamma\left(u(s),p(s)\right)=\gamma\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(s)\right|^2, \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
Im\left(f(s),p(s)\right) &\le \sum_{|m|\ge M}\left|\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)f_m(s)\cdot u_m(s)\right| \\
&\le \frac{\gamma}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(s)\right|^2+\frac{1}{2\gamma}\sum_{|m|\ge M}\left|f_m(s)\right|^2,
\end{aligned} \tag{22}
$$

其中，τ_0 为引理 3.1 中的拉回吸收时间。结合(18)~(22)得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(s)\right|^2+\gamma\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(s)\right|^2\le\frac{1}{\gamma}\sum_{|m|\ge M}\left|f_m(s)\right|^2+\frac{2\chi_0 R_\gamma^2(s)}{M}. \tag{23}
$$

对(23)式应用 Gronwall 不等式，得到

$$
\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(t)\right|^2\le\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(\tau)\right|^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}+\int_\tau^t\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{|m|\ge M}\left|f_m(s)\right|^2+\frac{2\chi_0 R_\gamma^2(s)}{M}\right)\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\mathrm{d}s,t\ge\tau_0\ge\tau \tag{24}
$$

其中，$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(\tau)\right|^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\le\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\left\|u_\tau\right\|^2$。显然，对给定 $\varepsilon>0$，存在 $\tau_1=\tau_1\left(t,\varepsilon,\hat{D}_\gamma\right)$ 使得

$$
\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi\left(\frac{|m|}{M}\right)\left|u_m(\tau)\right|^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}<\frac{\varepsilon}{3},t\ge\tau_1\ge\tau,\forall u_\tau\in D_\gamma(\tau). \tag{25}
$$

并且对上述 $\varepsilon>0$，由假设(H)知存在 $M_1=M_1\left(t,\varepsilon,\hat{D}_\gamma\right)\in\mathbb{N}$ 使得

$$
\int_\tau^t\frac{1}{\gamma}\sum_{|m|\ge M}\left|f_m(s)\right|^2\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{3},M\ge M_1. \tag{26}
$$

同样由假设(H)知，存在 $\mathbb{R}$ 上连续函数 $K(\cdot)$，对每个 $t\in\mathbb{R}$，$K(\cdot)$ 在区间 $(-\infty,t]$ 上有界，使得

$$
\begin{aligned}
\int_\tau^t\frac{2\chi_0 R_\gamma(s)}{M}\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\mathrm{d}s &\le \frac{2\chi_0}{M}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-\gamma s}}{\gamma}\int_{-\infty}^s\mathrm{e}^{\gamma\theta}\left\|f(\theta)\right\|^2\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}s \\
&\le \frac{2\chi_0}{M}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\mathrm{d}s+\frac{2\chi_0}{M\gamma}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\left(\frac{\gamma}{2}+\kappa\right)s}K(s)\mathrm{d}s \\
&\le \frac{2\chi_0}{M\gamma}+\frac{2\chi_0\tilde{K}(t)}{M\gamma}\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{-\left(\frac{\gamma}{2}-\kappa\right)(t-s)}\mathrm{d}s \\
&\le \frac{2\chi_0}{M\gamma}+\frac{2\chi_0\tilde{K}(t)}{M\gamma\left(\frac{\gamma}{2}-\kappa\right)},
\end{aligned}
$$

其中， $\tilde{K}(t)$ 是依赖于 $K(t)$ 的常数。因此，对上述 $\epsilon>0$ 存在 $M_2=M_2\left(t,\epsilon,\hat{D}_\gamma\right)$ 使得

$$\int_\tau^t \frac{2\chi_0 r^0(s)}{M} \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{3}, M\geq M_2. \tag{27}$$

取 $M_\star=\max\{M_1,M_2\}$， $\tau_\star=\min\{\tau_0,\tau_1\}$， 由(24)~(27)即得(15)式。证明完毕。

综合引理 3.1、引理 3.2 和文献[34]，我们得到：

定理 3.1： 设条件(H)成立。则对于任意给定的自然数 j，过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 ℓ^2 中存在拉回 $\mathcal{D}_\gamma$-吸引子 $\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}_\gamma}=\left\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)\mid t\in\mathbb{R}\right\}$ 满足定义 3.1-3)。

4. 不变测度的存在性

在这一节，我们证明过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 存在一族不变 Borel 概率测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，且对每个 $t\in\mathbb{R}$， μ_t 的支集包含于 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)$ 中。先介绍两个定义。

