Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(5), 476-489**
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145276

Hans汉斯

时滞效应下多保险公司竞争的最优策略

张　鑫

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2025年4月28日；录用日期：2025年5月21日；发布日期：2025年5月30日

摘　要

保险是一种风险管理工具，通过支付保费，个人或企业可以将潜在的经济损失转移给保险公司。再保险则是保险公司为了分散自身风险而采取的一种策略。保险公司将其承保的部分风险转移给再保险公司，以减轻自身在重大损失事件中的财务压力。保险和再保险共同构成了风险管理的多层次体系，为社会经济的稳定运行提供了重要保障，所以对保险和再保险的研究具有重要的理论和实践意义。本研究聚焦于时滞效应下的最优再保险投资策略问题。研究内容主要为：在期望效用最大化准则下，多保险公司的最优再保险投资问题。首先金融市场由无风险资产和风险资产构成，其中风险资产的表达式服从Heston模型，并在时滞效应的框架下推导出保险公司的财富过程，随后针对n家保险公司参与的竞争模型，通过运用动态规划原理和随机最优控制理论，分别求解了n家保险公司的最优投资策略和最优再保险策略的解析解。

关键词

时滞效应，随机最优化控制，再保险，期望效用

Optimal Strategies for Multi-Insurance Company Competition under Time-Delay Effects

Xin Zhang

College of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Apr. 28th, 2025; accepted: May 21st, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

Insurance is a risk management tool that allows individuals or businesses to pass on potential financial losses to insurance companies by paying premiums. Reinsurance is a strategy adopted by

文章引用: 张鑫. 时滞效应下多保险公司竞争的最优策略[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 476-489.
DOI: 10.12677/aam.2025.145276

insurance companies to spread their own risks. Insurers transfer some of the risks they cover to reinsurers to relieve their own financial stress in the event of a major loss. Insurance and reinsurance together constitute a multi-level system of risk management, which provides an important guarantee for the stable operation of social economy, so the study of insurance and reinsurance has important theoretical and practical significance. This study focuses on the optimal reinsurance investment strategy under the time-lag effect. The research content mainly includes the optimal reinsurance-investment problem for multiple insurance companies under the expected utility maximization criterion. Firstly, the financial market consists of a risk-free asset and a risky asset, where the dynamics of the risky asset follow the Heston model. The wealth process of the insurance company is derived under the framework of time-delay effects. Subsequently, for the competitive model involving *n* insurance companies, the explicit solutions for the optimal investment strategies and optimal reinsurance strategies of the *n* insurance companies are derived by applying the dynamic programming principle and stochastic optimal control theory.

Keywords

Time-Delay Effect, Stochastic Optimal Control, Reinsurance, Expected Utility

1. 引言

保险企业作为面向市场，向社会提供保险服务的经营组织，同样面临着市场风险，再保险是降低理赔风险的有效方式，而投资则是最常见的财富增值方式。随着保险业的蓬勃发展，再保险业也越来越壮大。

自从 Borch [1]有关再保险的开创性研究问世以来，最优再保险问题已成为学术界广泛关注的焦点，相关研究文献不断涌现。在经济全球化快速发展的今天，保险公司普遍存在横向比较倾向，往往通过与其他保险公司的财务指标对比来评估自身的经营状况和发展水平。Hopkins [2]的研究指出，个体的绩效不仅受自身财富水平的影响，还在很大程度上取决于他人的财富水平，这一现象被称为相对绩效。因此，相对绩效已成为衡量竞争水平的重要标准，而博弈论为深入探究再保险市场中参与者的决策行为提供了坚实的理论基础和方法支撑，保险公司之间的博弈问题已经成为当下的热点。Bensoussan 等[3]应用动态规划技术研究了制度转换架构下的非零和再保险投资博弈问题，Wang 等[4]研究了当两家保险公司的盈余受到不同风险控制时的最优再保险问题。Chen 等[5]研究了两家保险业务相同，但财富和风险偏好不同的保险公司之间的最优保险投资博弈，根据建立数值函数的强对偶关系，提出了一种计算纳什均衡策略的封闭式解决方案。

保险公司和再保险公司的策略可能涉及保费定价、风险分担比例等，在考虑时滞效应的情况下，这些基本概念需要相应扩展，以探讨时滞对决策行为和均衡结果的影响。Elsanousi 等[6]为采用动态规划原理或最大值原理来解决这类问题提供了理论基础。阿春香[7]在 CEV 模型下考虑了时滞最优投资与比例再保险问题，Mao 等[8]研究了金融期权估值中的时滞几何布朗运动。

本研究基于时滞效应理论，探讨了保险公司之间以及与再保险公司之间的最优再保险投资策略问题。首先保险公司的索赔过程可由带漂移的布朗运动来近似刻画，其投资组合包含无风险资产和服从 Heston 随机波动模型的风险资产，在考虑时滞效应的前提下，构建了一个包含 n 家竞争性保险公司的市场模型，

并在期望效用最大化准则下，通过动态规划方法求解了保险公司的最优投资策略和再保险策略的解析解。

2. 模型假设

设$\left(\Omega,\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T},P\right)$是完备概率空间，过滤$\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$是右连续的且是$P$完备的，$P$是实际概率测度；$\mathcal{F}_t$是到$t$时间位置的可用信息，本文所有的随机过程都适应于$\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$。

2.1. 保险公司的盈余过程

首先假设在没有进行再保险以及投资的情况下，保险公司i的盈余过程为：

$$X_i(t)=x_0^i+p_it-\sum_{j=1}^{N_i(t)}M_j^i,$$

其中，$x_i^0\ge 0$为初始盈余；p_i为保险费率；M_j^i表示第j个索赔金额的大小，假设M_j^i期望为μ_{i1}，方差为μ_{i2}，$\{M_j^i,j=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机变量。每家保险公司都会有一些业务上的重叠，所以为了能体现出各家保险公司之间的相互作用关系，假设$N_i(t)=N(t)+N_i'(t)$，其中$N(t)$和$N_i'(t)$是相互独立的泊松过程，强度分别为$\lambda>0$和$\lambda_i>0$，所以$N_i(t)$为强度为$\lambda+\lambda_i$的泊松过程，并且假设$N_i(t)$和M_i^j是相互独立的。假设保险公司在收取保费时采用期望值保费准则进行保价，即保险费率$p_i=(1+\eta_i)(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}$，其中$\eta_i>0$表示保险公司$i$的安全负荷系数。

