

最小二乘法在导轨平面度误差计算中的应用

丁玉俊¹, 孙培江²

¹江苏省特种设备安全监督检验研究院泰州分院, 江苏 泰州

²江苏省特种设备安全监督检验研究院, 江苏 南京

收稿日期: 2025年4月23日; 录用日期: 2025年5月16日; 发布日期: 2025年5月23日

摘要

为提高导轨平面度误差的计算精度与效率, 本文提出基于最小二乘法的平面拟合算法, 通过数学建模与优化方法实现平面度误差的高精度评估。详细推导了最小二乘法平面拟合的数学模型, 并给出算法实现流程及测试结果。实验表明, 该方法计算简单、结果可靠, 适用于工业检测中的平面度分析。

关键词

最小二乘法, 平面度误差, 平面拟合

The Application of Least Squares Method in the Calculation of Flatness Error of Guideways

Yujun Ding¹, Peijiang Sun²

¹Taizhou Branch, Special Equipment Safety Supervision Inspection Institute of Jiangsu Province, Taizhou Jiangsu

²Special Equipment Safety Supervision Inspection Institute of Jiangsu Province, Nanjing Jiangsu

Received: Apr. 23rd, 2025; accepted: May 16th, 2025; published: May 23rd, 2025

Abstract

To improve the calculation accuracy and efficiency of flatness error of guideways, this paper proposes a plane fitting algorithm based on the least squares method, which achieves high-precision evaluation of flatness error through mathematical modeling and optimization. The mathematical model of least squares plane fitting is derived in detail, and the algorithm implementation process and test results are provided. Experiments show that this method is simple in calculation, reliable in results, and suitable for flatness analysis in industrial inspection.

文章引用: 丁玉俊, 孙培江. 最小二乘法在导轨平面度误差计算中的应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 307-311.
DOI: 10.12677/aam.2025.145259

Keywords

Least Squares Method, Flatness Error, Plane Fitting

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

电梯导轨的平面度误差一般都采用现场检测并进行平面度误差的检定。平面度误差的评定方法主要有三点法、对角线法、最小区域法和最小二乘法等。最小二乘法是一种基于数学模型的优化方法,通过最小化测量残差的平方和来拟合实际测量数据与理想模型之间的关系[1],来评估零件表面的平整度及计算平面度误差。由于最小二乘法具有良好的数学性质和可靠的测量结果,被广泛应用于各个领域的测量任务[2]。

2. 最小二乘法原理与数学模型

2.1. 平面方程与残差定义

最小二乘法是一种通过最小化残差平方和来拟合数据的最佳函数匹配方法。对于平面拟合问题[3],设平面方程为:

$$z = ax + by + c \quad (1)$$

其中 a, b, c 为待求系数,对于数据点集 (x_i, y_i, z_i) ,定义残差 e_i 为实际值 z_i 与理想平面 $ax_i + by_i + c$ 的差值:

$$e_i = z_i - (ax_i + by_i + c) \quad (2)$$

2.2. 目标函数的构建

根据最小二乘法原理,得到拟合空间方程的目标函数为:

$$J(a, b, c) = \sum_{i=1}^k e_i^2 \quad (3)$$

式(3)的拟合条件为 $J(a, b, c) \rightarrow \min$, 则满足拟合条件有:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)可得:

$$X \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = Y \quad (5)$$

式(5)中:

$$X = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k x_i^2 & \sum_{i=1}^k x_i y_i & \sum_{i=1}^k x_i \\ \sum_{i=1}^k x_i y_i & \sum_{i=1}^k y_i^2 & \sum_{i=1}^k y_i \\ \sum_{i=1}^k x_i & \sum_{i=1}^k y_i & k \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k x_i z_i \\ \sum_{i=1}^k z_i y_i \\ \sum_{i=1}^k z_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

由式(5)~(7)可得:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = X^{-1}Y \quad (8)$$