定义 4.1： 记 Λ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的有界实值函数的全体。 Λ 上的任意一个线性泛函(记作 $\mathrm{LIM}_{\cdot\to-\infty}$)若满足：

1) 对任何 $\mathbb{R}$ 上的非负函数 $\varphi(\cdot)$，有 $\mathrm{LIM}_{\cdot\to-\infty} y(\cdot)\geq 0$；
2) 如果通常意义下的极限 $\lim\limits_{\cdot\to-\infty} y(\cdot)$ 存在，则 $\mathrm{LIM}_{\cdot\to-\infty} y(\cdot)=\lim\limits_{\cdot\to-\infty} y(\cdot)$，

则称 $\mathrm{LIM}_{\cdot\to-\infty}$ 为广义 Banach 极限。

定义 4.2： 若对于每个固定的 $u_\tau\in\ell^2$ 和 $t\in\mathbb{R}$， ℓ^2-值函数 $\tau\mapsto U(t,\tau)u_\tau$ 在 $(-\infty,t)$ 上连续且有界，则称过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ 在 ℓ^2 上是 τ-连续的。

已有结果[31]表明，完备度量空间中的一个连续过程若存在拉回吸引子且满足 τ-连续性，则其存在一族不变 Borel 概率测度。

引理 4.1： 设条件(H)成立。则对于给定的自然数 j，$t\in\mathbb{R}$ 和 $u_*\in\ell^2$，ℓ^2-值函数 $\tau\mapsto U(t,\tau)u_*$ 在 $(-\infty,t)$ 上有界。

证明： 对于给定的自然数 j，给定的 $u_*\in\ell^2$ 和 $t,\tau\in\mathbb{R}$，由(6)得

$$\begin{aligned}\|u(s)\|^2&\leq\|u_*\|^2\mathrm{e}^{-\gamma(s-\tau)}+\frac{\mathrm{e}^{-\gamma s}}{\gamma}\int_\tau^s \mathrm{e}^{\gamma\theta}\|f(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta\\&\leq\|u_*\|^2+\frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\gamma}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\gamma\theta}\|f(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta\\&\leq\|u_*\|^2+\frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}}{\gamma}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\gamma\theta}\|f(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta,\forall s\in(-\infty,t].\end{aligned} \tag{28}$$

由条件(H)知(28)式的右端是与 $s\in(-\infty,t)$ 无关的有界量。

引理 4.2： 设条件(H)成立。则对于给定的自然数 j， $\tau_*\in\mathbb{R},u_*\in\ell^2$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,\tau_*,u_*)>0$， 使得

$$\|U(t,\tau)u_*-u_*\|<\varepsilon,\forall\tau\in[\tau_*,\tau_*+\delta),\forall t\in[\tau,\tau_*+\delta). \tag{29}$$

证明： 设 $\tau_*\in\mathbb{R},u_*\in\ell^2$ 和自然数 j 给定。直接计算得到

$$\|U(t,\tau)u_*-u_*\|^2=\int_\tau^t\frac{\mathrm{d}\|U(\theta,\tau)u_*\|^2}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta-2Re\left(U(t,\tau)u_*-u_*,u_*\right),\tau_*\leq\tau\leq t. \tag{30}$$

接下来，我们对(30)式的右端项分别进行估计。首先，由(8)得

$$\frac{\mathrm{d}\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|^2}{\mathrm{d}\theta}\le\frac{1}{\gamma}\left\|f(\theta)\right\|^2,\theta\in(\tau_*,t]. \tag{31}$$

对(31)式两边关于θ在$[\tau,t]$上积分，得

$$\int_\tau^t\frac{\mathrm{d}\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|^2}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\le\frac{1}{\gamma}\int_\tau^t\left\|f(\theta)\right\|^2\mathrm{d}\theta. \tag{32}$$

由假设(H)知，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1=\delta_1(\varepsilon,\tau_*,u_*)>0$，使得

$$\int_\tau^t\frac{\mathrm{d}\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|^2}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\le\frac{1}{\gamma}\int_\tau^t\left\|f(\theta)\right\|^2\mathrm{d}\theta<\frac{\varepsilon^2}{2},\forall\tau\in[\tau_*,\tau_*+\delta_1),\forall t\in[\tau,\tau_*+\delta_1). \tag{33}$$