为了降低保险业务的风险，每家保险公司选择购买比例再保险。假设$u_i(t)$是再保险比例，在购买再保险的同时，按照期望值原则计算再保险费用，即保险公司i向再保险公司以$\delta_i(u_i(t))=(1+\theta_i)(1-u_i(t))(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}$的费率进行保费的支付，其中$\theta_i>0$为再保险公司的安全负荷系数，则保险公司$i$的盈余过程变为：

$$\mathrm{d}X_i(t)=(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\left[\eta_i-\theta_i+(1+\theta_i)u_i(t)\right]\mathrm{d}t-\mathrm{d}\left(u_i(t)\sum_{j=0}^{N_i(t)}M_j^i\right),$$

考虑用带漂移的布朗运动来近似累积索赔过程，即

$$\sum_{j=1}^{N_i(t)}M_j^i\approx(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}t-\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}W_i(t),$$

其中，$W_i(t)$是标准布朗运动，且任意两个标准布朗运动的相关系数为：

$$\rho_{im}=\frac{\lambda\mu_{i1}\mu_{m1}}{\sqrt{(\lambda+\lambda_i)(\lambda+\lambda_m)\mu_{i2}\mu_{im}}},$$

那么保险公司i的盈余过程变为：

$$\mathrm{d}X_i(t)=(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_iu_i(t)\right)\mathrm{d}t+u_i(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}\mathrm{d}W_i(t),\tag{1.1}$$

2.2. 金融市场

除了采用比例再保险策略外，保险公司还在由无风险资产和风险资产构成的金融市场中，来进一步进行风险分散和资产配置。无风险资产价格过程$\{B(t),t\in[0,T]\}$遵循以下的随机微分方程：

$$\mathrm{d}B(t)=rB(t)\mathrm{d}t,B(0)=b_0>0,$$

其中，r表示无风险利率。风险资产价格过程$\{S(t),t\in[0,T]\}$用 Heston 模型来描述：

$$\mathrm{d}S(t)=\left(r+\eta L(t)\right)S(t)\mathrm{d}t+\sqrt{L(t)}S(t)\mathrm{d}\overline{W_1}(t),S(0)=s_0,$$
$$\mathrm{d}L(t)=\kappa\left(\zeta-L(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W_2}(t),L(0)=l_0,$$

其中，$\eta>0,\kappa>0,\zeta>0,\sigma>0$ 且都为常数；$\overline{W_1}(t),\overline{W_2}(t)$ 是两个标准的布朗运动，$W_i(t)$ 与 $\overline{W_1}(t),\overline{W_2}(t)$ 是相互独立的，且 $\mathrm{cov}\left(\overline{W_1}(t),\overline{W_2}(t)\right)=\rho t$ 。

2.3. 保险公司的盈余

随机过程 $\pi_i:=\left\{\left(u_i(t),\alpha_i(t)\right)\right\}_{t\in[0,T]}$ 表示保险公司 i 的交易策略，$u_i(t)$ 表示再保险比例，$\alpha_i(t)$ 表示 t 时刻投资于风险资产的金额。$X_i^{\pi_i}(t)$ 是保险公司 i 在 t 时刻策略下的财富过程，$X_i^{\pi_i}(t)-\alpha_i(t)$ 为 t 时刻投资于无风险资产的金额。则在策略 $\pi_i(t)$ 下保险公司 i 的财富过程满足下列随机微分方程：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_i^{\pi_i}(t)&=\left[X_i^{\pi_i}(t)-\alpha_i(t)\right]\frac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)}+\alpha_i(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+dX_i(t)\\&=\left[X_i^{\pi_i}(t)-\alpha_i(t)\right]r\mathrm{d}t+\alpha_i(t)\left[\left(r+\eta L(t)\right)\mathrm{d}t+\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W_1}(t)\right]\\&\quad+\left[\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_iu_i(t)\right)\right]\mathrm{d}t+u_i(t)\sqrt{\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i2}}\mathrm{d}W_i(t)\\&=\left[rX_i^{\pi_i}(t)+\eta L(t)\alpha_i(t)+\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_iu_i(t)\right)\right]\mathrm{d}t\\&\quad+\alpha_i(t)\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W_1}(t)+u_i(t)\sqrt{\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i2}}\mathrm{d}W_i(t),\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 。

在保险公司的财富动态模型中，时滞效应是一个不可忽视的重要因素。由于保险公司的资金流入和流出通常受到历史业绩的显著影响，因此将时滞效应纳入保险公司的财富过程建模中显得尤为必要。令 $Y_i(t)$ 、$Z_i(t)$ 分别表示保险公司 i 在过去时间区间 $\left[t-h_i,t\right]$ 内的平均业绩和点业绩，其中

$$Y_i(t)=\int_{h_i}^{0}\mathrm{e}^{\delta_ih_i}X_i^{\pi_i}(t+s)\mathrm{d}s,$$
$$Z_i(t)=X_i^{\pi_i}(t-h_i),$$