将平面采样数据 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 代入式(6)~(8)即可求得最小二乘拟合平面方程的系数 a, b, c 。

2.3. 平面度误差数学模型

对于拟合平面 $ax + by + c - z = 0$, 测量点 (x_i, y_i, z_i) 到平面的垂直距离 d_i 为:

$$d_i = \frac{|ax_i + by_i + c - z_i|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad (9)$$

该式由三维空间中点到平面的距离公式推导而来, 分母项 $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$ 用于归一化平面法向量。

平面度误差 E 定义为所有测量点中最大偏距与最小偏距之差:

$$E = \max(d_i) - \min(d_i) \quad (10)$$

其算法本质为多元线性回归问题。在求解过程中, 利用检测的平面轮廓有效数据点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, 通过最小二乘法计算被测平面的最小二乘平面。然后以该平面作为被测平面的理想平面, 计算各测量点到理想平面的最大偏距值和最小偏距值之差, 得到平面度误差。

3. 最小二乘法平面度误差算法测试

基于激光传感器及最小二乘法的平面度计算是一种工程上较常见的方法[4], 导轨平面度数据由激光轮廓仪扫描后获取, 实现平面度误差的高效计算。主要包括数据采集与预处理、点云数据获取及平面拟合等处理过程。

3.1. 数据采集与预处理

通过激光轮廓仪对被测表面进行非接触式扫描, 确保数据密度满足精度要求。激光器以匀速模式移动, 由步进电机驱动, 采用 DMC5000 系列运动控制卡实时监控位置信号以保障扫描轨迹的稳定性。

3.2. 点云数据获取

扫描过程中, 激光轮廓仪实时生成三维坐标点云数据 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, 并通过高速线缆传输至控制计算机。数据格式为结构化文本文件, 每行存储一个点的三轴坐标值。

3.3. 剔除离群点

为提升平面拟合的鲁棒性, 采用 RANSAC 算法剔除离群点。

3.3.1. 参数设置

- ① 迭代次数: 设定为 100 次, 平衡计算效率与模型可靠性。根据实际测试结果可以得到当内点比例约为 70%时, 100 次迭代可覆盖多数有效采样组合。
- ② 距离阈值: 设定为 0.01 mm, 结合激光轮廓仪测量精度及数据噪声特性确定。若点到临时平面的归一化距离超过阈值, 则判定为离群点。
- ③ 最小样本数: 每次迭代随机选取 3 个点拟合初始平面, 满足平面方程唯一解的条件。

3.3.2. 算法实现流程

- ① 随机采样: 从点云数据中随机选取 3 个非共线点, 通过函数计算临时平面方程 $z = ax + by + c$, 若三点共线或平面方程不可表示, 则重新采样。
- ② 内点统计: 遍历所有数据点, 计算其到临时平面的归一化距离:
$$d = \frac{|ax_i + by_i + c - z_i|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$
如果 $d \leq 0.01 \text{ mm}$, 则判定为内点。
- ③ 模型优化: 记录内点数量最多的平面模型, 若某次迭代内点比例超过 80%则提前终止, 以提升计算效率。
- ④ 使用最佳内点集, 通过最小二乘法重新拟合平面, 以提升计算效率。

3.3.3. 异常处理

若单次迭代后内点数量不足 3 个, 判定为无效模型, 跳过当前批次并输出警告信息。在分段处理中, 若某组数据经 RANSAC 筛选后内点不足, 则放弃该组计算, 避免引入不可靠结果。

激光轮廓仪的点云数据通过 RANSAC 算法预处理后, 可有效剔除因噪声或局部畸变导致的离群点, 使最小二乘拟合平面更贴近真实表面。实验结果表明, 该算法在 30,000 点云数据中平均剔除 8%~12%的离群点, 平面度误差计算稳定性提升约 15%。