下面估计$\left|Re\left(U(t,\tau)u_*-u_*,u_*\right)\right|$。首先由 Cauchy 不等式得到

$$\begin{aligned}\left|\left(U(t,\tau)u_*-u_*,u_*\right)\right|&=\left|\left(\int_\tau^t\frac{\mathrm{d}U(\theta,\tau)u_*}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta,u_*\right)\right|\le\left\|u_*\right\|\int_\tau^t\left\|\frac{\mathrm{d}U(\theta,\tau)u_*}{\mathrm{d}\theta}\right\|\mathrm{d}\theta\\&\le(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\left\|u_*\right\|\left(\int_\tau^t\left\|\frac{\mathrm{d}U(\theta,\tau)u_*}{\mathrm{d}\theta}\right\|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{34}$$

而由方程$(5)_1$知

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}U(\theta,\tau)u_*}{\mathrm{d}\theta}\right\|^2&=\left\|AU(\theta,\tau)u_*-\left(1-\left|U(\theta,\tau)u_*\right|^2\right)U(\theta,\tau)u_*-i\gamma U(\theta,\tau)u_*+f(t)+|v|^2U(\theta,\tau)u_*\right\|^2\\&\lesssim\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|^2+\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|_6^6+\left\|f(\theta)\right\|^2+\left\||v|^2U(\theta,\tau)u_*\right\|^{22},\end{aligned} \tag{35}$$

其中我们使用了记号$a\lesssim b$来表示$a\le cb$对于某个常数$c>0$成立。

其中c只依赖于所讨论问题的参数而不起本质作用。注意到$\ell^2\mapsto\ell^6$，因此存在常数$c_2=c_2(u_*,t)>0$使得

$$\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|_6^6\le c_2\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|^2.$$

关于$\left\||v|^2U(\theta,\tau)u_*\right\|^2$，我们有

$$\left\||v|^2U(\theta,\tau)u_*\right\|^2\le\|v\|_4^8+\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|_4^2\le c_2(j)\|v\|^2+c_2\left\|U(\theta,\tau)u_*\right\|^2.$$

这些估计，结合(35)和条件(H)知存在常数$c_3=c_3(j,u_*,t)>0$，使得$\left(\int_\tau^t\left\|\frac{\mathrm{d}U(\theta,\tau)u_*}{\mathrm{d}\theta}\right\|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}\le c_3$。因此，由(34)知对上述$\varepsilon>0$，存在$\delta_2=\delta_2(\varepsilon,\tau_\star,u_\star)>0$使得

$$\left|Re\left(U(t,\tau)u_\star-u_\star,u_\star\right)\right|<\frac{\varepsilon^2}{4},\forall\tau\in[\tau_\star,\tau_\star+\delta_2],\forall t\in[\tau,\tau_\star+\delta_2]. \tag{36}$$

结合(33)和(36)，取$\delta=\delta(\varepsilon,\tau_\star,u_\star)=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则

$$\left\|U_1(t,\tau)u_\star-u_\star\right\|^2<\varepsilon^2,\forall\tau\in[\tau_\star,\tau_\star+\delta),\forall t\in[\tau,\tau_\star+\delta).$$

证明完毕。

用与引理 4.2 类似的证明，我们不难得到：

引理 4.3： 设条件(H)成立。对于给定的 $\tau_* \in \mathbb{R}, u_* \in \ell^2$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, \tau_*, u_*) > 0$，使得

$$\left\|U(t,\tau)u_* - u_*\right\| < \varepsilon, \forall \tau \in (\tau_* - \delta, \tau_*], \forall t \in [\tau, \tau_*]. \tag{37}$$

应用引理 4.2 和引理 4.3，接下来我们证明：

引理 4.4： 设条件(H)成立。对于给定的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $u_* \in \ell^2$，ℓ^2-值函数 $\tau \mapsto U(t,\tau)u_*$ 在 $(-\infty, t)$ 上连续。

证明： 设 $t \in \mathbb{R}, u_* \in \ell^2$。只需证明对每一给定的 $\tau_* \in (-\infty, t)$，任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, \tau_*, u_\star) > 0$，当 $|s - \tau_*| < \delta$ 时，有

$$\left\|U(t,s)u_\star - U(t,\tau_\star)u_\star\right\| < \varepsilon. \tag{38}$$

我们将证明分成两部分。

情形 1：$s \ge \tau_*$。由过程的不变性，结合(12)式，得到

$$\begin{aligned}\left\|U(t,s)u_* - U(t,\tau_*)u_*\right\|^2 &= \left\|U(t,s)u_* - U(t,s)U(s,\tau_*)u_*\right\|^2 \\ &\lesssim \mathrm{e}^{2(c_1-\gamma)(t-\tau)}\left\|U(s,\tau_*)u_* - u_*\right\|^2.\end{aligned} \tag{39}$$