其中，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，常数 $\delta_i>0$ 表示第 i 个保险公司的平均参数，常数是时滞参数，$\mathrm{e}^{-\delta_ih_i}$ 是指数衰减因子。保险公司财富过程中与历史业绩相关的资金流可以表示为：

$$f_i\left(t,X_i^{\pi_i(t)}-Y_i(t),X_i^{\pi_i}(t)-Z_i(t)\right),$$

其中，$X_i^{\pi_i}(t)-Y_i(t)$ 表示时间区间 $\left[t-h_i,t\right]$ 内的平均财富，$X_i^{\pi_i}(t)-Z_i(t)$ 表示时间区间 $\left[t-h_i,t\right]$ 内的绝对财富。良好的历史业绩不仅能够增强公司的市场信誉，吸引更多的客户和投资者，还能为公司带来更高的收益，从而为股东分红和资本积累提供支持，此时 $f_i>0$；相反，如果历史业绩表现不佳，保险公司可能面临资金短缺的风险，需要通过外部融资或调整经营策略来维持正常运营，此时 $f_i<0$。为了确保时滞控制问题能够获得解析解，参考 Deng 等[9]，假设资金流用线性函数表达式为：

$$\begin{aligned}&f_i\left(t,X_i^{\pi_i}(t)-Y_i(t),X_i^{\pi_i}(t)-Z_i(t)\right)\\&=A_i\left(X_i^{\pi_i}(t)-Y_i(t)\right)+B_i\left(X_i^{\pi_i}(t)-Z_i(t)\right)\\&=\left(A_i+B_i\right)X_i^{\pi_i}(t)-A_iY_i(t)-B_iZ_i(t),\end{aligned}\tag{1.3}$$

DOI: 10.12677/aam.2025.145276

其中，A_i 和 B_i 均为非负常数。将(1.3)代入保险公司 i 的财富过程(1.2)可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X_i^{\pi_i}(t) &= \left[X_i^{\pi_i}(t)-\alpha_i(t)\right]\frac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)}+\alpha_i(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+\mathrm{d}X_i(t) \\
&\quad - f_i\left(t,X_i^{\pi_i}(t)-Y_i(t),X_i^{\pi_i}(t)-Z_i(t)\right)\mathrm{d}t \\
&=\left[rX_i^{\pi_i}(t)+\eta L(t)\alpha_i(t)+p(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t)\right)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad +\alpha_i\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W}_1(t)+u_i(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}\mathrm{d}W_i(t) \\
&\quad -\left((A_i+B_i)X_i^{\pi_i}(t)-A_iY_i(t)-B_iZ_i(t)\right)\mathrm{d}t \\
&=\left[\eta L(t)\alpha_i(t)+(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t)\right)+C_iX_i^{\pi_i}(t)+A_iY_i(t)\right. \\
&\quad \left.+B_iZ_i(t)\right]\mathrm{d}t+\alpha_i(t)\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W}_1(t)+u_i(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}\mathrm{d}W_i(t),
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

其中，$C_i=(r-A_i-B_i), i\in\{1,2,\cdots,n\}$。

此外，假设保险公司 i 在 $-h_i$ 时刻已经拥有了财富 x_i^0，即当 $t\in[-h_i,0]$ 时，$X_i^{\pi_i}=x_i^0>0$。通过简单计算可得 $Y_i^0=\dfrac{x_i^0\left(1-\mathrm{e}^{-\delta_i h_i}\right)}{\delta_i}$。

定义 1.1 (可行策略)对于任意的 $t\in[0,T]$，如果策略 $\pi_i:=\left\{\left(u_i(t),\alpha_i(t)\right)\right\}$ 满足以下条件，那么就被称为可行策略：

1) $\left(u_i(t),\alpha_i(t)\right)$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 可测的；

2) $\forall t\in[0,T]$，$u_i(t)\in[0,1]$ 且满足 $E\left[\int_0^T u_i^2(t)\mathrm{d}t\right]<+\infty$，且 $E\left[\int_0^T \alpha_i^2(t)\mathrm{d}t\right]<+\infty$；

3) $\forall \pi_i(t)$，随机微分方程(1.4)有唯一的解。

对于初始条件记 $\Pi=\Pi_1\times\Pi_2\times\cdots\times\Pi_n$ 为所有可行策略的集合，其中 Π_i 表示保险公司 i 的可行策略集合。

2.4. 多家保险公司的竞争模型

在激烈的市场竞争中，保险公司往往会将自己的业绩与其他公司进行对比，每家保险公司除了关注自身的最终财富，还会注意与其他公司之间的差异。所以本文用相对财富来描述保险公司之间的竞争行为，保险公司 i 能够根据其他保险公司的表现动态调整策略，从而更灵活地应对市场变化，优化自身的资源配置。对于第 i 家保险公司，将其竞争对手的平均财富定义为：

$$
\overline{X}_i^{(\pi_m)_{m\neq i}}(t):=\frac{1}{n-1}\sum_{m=1,m\neq i}^{n}X_m^{\pi_m}(t)=\frac{1}{n-1}\sum_{m\neq i}X_m^{\pi_m}(t),
$$

用 $\hat{X}_i^{\pi_i,(\pi_m)_{m\neq 1}}$ 表示第 i 家保险公司相对财富过程，其表达式如下：

$$
\hat{X}_i^{\pi_i,(\pi_m)_{m\neq 1}}=(1-\tau_i)X_i^{\pi_i}(t)+\tau_i\left(X_i^{\pi_i}(t)-\overline{X}_i^{(\pi_m)_{m\neq i}}(t)\right), \tag{1.5}
$$

其中，τ_i 表示保险公司 i 对其他保险公司的财富敏感程度，τ_i 越大表示保险公司 i 对其他保险公司的财富越敏感，结合(1.4)和(1.5)，并对 $\hat{X}_i^{\pi_i,(\pi_m)_{m\neq 1}}$ 使用伊藤公式可得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{X}_i^{\pi_i,(\pi_m)_{m\neq 1}} = & \Bigg[\eta L(t)\alpha_i(t)+(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t))-\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\Big(\eta L(t)\alpha_m(t) \\
& +p_m-c_m(1-u_m(t))-u_m(t)(\lambda+\lambda_m)\mu_{m1}\Big)+C_i X_i^{\pi_i}(t)+A_i Y_i(t)+B_i Z_i(t) \\
& -\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\Big(C_m X_m^{\pi_m}(t)+A_m Y_m(t)+B_m Z_m(t)\Big)\Bigg]\mathrm{d}t+\alpha_i(t)\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W}_1(t) \\
& -\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\alpha_m(t)\sqrt{L(t)}\mathrm{d}\overline{W}_1(t)+u_i(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}\mathrm{d}W_i(t) \\
& -\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}u_m(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_m)\mu_{m2}}\mathrm{d}W_m(t),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

在保险公司的财富动态分析中，历史经营业绩被视为关键影响因素之一，假设保险公司 i 同时关注终端财富 $X_i^{\pi_i}(T)$ 和时间段 $[T-h_i,T]$ 内的平均财富 $Y_i(T)$，即考虑 $X_i^{\pi_i}(T)+\omega_i Y_i(T)$，其中 ω_i 是权重系数，该系数反映了平均财富对终端财富的影响程度。保险公司 i 的最终目标是寻找最优再保险投资策略最大化 T 时刻相对于其他保险公司的相对财富的预期效用，即最大化目标函数

$$
V_i^{\pi_i}(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l)=E_{t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l}\left[U_i\left(X_i^{\pi_i}(T)+\omega_i Y_i(T)-\tau_i\left(\overline{X}_i^{(\pi_m)_{m\neq i}}(T)+\overline{Y}_{m_{(m\neq i)}}(T)\right)\right)\right],
\tag{1.7}
$$

其中，$U(.)$ 是保险公司 i 的效用函数，$\overline{Y}_{m_{(m\neq i)}}(T)=\dfrac{1}{n-1}\sum_{m\neq i}\omega_i Y_m(T)$，$E_{t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y},l}[.]$ 表示给定 $\left\{X_i^{\pi_i}(t)=x_i,\overline{X}_i^{(\pi_m)_{m\neq i}}(t)=\overline{x}_i,Y_i(t)=y_i,\overline{Y}(t)=\overline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),L(t)=l\right\}$ 下的条件数学期望。

非零和博弈问题 n 家保险公司之间的博弈问题是寻找到一个均衡策略 $(\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_n^*)\in\Pi_1\times\Pi_2\times\cdots\times\Pi_n$，对于任意的 $(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)\in\Pi_1\times\Pi_2\times\cdots\times\Pi_n$，满足

$$
\begin{gathered}
V_1^{\pi_1,\pi_2^*,\cdots,\pi_n^*}(t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y}_j,s)\leq V_1^{\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_n^*}(t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y}_j,s), \\
V_2^{\pi_1^*,\pi_2,\cdots,\pi_n^*}(t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y}_j,s)\leq V_2^{\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_n^*}(t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y}_j,s), \\
\vdots \\
V_n^{\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_n}(t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y}_j,s)\leq V_n^{\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_n^*}(t,x_i,\overline{x}_j,y_i,\overline{y}_j,s).
\end{gathered}
$$

2.5. 模型求解

假设保险公司 i 满足指数效用函数，即对于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，令

$$
U_i(x)=-\frac{1}{\gamma_i}\mathrm{e}^{-\gamma_i x},
\tag{1.8}
$$

其中，$\gamma_i>0$ 为保险公司 i 的风险厌恶系数。通过随机控制理论，定义第 i 家保险公司的值函数为：

$$
\begin{aligned}
& J_i(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l) \\
& =\max_{\pi_i\in\Pi_i}E_{t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l}\left[U_i\left(X_i^{\pi_i}(T)+\omega_i Y_i(T)-\tau_i\left(\overline{X}_i^{(\pi_m)_{m\neq i}}(T)+\overline{Y}_{m_{(m\neq i)}}(T)\right)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

对于保险公司 i，定义微分算子为：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{\pi_i} J_i\left(t,\hat{x}_i,y_i,\bar{y},l\right)\\
=&\frac{\partial J_i}{\partial t}+\frac{\partial J_i}{\partial \hat{x}_i}\Big[\eta l\alpha_i(t)+(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t)\right)-\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\big(\eta l\alpha_m(t)\\
&+(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t)\right)\big)+C_i x_i+A_i y_i+B_i z_i-\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\big(C_m x_m\\
&+A_m y_m+B_m z_m\big)\Big]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2}\Bigg[\alpha_i(t)^2 l+\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2 l\sum_{m\neq i}\alpha_m(t)^2-2l\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\alpha_i(t)\alpha_m(t)\\
&+u_i(t)^2(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}+2\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2 l\sum_{1\le k,m\le n,k\neq m\neq i}\alpha_k(t)\alpha_m(t)+\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2\sum_{m\neq i}u_m(t)^2\big(\lambda\\
&+\lambda_m\big)\mu_{m2}-2u_i(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\rho_{im}u_m(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_m)\mu_{m2}}\\
&+2\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2\sum_{1\le k,m\le n,k\neq m\neq i}\rho_{km}u_k(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_k)\mu_{k2}}u_m(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_m)\mu_{m2}}\Bigg]\\
&+\frac{\partial J_i}{\partial y_i}\left(x_i-\delta_i y_i-\mathrm{e}^{-\delta_i h_i}z_i\right)+\sum_{m\neq i}\frac{\partial J_i}{\partial y_m}\left(x_m-\delta_m y_m-\mathrm{e}^{-\delta_m h_m}z_m\right)+\frac{\partial J_i}{\partial l}\kappa(\zeta-l)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_i}{\partial l^2}\sigma^2 l+\frac{\partial J_i}{\partial \hat{x}_i\partial l}\left(\rho\sigma l\rho\sigma l-\frac{\tau_i}{n-1}\rho\sigma l\sum_{m\neq i}\alpha_m(t)\right),
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

其中，$\frac{\partial J_i}{\partial t},\frac{\partial J_i}{\partial \hat{x}_i},\frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2},\frac{\partial J_i}{\partial y_i},\frac{\partial J_i}{\partial y_m},\frac{\partial J_i}{\partial l},\frac{\partial^2 J_i}{\partial l^2},\frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i\partial l}$ 为 $J_i\left(t,\hat{x}_i,y_i,\bar{y},l\right)$ 的导数。

根据动态规划原理，可以推导出 HJB 方程：

$$
\sup_{\pi_i\in\Pi_i}\mathcal{A}^{\pi_i}J_i\left(t,\hat{x}_i,y_i,\bar{y},l\right)=0,
\tag{1.11}
$$