根据引理 4.2，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $\tau_\star \le s \le \tau_\star + \delta_1$ 时，

$$\left\|U(t,s)u_* - U(t,\tau_*)u_*\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

情形 2：$s \le \tau_\star$。再次由过程的不变性，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|U(t,s)u_* - U(t,\tau_*)u_*\right\|^2 &= \left\|U_1(t,\tau_*)U(\tau_*,s)u_* - U(t,\tau_*)u_*\right\|^2 \\ &\lesssim \mathrm{e}^{2(c_1-\gamma)(t-\tau)}\left\|U(\tau_*,s)u_* - u_*\right\|^2.\end{aligned} \tag{40}$$

根据引理 4.3，对上述 $\varepsilon > 0$，存在正常数 $\delta_2 > 0$，当 $\tau_* < s < \tau_* + \delta_2$ 时，我们有

$$\left\|U(t,s)u_* - U(t,\tau_*)u_*\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $|s - \tau_*| < \delta$ 时，有(38)式成立。证明完毕。

结合引理 4.1 和引理 4.4，应用[31]，我们得到下面的结果。

定理 4.1： 设条件(H)成立，自然数 j 给定。则对于给定的广义 Banach 极限 $\mathrm{LIM}_{\cdot \to -\infty}$ 和 $w_* \in \ell^2$，在 ℓ^2 上存在唯一一族 Borel 概率测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 使得

$$\mathrm{LIM}_{\tau\to-\infty}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \varphi\left(U(t,s)w_*\right)\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u) = \int_{\ell^2}\varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u), \tag{41}$$

其中，$\varphi \in C(\ell^2)$，并且 μ_t 满足下述不变性质：

$$\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u) = \int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\varphi\left(U(t,\tau)u\right)\mathrm{d}\mu_\tau(u), t \ge \tau. \tag{42}$$

5. 统计解与 Liouville 定理

在这一节，我们证明定理 4.1 中构造的不变 Borel 概率测度是方程$(5)_1$的统计解并且满足统计力学中的 Liouville 定理。

首先将方程$(5)_1$写成下面的形式：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = F(u,t) = -iAu + (i-\gamma)u - i\left(|u|^2 + |v|^2\right)u - if, t > \tau. \tag{43}$$

下面介绍与统计解相关的试验函数类 $\mathcal{T}$ 的定义。

定义 5.1：(参考[35])试验函数类 $\mathcal{T}$ 是定义在 ℓ^2 上的实值泛函 $\Phi=\Phi(\cdot)$ 的集合，这些泛函在 ℓ^2 的有界子集上有界，且满足：

1) 对任意的 $u\in\ell^2$，$\Phi(u)$ 的 Fréchet 导数(记作 $\Phi'(u)$)存在，也即对每个 $u\in\ell^2$，存在 ℓ^2 中的元素 $\Phi'(u)$，使得

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\left|\Phi(u+\xi)-\Phi(u)-\left(\Phi'(u),\xi\right)\right|}{\|\xi\|}=0,\xi\in\ell^2;$$

2) 从 ℓ^2 到 ℓ^2 的映射 $u\mapsto\Phi'(u)$ 连续且有界。

定义 5.1 中的条件 1)~2)保证了方程(43)的解满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(u(t))=\left(\Phi'(u(t)),\mathcal{F}(u(t),t)\right). \tag{44}$$

下面介绍方程(43)统计解的定义，并证明它的存在性。

定义 5.2： ℓ^2 上的一族 Borel 概率测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为方程(43)的统计解，若其满足下面条件：

1) 对任意的 $\psi\in C\left(\ell^2\right)$ (ℓ^2 上连续有界函数全体)，映射 $t\mapsto\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)$ 是连续的；

2) 对任意的 $\xi\in\ell^2$，映射 $u\mapsto\left(\xi,\mathcal{F}(u,t)\right)$ 对于几乎所有的 $t\in\mathbb{R}$ 是 μ_t-可积的，并且映射 $t\mapsto\int_{\ell^2}\left(\xi,\mathcal{F}(u,t)\right)\mathrm{d}\mu_t(u)$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 对任意 $\xi\in\ell^2$ 成立；

3) 对任意的试验函数 $\Phi\in\mathcal{T}$，以及任意的 $t,\tau\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_{\ell^2}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)-\int_{\ell^2}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_\tau(u)=\int_\tau^t\int_{\ell^2}\left(\Phi'(u),\mathcal{F}(u,s)\right)\mathrm{d}\mu_s(u)\mathrm{d}s,t\geq\tau.$$

本文的主要结果如下。

定理 5.1：设条件(H)成立。定理 4.1 中得到的 Borel 概率测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是方程(43)的统计解。

证明：我们证明由定理 4.1 得到的 Borel 概率测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足定义 5.2 中的 1)~3)。

首先证明 1)。对于给定的 $s_\star\in\mathbb{R}$，我们证明对任意的 $\psi\in C\left(\ell^2\right)$，有

$$\lim_{s\to s_\star}\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_s(u)=\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_{s_\star}(u). \tag{45}$$

事实上，由(41)和(42)知，对于 $s>s_\star$ 有

$$\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_s(u)-\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_{s_\star}(u)=\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(s_\star)}\left(\psi\left(U(s,s_\star)u\right)-\psi(u)\right)\mathrm{d}\mu_{s_\star}(u). \tag{46}$$

由于当 $s\to s_\star^+$ 时，$U(s,s_\star)u\to u$ 在 ℓ^2 中强收敛(见引理 4.2)，且 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(s_\star)$ 是 ℓ^2 中的紧集，$\psi\in C\left(\ell^2\right)$，因此(46)式表明

$$\lim_{s\to s_\star^+}\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_s(u)=\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_{s_\star}(u). \tag{47}$$

同样地，对于 $s<s_\star$，有

$$\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_{s_\star}(u)-\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_s(u)=\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(s)}\left(\psi\left(U_1(s_\star,s)u\right)-\psi(u)\right)\mathrm{d}\mu_s(u).$$

由于当 $s\to s_\star^-$ 时，$U_1(s_\star,s)u\to u$ 在 ℓ^2 中强收敛(见引理 4.3)，类似地我们可以得到

$$\lim_{s\to s_\star^-}\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_s(u)=\int_{\ell^2}\psi(u)\mathrm{d}\mu_{s_\star}(u). \tag{48}$$

结合(47)式和(48)式，1)得证。

接着证明 2)。对于任意的 $s\in\mathbb{R}$，我们已经证明了 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的支集包含于 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)\subset\ell^2$ 中(见定理 4.1)。

DOI: 10.12677/aam.2025.145274

下面证明对任意的 $\xi\in\ell^2$，映射 $u\mapsto\left(\xi,\mathcal{F}(u,t)\right)\in\mathcal{C}\left(\ell^2\right)$。为此设 $u_\star\in\ell^2$ 给定，考虑 $\left\{u^{(n)}\right\}\in\ell^2$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|u^{(n)}-u_\star\right\|=0$。直接计算得

$$\begin{aligned}&\left|\left(\xi,F\left(u^{(n)},t\right)\right)-\left(\xi,F\left(u_\star,t\right)\right)\right|\\&=\left|\left(\xi,\left(-iA+i-\gamma-i|v|^2\right)\left(u^{(n)}-u_\star\right)\right)+\left(\xi,-i\left(\left|u^{(n)}\right|^2u^{(n)}-\left|u_\star\right|^2u_\star\right)\right)\right|\\&\le\left|\left(\xi,\left(-iA+i-\gamma-i|v|^2\right)\left(u^{(n)}-u_\star\right)\right)\right|+\left|\left(\xi,-i\left(\left|u^{(n)}\right|^2u^{(n)}-\left|u_\star\right|^2u_\star\right)\right)\right|.\end{aligned}\tag{49}$$

注意到 $v(t)\le j,\forall t\in R$，不难验证

$$\left|\left(\xi,\left(-iA+i-\gamma-i|v|^2\right)\left(u^{(n)}-u_\star\right)\right)\right|\to0,n\to\infty,\tag{50}$$

$$\begin{aligned}&\left|\left(\xi,-i\left(\left|u^{(n)}\right|^2u^{(n)}-\left|u_\star\right|^2u_\star\right)\right)\right|\\&\le\left|\left(\xi,-i\left(\left|u^{(n)}\right|^2u^{(n)}-\left|u^{(n)}\right|^2u_\star\right)\right)\right|+\left|\left(\xi,-i\left(\left|u^{(n)}\right|^2u_\star-\left|u_\star\right|^2u_\star\right)\right)\right|\to0,n\to\infty.\end{aligned}\tag{51}$$