由于考虑时滞的最优控制问题通常属于无限维问题，因此要获得解析形式的最优解，必须附加一些额外的约束条件

$$
B_i=\omega_i\mathrm{e}^{-\delta_i h_i},i\in\{1,2,\cdots,n\},
\tag{1.12}
$$

$$
A_i\mathrm{e}^{-\delta_i h_i}=\left(\delta_i+A_i+\omega_i\right)C_i,i\in\{1,2,\cdots,n\},
\tag{1.13}
$$

由 $C_i=r-A_i-B_i$ 可得

$$
C_i=\frac{1}{1+\omega_i}\left[r-\left(\delta_i+\omega_i\right)\omega_i-\omega_i\mathrm{e}^{-\delta_i h_i}\right].
$$

并需要假设 $C_i+\omega_i=C_m+\omega_m$。

假设值函数的解的形式为：

$$
J_i\left(t,\hat{x}_i,y_i,\bar{y},l\right)=-\frac{1}{\gamma_i}\mathrm{e}^{-\gamma_i\phi_i(t)\left(\hat{x}_i+\omega_i y_i-\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\omega_m y_m\right)+G_i(t,l)},
\tag{1.14}
$$

对(1.14)分别求偏导可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial J_i}{\partial t}=J_i\left[\left(-\gamma_i\right)\left(\hat{x}_i+\omega_i y_i-\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\omega_m y_m\right)\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}t}\right],\\
&\frac{\partial J_i}{\partial \hat{x}_i}=J_i\left(-\gamma_i\right)\phi_i,\frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2}=J_i\left[\left(-\gamma_i\right)\phi\right]^2,\frac{\partial J_i}{\partial y_i}=J_i\left(-\gamma_i\right)\phi_i\omega_i,\\
&\frac{\partial J_i}{\partial y_m}=J_i\left(-\gamma_i\right)\phi_i\omega_m,\frac{\partial J_i}{\partial l}=J_i\left(-\gamma_i\right)\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l},\\
&\frac{\partial^2 J_i}{\partial l^2}=J_i\left[\left(-\gamma_i\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l}\right)^2+\left(-\gamma_i\right)\frac{\mathrm{d}^2G_i}{\mathrm{d}l^2}\right],\\
&\frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i\partial l}=J_i\left(-\gamma_i\right)\phi_i\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l},
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

将上述所求偏导代入(1.10)可得

$$
\begin{aligned}
&\gamma_i x_i\left(\frac{\mathrm{d}\phi_i(t)}{\mathrm{d}t}+C_i\phi_i(t)+\omega_i\phi_i(t)\right)+\frac{\gamma_i\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}x_m\left(-\frac{\mathrm{d}\phi_m(t)}{\mathrm{d}t}-C_m\phi_m(t)-\omega_m\phi_m(t)\right)\\
&+\gamma_i y_i\left(\frac{\mathrm{d}\phi_i(t)}{\mathrm{d}t}+A_i\phi_i(t)-\omega_i\phi_i(t)\right)+\frac{\gamma_i\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}y_m\left(\frac{\mathrm{d}\phi_m(t)}{\mathrm{d}t}+A_m\phi_m(t)-\omega_m\phi_m(t)\right)\\
&+\gamma_i\phi_i(t)z_i\left(B_i-\omega_i\mathrm{e}^{-\delta_i h_i}\right)+\gamma_i\phi_i(t)\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}z_m\left(B_m-\omega_m\mathrm{e}^{-\delta_m h_m}\right)+\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}t}\\
&+\gamma_i\phi_i(t)\Big[\eta l\alpha_i(t)+\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t)\right)-\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\Big(\eta l\alpha_m(t)\\
&+\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i1}\left(\eta_i-\theta_i+\theta_i u_i(t)\right)\Big)\Big]+\frac{1}{2}\left(-\gamma_i\right)^2\phi_i(t)^2\Bigg[\alpha_i(t)^2 l+\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2 l\sum_{m\neq i}\alpha_m(t)^2\\
&-2l\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\alpha_i(t)\alpha_m(t)+u_i(t)^2\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i2}+2\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2 l\sum_{1\le k,m\le n,k\neq m\neq i}\alpha_k(t)\alpha_m(t)\\
&+\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2\sum_{m\neq i}u_m(t)^2\left(\lambda+\lambda_m\right)\mu_{m2}-2u_i(t)\sqrt{\left(\lambda+\lambda_i\right)\mu_{i2}}\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\rho_{im}u_m(t)\sqrt{\left(\lambda+\lambda_m\right)\mu_{m2}}\\
&+2\left(\frac{\tau_i}{n-1}\right)^2\sum_{1\le k,m\le n,k\neq m\neq i}\rho_{km}u_k(t)\sqrt{\left(\lambda+\lambda_k\right)\mu_{k2}}u_m(t)\sqrt{\left(\lambda+\lambda_m\right)\mu_{m2}}\Bigg]\\
&+\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l}\kappa(\zeta-l)+\left[\left(\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2G_i}{\mathrm{d}l^2}\right]\sigma^2 l+\left(-\gamma_i\right)\phi_i(t)\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l}\left(\rho\sigma l\rho\sigma l-\frac{\tau_i}{n-1}\rho\sigma l\sum_{m\neq i}\alpha_m(t)\right)=0,
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

由 $C_i+\omega_i=C_m+\omega_m$ 以及边界条件 $\phi_i(T)=1$，通过分离变量可以求得

$$
\phi_i(t)=\mathrm{e}^{(C_i+\omega_i)(T-t)}.
\tag{1.17}
$$

分别对(1.11)关于 $\alpha_i(t),u_i(t)$ 求一阶导可得

$$
\begin{aligned}
\alpha_i^*(t)&=-\frac{\dfrac{\partial J_i}{\partial \hat{x}_i}\eta-\dfrac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2}\left(\dfrac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\alpha_m^*(t)\right)+\dfrac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i\partial l}\rho\sigma}{\dfrac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2}}\\
&=\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\alpha_m^*(t)+\frac{1}{\gamma_i\phi_i(t)}\left(\eta+\rho\sigma\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}l}\right),
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

$$u_i^*(t) = -\frac{\frac{\partial J_i}{\partial \hat{x}_i}\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\theta_i\right] - \frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2}\sqrt{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}}\frac{\tau_i}{n-1}\sum_{m\neq i}\rho_{im}u_m(t)\sqrt{(\lambda+\lambda_m)\mu_{m2}}}{\frac{\partial^2 J_i}{\partial \hat{x}_i^2}(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}} \tag{1.19}$$

$$= \frac{\tau_i}{n-1}\frac{\lambda\mu_{i1}\sum_{m\neq i}\mu_{m1}u_m^*(t)}{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}} + \frac{1}{\gamma_i\phi_i(t)}\frac{\mu_{i1}\theta_i}{\mu_{i1}},$$