结合(49)~(51)式，我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\xi,\mathcal{F}\left(u^{(n)},t\right)\right)-\left(\xi,\mathcal{F}\left(u_\star,t\right)\right)\right|=0$。故而由(41)式可知，映射 $u\mapsto\left(\xi,\mathcal{F}(u,\cdot)\right)$ 是 μ_t-可积的，且由(1)知 $t\mapsto\int_{\ell^2}\left(\mathcal{F}(u,t),u\right)\mathrm{d}\mu_t(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，因此它属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$。

最后证明 3)。对任意的 $\Phi\in\mathcal{T}$，从(44)式推知对于所有的 $t,\tau\in\mathbb{R}$，其中 $t\ge\tau$，有

$$\Phi\left(u(t)\right)-\Phi\left(u(\tau)\right)=\int_\tau^t\left(\Phi'\left(u(\theta)\right),F\left(u(\theta),\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta,\forall t\ge\tau.\tag{52}$$

现对于任意的 $s\le\tau$，设 $u_\star\in\ell^2,u(\theta)=U(\theta,s)u_\star$，其中 $\theta\in[\tau,t]$。由(52)式得

$$\Phi\left(U(t,s)u_\star\right)-\Phi\left(U(\tau,s)u_\star\right)=\int_\tau^t\left(\Phi'\left(U(\theta,s)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U(\theta,s)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta.\tag{53}$$

由(41)式和(42)式我们可以得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{LIM}_{\tau\to-\infty}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t\int_{\ell^2}\phi\left(U_1(t,\theta)u\right)\mathrm{d}\mu_\theta(u)\mathrm{d}\theta\\&=\mathrm{LIM}_{\tau\to-\infty}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)\mathrm{d}\theta=\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u).\end{aligned}\tag{54}$$

结合(54)式并运用 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned}&\int_{\ell^2}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)-\int_{\ell^2}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_\tau(u)=\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(\tau)}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)-\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(\tau)}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_\tau(u)\\&=\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(\tau)}\Phi\left(U(t,\tau)u\right)\mathrm{d}\mu_\tau(u)-\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(\tau)}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_\tau(u)\\&=\mathrm{LIM}_{M\to-\infty}\frac{1}{\tau-M}\int_M^\tau\int_{\ell^2}\left(\Phi\left(U(t,s)u_\star\right)-\Phi\left(U(\tau,s)u_\star\right)\right)\mathrm{d}\mu_s(u_\star)\mathrm{d}s\\&=\mathrm{LIM}_{M\to-\infty}\frac{1}{\tau-M}\int_M^\tau\int_{\ell^2}\int_\tau^t\left(\Phi'\left(U(\theta,s)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U(\theta,s)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mu_s(u_\star)\mathrm{d}s\\&=\mathrm{LIM}_{M\to-\infty}\frac{1}{\tau-M}\int_M^\tau\int_\tau^t\int_{\ell^2}\left(\Phi'\left(U(\theta,s)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U(\theta,s)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\mu_s(u_\star)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{55}$$

再由$\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$的不变性(见(41)和(42))得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\ell^2}\left(\Phi'\left(U(\theta,s)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U(\theta,s)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\mu_s(u_\star)\\
&=\int_{\ell^2}\left(\Phi'\left(U(\theta,\tau)U_1(\tau,s)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U(\theta,\tau)U(\tau,s)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\mu_s(u_\star)\\
&=\int_{\ell^2}\left(\Phi'\left(U(\theta,\tau)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U(\theta,\tau)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\mu_\tau(u_\star).
\end{aligned}
\tag{56}
$$

(56)式的右端与s无关，再次利用$\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$的不变性得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\ell^2}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)-\int_{\ell^2}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_\tau(u)\\
&=\int_\tau^t\int_{\ell^2}\left(\Phi'\left(U_1(\theta,\tau)u_\star\right),\mathcal{F}\left(U_1(\theta,\tau)u_\star,\theta\right)\right)\mathrm{d}\mu_\tau(u_\star)\mathrm{d}\theta\\
&=\int_\tau^t\int_{\ell^2}\left(\Phi'\left(u(\theta)\right),\mathcal{F}\left(u(\theta),\theta\right)\right)\mathrm{d}\mu_\theta(u)\mathrm{d}\theta,?\forall t\ge\tau.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

证明完毕。

根据定理5.1，我们得到下面的推论。

推论5.1： 设条件(H)成立，且$\Phi\in\mathcal{T}$满足$\Phi'(u)=0,u\in\ell^2$。则

$$
\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_t(u)=\int_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(t)}\Phi(u)\mathrm{d}\mu_\tau(u),\forall t\ge\tau.
\tag{58}
$$

值得指出的是，当$\Phi'(u)=0$时，统计物理中称系统达到其统计平衡点(见[18])，表明系统的统计信息不再随时间演化而发生变化。此时，(58)式表明，尽管拉回吸引子的截面$\mathcal{A}_{\mathcal{D}_\gamma}(\cdot)$的形状可随着时间的演化而变化，但是截面上的“总体积”(这里指关于测度的积分)是不变的。这正是统计力学中的Liouville定理(见[36])。本文研究表明，在含有杂质的Bose-Einstein浓缩模型中，Bose波函数在系统的拉回渐近行为中起主导作用，存在统计解且满足Liouville定理，而杂质波函数在整个系统的拉回渐近行为和统计解研究中起次要作用。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(项目编号：12371245)；浙江省自然科学基金重点项目(项目编号：LZ24A010005)。

参考文献

[1] Bourgain, J. (1999) Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/coll/046

[2] Bourgain, J. and Bulut, A. (2014) Almost Sure Global Well-Posedness for the Radial Nonlinear Schrödinger Equation on the Unit Ball II: The 3d Case. *Journal of the European Mathematical Society*, **16**, 1289-1325. https://doi.org/10.4171/jems/461

[3] Deng, Y., Nahmod, A.R. and Yue, H. (2020) Optimal Local Well-Posedness for the Periodic Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **384**, 1061-1107. https://doi.org/10.1007/s00220-020-03898-8

[4] Deng, Y., Nahmod, A. and Yue, H. (2024) Invariant Gibbs Measures and Global Strong Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations in Dimension Two. *Annals of Mathematics*, **200**, 399-486. https://doi.org/10.4007/annals.2024.200.2.1

[5] Carvalho, A.N., Langa, J.A. and Robinson, J.C. (2013) Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems. Springer.

[6] Goubet, O. and Kechiche, W. (2010) Uniform Attractor for Non-Autonomous Nonlinear Schrödinger Equation. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **10**, 639-651. https://doi.org/10.3934/cpaa.2011.10.639

[7] 杨新波，赵才地，贾晓琳. 自治耦合格点非线性Schrödinger方程组的一致吸引子及熵的估计[J]. 数学物理学报, 2013, 33(4): 636-645.

[8] Carroll, T.L. and Pecora, L.M. (1993) Cascading Synchronized Chaotic Systems. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **67**,

126-140. https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90201-b

[9] Firth, W.J. (1988) Optical Memory and Spatial Chaos. *Physical Review Letters*, **61**, 329-332. https://doi.org/10.1103/physrevlett.61.329

[10] Keener, J.P. (1987) Propagation and Its Failure in Coupled Systems of Discrete Excitable Cells. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **47**, 556-572. https://doi.org/10.1137/0147038

[11] Abdallah, A.Y. (2011) Uniform Exponential Attractors for First Order Non-Autonomous Lattice Dynamical Systems. *Journal of Differential Equations*, **251**, 1489-1504. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.05.030

[12] Bates, P.W., Lu, K. and Wang, B. (2014) Attractors of Non-Autonomous Stochastic Lattice Systems in Weighted Spaces. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **289**, 32-50. https://doi.org/10.1016/j.physd.2014.08.004

[13] Caraballo, T., Morillas, F. and Valero, J. (2012) Attractors of Stochastic Lattice Dynamical Systems with a Multiplicative Noise and Non-Lipschitz Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **253**, 667-693. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.03.020

[14] Caraballo, T., Morillas, F. and Valero, J. (2014) On Differential Equations with Delay in Banach Spaces and Attractors for Retarded Lattice Dynamical Systems. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **34**, 51-77. https://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.51

[15] Zhou, S. and Han, X. (2012) Pullback Exponential Attractors for Non-Autonomous Lattice Systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **24**, 601-631. https://doi.org/10.1007/s10884-012-9260-7

[16] Wang, X., Lu, K. and Wang, B. (2015) Exponential Stability of Non-Autonomous Stochastic Delay Lattice Systems with Multiplicative Noise. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **28**, 1309-1335. https://doi.org/10.1007/s10884-015-9448-8