为了解出方程(1.19)，首先做出如下变形，

$$(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2}u_i^*(t) - \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}\sum_{m\neq i}\mu_{m1}u_m^*(t) = \frac{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\theta}{\gamma_i\phi_i}, \tag{1.20}$$

通过化简可得

$$u_i^*(t) - \frac{\frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}u_i^*(t)}{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2} = \frac{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\theta}{\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2\right]\gamma_i\phi_i}, \tag{1.21}$$

为了方便表达，令

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}}{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2},$$

则将方程(1.21)两边同时乘以 μ_{i1} 并将 i 从 1 到 n 相加得到

$$(1-\psi_n)\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}u_i^*(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\theta}{\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2\right]\gamma_i\phi_i}, \tag{1.22}$$

方程(1.22)可化简为：

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_{i1}u_i^*(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\theta}{\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2\right]\gamma_i\phi_i}}{(1-\psi_n)}, \tag{1.23}$$

代入(1.21)可得

$$u_i^*(t) = \frac{\Lambda_{i1} + \Lambda_{i2}}{\gamma_i\phi_i}, \tag{1.24}$$

其中，

$$\Lambda_{i1} = \frac{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\theta}{\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2\right]}, \tag{1.25}$$

$$\Lambda_{i2} = \frac{\frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\lambda_i)\mu_{i1}\mu_{i2}\theta}{\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2\right]}}{\left[(\lambda+\lambda_i)\mu_{i2} + \frac{\tau_i}{n-1}\lambda\mu_{i1}^2\right](1-\psi_n)}. \tag{1.26}$$

为了求出 $\alpha_i^*(t)$ 的表达式，假设 $G_i(t,l)$ 为：

$$G_i(t,l)=R_i(t)l+H_i(t), \tag{1.27}$$

通过对其求偏导可得

$$\frac{\mathrm{d}G_i(t,l)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}R_i(t)}{\mathrm{d}t}l+\frac{\mathrm{d}H_i(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}G_i(t,l)}{\mathrm{d}l}=R_i(t),\frac{\mathrm{d}^2G_i(t,l)}{\mathrm{d}l^2}=0, \tag{1.28}$$

将(1.18)、(1.19)、(1.28)代入并化简可以得到

$$\frac{\mathrm{d}R_i(t)}{\mathrm{d}t}+\eta\left(\eta+\rho\sigma R_i(t)\right)-R_i(t)\kappa+R_i(t)^2\sigma^2-\rho\sigma R_i(t)\left(\eta+\rho\sigma R_i(t)\right)=0, \tag{1.29}$$

通过求解(1.29)可以得到 $R_i(t)$ 的表达式为：

$$R_i(t)=\frac{\sqrt{\left(1-\rho^2\sigma^2\right)\eta^2-\frac{\kappa^2}{4}}}{\left(1-\rho^2\sigma^2\right)}\tan\left(\frac{t-T}{2}\sqrt{\$\left(1-\rho^2\sigma^2\right)\eta^2-\kappa^2}\right)+\frac{\kappa}{2\left(1-\rho^2\sigma^2\right)}, \tag{1.30}$$

由于本文仅关注于最优策略的分析，而未涉及值函数的讨论，因此关于 $H_i(t)$ 的求解在此不再赘述。可以采用与求解 $u_i^*(t)$ 相类似的方法，求出 $\alpha_i^*(t)$ 的表达式为：

$$\alpha_i^*(t)=\frac{\Delta\tau_i}{n-1+\tau_i}+\frac{n-1}{(n-1+\tau_i)\gamma_i\phi_i(t)}\left(\eta+\rho\sigma R_i(t)\right), \tag{1.31}$$

其中，Δ 的表达式为：

$$\Delta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{(n-1-\tau_i)\gamma_i\phi_i(t)}\left(\eta+\rho\sigma R_i(t)\right)}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{n-1+\tau_i}}. \tag{1.32}$$

定理 1.1 对于问题(1.11)可以得到最优再保险投资策略为：

$$\alpha_i^*(t)=\frac{\Delta\tau_i}{n-1+\tau_i}+\frac{n-1}{(n-1+\tau_i)\gamma_i\phi_i(t)}\left(\eta+\rho\sigma R_i(t)\right),$$
$$u_i^*(t)=\frac{\Lambda_{i1}+\Lambda_{i2}}{\gamma_i\phi_i}.$$

其中，$\Lambda_{i1},\Lambda_{i2},R_i(t),\Delta$ 分别由(1.25)、(1.26)、(1.30)、(1.32)给出。

定理 1.2 (验证定理)对于 HJB 方程，如果 $J_i^*(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l)$ 是 HJB 方程(1.11)的解，最优策略为定理 1.1 所给出的策略，则对任意的可允许策略 $\pi_i^*(t)=\left(u_i^*(t),\alpha_i^*(t)\right)\in\Pi_i$ 有

$$J_i(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l)\le J_i^*(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l),$$

那么当策略为定理 1.1 所给出的最优策略时，

$$J(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l)=J_i^*(t,\hat{x}_i,y_i,\overline{y},l).$$