[17] Zhou, S. (2017) Random Exponential Attractor for Cocycle and Application to Non-Autonomous Stochastic Lattice Systems with Multiplicative White Noise. *Journal of Differential Equations*, **263**, 2247-2279. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.03.044

[18] Foias, C., Manley, O., Rosa, R. and Temam, R. (2001) Navier-Stokes Equations and Turbulence. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511546754

[19] Foias, C. and Prodi, G. (1976) Sur les solutions statistiques des équations de Navier-Stokes. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **111**, 307-330. https://doi.org/10.1007/bf02411822

[20] Vishik, M.I. and Fursikov, A.V. (1979) Translationally Homogeneous Statistical Solutions and Individual Solutions with Infinite Energy of a System of Navier-Stokes Equations. *Siberian Mathematical Journal*, **19**, 710-729. https://doi.org/10.1007/bf00973601

[21] Bronzi, A.C., Mondaini, C.F. and Rosa, R.M.S. (2014) Trajectory Statistical Solutions for Three-Dimensional Navier-Stokes-Like Systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **46**, 1893-1921. https://doi.org/10.1137/130931631

[22] Bronzi, A.C., Mondaini, C.F. and Rosa, R.M.S. (2016) Abstract Framework for the Theory of Statistical Solutions. *Journal of Differential Equations*, **260**, 8428-8484. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.02.027

[23] Zhao, C., Li, Y. and Song, Z. (2020) Trajectory Statistical Solutions for the 3D Navier-Stokes Equations: The Trajectory Attractor Approach. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **53**, Article 103077. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.103077

[24] Zhao, C., Li, Y. and Caraballo, T. (2020) Trajectory Statistical Solutions and Liouville Type Equations for Evolution Equations: Abstract Results and Applications. *Journal of Differential Equations*, **269**, 467-494. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.12.011

[25] Zhao, C., Caraballo, T. and Łukaszewicz, G. (2021) Statistical Solution and Liouville Type Theorem for the Klein-Gordon-Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **281**, 1-32. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.01.039

[26] Jiang, H. and Zhao, C. (2021) Trajectory Statistical Solutions and Liouville Type Theorem for Nonlinear Wave Equations with Polynomial Growth. *Advances in Differential Equations*, **26**, 107-132. https://doi.org/10.57262/ade026-0304-107

[27] Zhao, C. and Zhuang, R. (2023) Statistical Solutions and Liouville Theorem for the Second Order Lattice Systems with Varying Coefficients. *Journal of Differential Equations*, **372**, 194-234. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.06.040

[28] Zhao, C. (2024) Absorbing Estimate Implies Trajectory Statistical Solutions for Nonlinear Elliptic Equations in Half-Cylindrical Domains. *Mathematische Annalen*, **391**, 1711-1730. https://doi.org/10.1007/s00208-024-02965-y

[29] Chekroun, M.D. and Glatt-Holtz, N.E. (2012) Invariant Measures for Dissipative Dynamical Systems: Abstract Results and Applications. *Communications in Mathematical Physics*, **316**, 723-761. https://doi.org/10.1007/s00220-012-1515-y

[30] Łukaszewicz, G., Real, J. and Robinson, J.C. (2011) Invariant Measures for Dissipative Systems and Generalised Banach Limits. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **23**, 225-250. https://doi.org/10.1007/s10884-011-9213-6

[31] Robinson, J.C. and Łukaszewicz, G. (2014) Invariant Measures for Non-Autonomous Dissipative Dynamical Systems.

Discrete and Continuous Dynamical Systems, **34**, 4211-4222. https://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.4211

[32] 李永军, 桑燕苗, 赵才地. 一阶格点系统的不变测度与 Liouville 型方程[J]. 数学物理学报, 2020, 40(2): 328-339.

[33] Zhao, C., Wang, J. and Caraballo, T. (2022) Invariant Sample Measures and Random Liouville Type Theorem for the Two-Dimensional Stochastic Navier-Stokes Equations. *Journal of Differential Equations*, **317**, 474-494. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.02.007

[34] Zhao, C., Xue, G. and Łukaszewicz, G. (2018) Pullback Attractors and Invariant Measures for Discrete Klein-Gordon-Schrödinger Equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, **23**, 4021-4044. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018122

[35] 邹天芳, 赵才地. 加权空间中一阶格点系统的统计解及其 Kolmogorov 熵[J]. 数学物理学报, 2023, 43(4): 1-17.

[36] 郑志刚, 胡岗. 从动力学到统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2016.