该定理的证明与 Bai 和 Guo [10]类似，在此省略。

2.6. 灵敏度分析

在这一节中，以两家保险公司为例，给出一些数值算例分析模型中的参数对最优策略的影响。主要参数取值如下：

$$r=0.03,\gamma_1=0.3,\gamma_2=0.8,\eta=0.05,\kappa=2,\varsigma=0.1,\sigma=1.5,\mu_{11}=1.1,$$
$$\mu_{12}=1.1,\mu_{21}=0.8,\mu_{21}=0.7,\tau_1=0.3,\tau_2=0.4,\theta_1=1,\theta_1=1.2,\delta_1=0.1,$$
$$\delta_2=0.1,\omega_1=0.03,\omega_2=0.03,h_1=2,h_2=3,t=0,T=10.$$

下面分析一些参数对于最优策略的影响。

根据图 1 和图 2 可以观察到，随着 ω_i 的增大，再保险比例与投资金额减小。当 ω_i 越大时，保险公司的历史业绩对终端财富的影响也越大，保险公司会减少再保险的比例来减少购买再保险对自身终端财富的影响；相应地，当 ω_i 越大时，历史业绩带来的风险也会越大，为了降低风险，进而保险公司会减少对风险资产的投资。

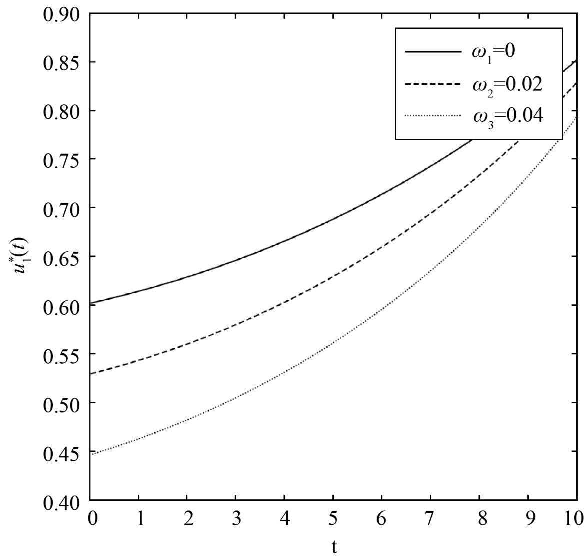

Figure 1. Impact of weighting coefficient on reinsurance
图 1. 权重系数对再保险的影响

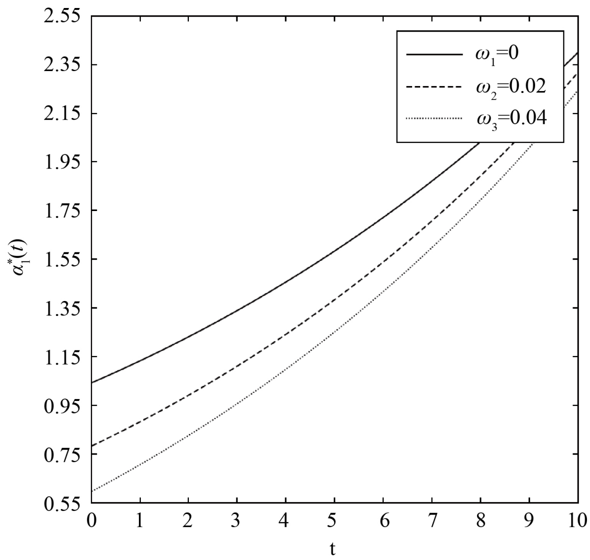

Figure 2. Impact of weighting coefficient on investment strategy
图 2. 权重系数对投资的影响

根据图 3 和图 4 可以看出，在 δ_i 越大时，自留比例和投资金额越来越小，这与上面的分析类似，越多的资金流会造成保险公司面临的风险越大，保险公司为了在市场中寻求更高的效益，会通过调整再保险比例和投资策略来降低自身的风险。

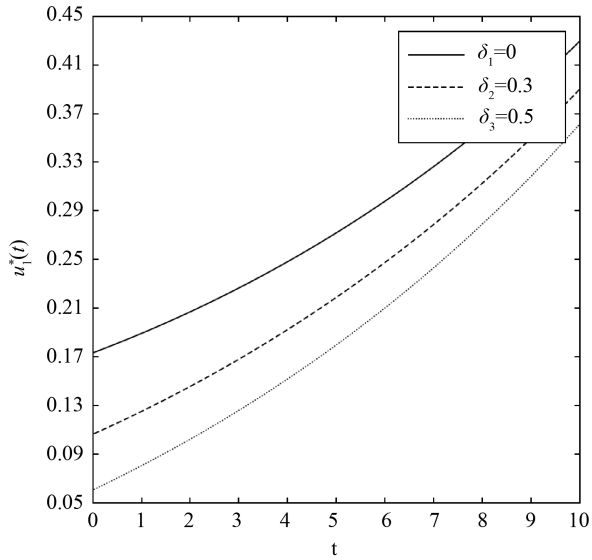

Figure 3. Impact of mean parameter on reinsurance
图 3. 平均参数对再保险的影响

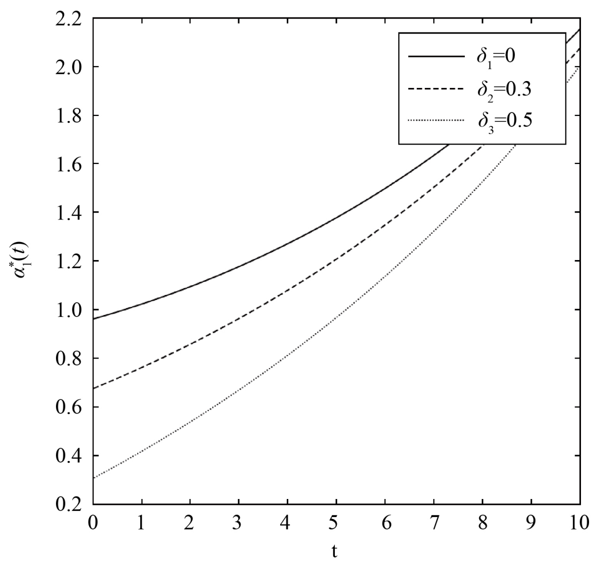

Figure 4. Impact of mean parameter on investment strategy
图 4. 平均参数对投资的影响

根据图 5 和图 6 可知，在 τ_i 一定时，保险公司的自留比例和对风险资产的投资会随着风险厌恶系数 γ_i 的增加而减少，这意味着保险公司会通过增大再保险的比例以及减少对风险资产的投资来规避风险。在 γ_i 一定时，保险公司的自留比例和对风险资产的投资会随着竞争系数 τ_i 的增加而减少，这说明保险公司会扩大再保险的比例以及减少对风险资产的投资，为了在与其他保险公司的竞争中取得更大的优势。

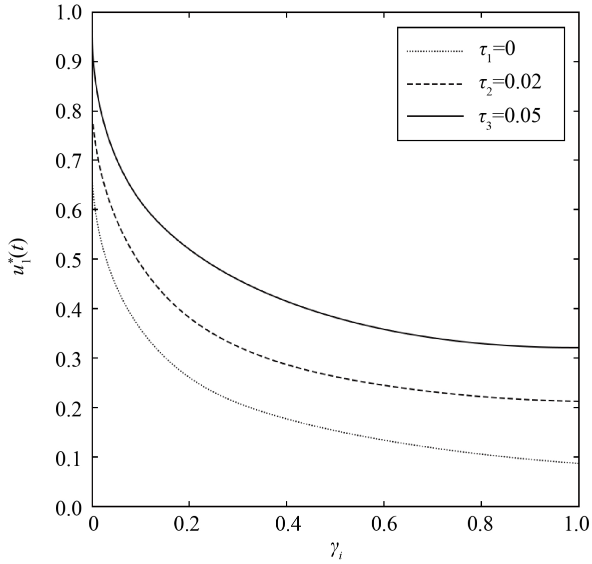

Figure 5. Impact of wealth sensitivity coefficient on reinsurance
图 5. 财富敏感系数对再保险的影响

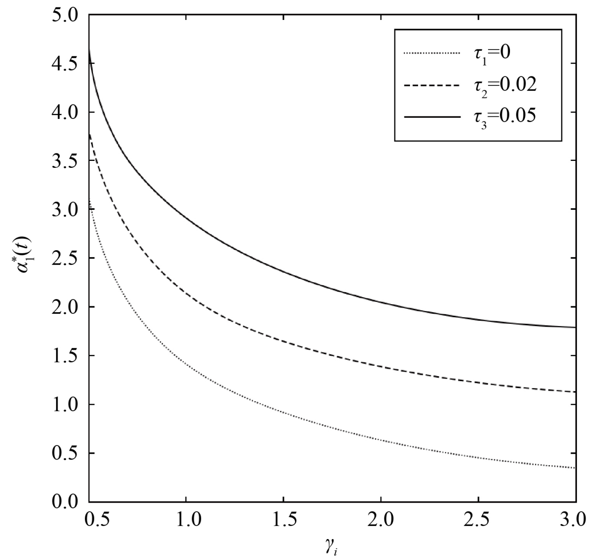

Figure 6. Impact of wealth sensitivity coefficient on investment strategy
图 6. 财富敏感系数对投资的影响

3. 结论与展望

本文给出了在时滞效应下多个保险公司的竞争模型，在最大化期望效用的准则下研究了多个保险公司的竞争问题，保险公司的盈余由近似扩散模型所表示，可以将盈余投入到无风险资产以及由 Heston 模型所描述的风险资产中，再将历史业绩考虑进去，并给出与现实更贴近的多人竞争下的保险公司财富过程模型，通过求解 HJB 方程得到非零和博弈下的最优再保险以及投资策略。

本文有些地方的内容还可以进行扩展，比如将求解最大化期望效用换成均值方差准则下考虑最优问题，本研究只将保险公司之间的竞争考虑了进去而没有将再保险公司的竞争考虑进去等。

参考文献

[1] Borch, K. (1960) Reciprocal Reinsurance Treaties Seen as a Two-Person Co-Operative Game. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1960**, 29-58. https://doi.org/10.1080/03461238.1960.10410597

[2] Hopkins, E. (2008) Inequality, Happiness and Relative Concerns: What Actually Is Their Relationship? *The Journal of Economic Inequality*, **6**, 351-372. https://doi.org/10.1007/s10888-008-9081-4

[3] Bensoussan, A., Siu, C.C., Yam, S.C.P. and Yang, H. (2014) A Class of Non-Zero-Sum Stochastic Differential Investment and Reinsurance Games. *Automatica*, **50**, 2025-2037. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.05.033

[4] Wang, N., Zhang, N., Jin, Z. and Qian, L. (2021) Stochastic Differential Investment and Reinsurance Games with Nonlinear Risk Processes and VaR Constraints. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **96**, 168-184. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.11.004

[5] Chen, D., Lu, Z. and He, Y. (2023) Optimal Reinsurance-Investment Game for Two Insurers with SAHARA Utilities under Correlated Markets. *The North American Journal of Economics and Finance*, **68**, Article ID: 101949. https://doi.org/10.1016/j.najef.2023.101949

[6] Elsanosi, I., Øksendal, B. and Sulem, A. (2000) Some Solvable Stochastic Control Problems with Delay. *Stochastics and Stochastic Reports*, **71**, 69-89. https://doi.org/10.1080/17442500008834259

[7] 阿春香，邵仪. CEV 模型下时滞最优投资与再保险问题[J]. 运筹学学报, 2020, 24(1): 73-87.

[8] Mao, X. and Sabanis, S. (2012) Delay Geometric Brownian Motion in Financial Option Valuation. *Stochastics*, **85**, 295-320. https://doi.org/10.1080/17442508.2011.652965

[9] Deng, C., Bian, W. and Wu, B. (2019) Optimal Reinsurance and Investment Problem with Default Risk and Bounded Memory. *International Journal of Control*, **93**, 2982-2994. https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1573320

[10] Bai, L. and Guo, J. (2008) Optimal Proportional Reinsurance and Investment with Multiple Risky Assets and No-Shorting Constraint. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **42**, 968-975. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.11.002