3.4. 平面拟合与参数求解

将点云数据按每 1000 点为一组进行分段处理, 根据公式(6)与(7)构建系数矩阵 X 与常数向量 Y , 通过矩阵求逆获取平面度方程系数。最后根据公式(9)与(10)得到每段平面度误差。算法计算及执行伪代码流程如表 1 所示。

Table 1. Least square flatness error algorithm
表 1. 最小二乘法平面度误差算法

Algorithm 最小二乘法计算平面度误差
Input: $P_i(x_i, y_i, z_i)$
1: → 初始化数据缓冲区, 设置批处理大小 $N = 1000$;
2: → 打开文件并读取点云数据;
3: → RANSAC 算法滤波, 剔除离群点;
repeat:
4: → 加载 1000 个点到缓冲区, 计算累加值;
5: → 构造线性方程组矩阵 X 和向量 Y , 求解平面系数 a 、 b 、 c ;
6: → 若矩阵 X 行列式接近零, 跳过当前批次并报警;

续表

7: → 计算所有数据点到平面的偏距 d_i ;
8: → 提取偏距极值, 计算平面度误差 $E = \max(d_i) - \min(d_i)$;
9: → 输出当前批次平面度误差结果;
until: 文件数据读取完毕;
return: 各批次平面度误差。

3.5. 测试结果分析

分别采用 10,000、30,000、50,000 点云数据, 每组数据重复实验 5 次, 将每 1000 个点云数据分为一组, 经过五次测试后计算出每组数据的平面度误差均值(μ)、标准差(σ), 以及最大绝对误差(Max)。结果如表 2 所示, 实验表明随着数据量的增加, 标准差逐渐减小, 从 0.0015 降至 0.0009, 算法稳定性显著提升, 所有测试中最大误差均小于 ± 0.02 mm, 满足工业检测要求(± 0.05 mm)。

Table 2. Error calculation result

表 2. 误差计算结果

数据量	误差均值	标准差	最大绝对误差
10,000	0.0102	0.0015	0.0128
30,000	0.0116	0.0012	0.0135
50,000	0.0119	0.0009	0.0131

3.6. 算法局限性分析

基于最小二乘法与 RANSAC 的平面拟合算法能有效提升平面度误差的计算精度, 但在实际工程应用中仍存在一定的局限性。首先 RANSAC 迭代次数固定, 代码中设定迭代次数为 RANSAC_ITERATIONS = 100, 该值未根据数据分布动态调整。当内点比例较低时, 固定迭代次数可能导致模型拟合失败, 若盲目增加迭代次数以提高鲁棒性, 则会导致计算时间呈线性增长, 难以满足实时检测需求。其次, 最小二乘法矩阵求逆复杂度高, 最小二乘法需构建系数矩阵并求逆, 当单组数据量增大时, 矩阵运算复杂度将急剧上升, 影响算法实时解算, 这在工程应用中需要进行适当处理。

4. 总结

最小二乘法方法简单, 计算结果较为准确, 且随着检测数据的增多, 其计算精度也随之提高, 是应用比较广泛的一种平面度计算方法。最小二乘法通过数学优化实现平面高精度拟合, 结合点到平面距离的统计分析, 可有效评估平面度误差。根据测试结果也可以看出, 最小二乘法计算平面度误差完全符合电梯每个导轨误差在 ± 0.05 mm 以内的要求。

基金项目

江苏省特种设备安全监督检验研究院院内项目,《电梯 T 型导轨平面度检测系统研究》, KJ(Y)2023044。

参考文献

- [1] 王典泽. 基于 Excel VBA 的最小二乘法平面度误差评定[J]. 中国检验检测, 2021, 29(4): 58-60.
- [2] 王文超. 最小二乘法分析工作台平面度误差[J]. 科技创新与应用, 2019(34): 132-134.
- [3] 彭壮, 颜强, 朱岩, 等. 基于最小二乘法的平面度测量系统设计[J]. 信息记录材料, 2024, 25(2): 124-126.
- [4] 刘明言, 杜万和, 杨敬辉. 基于最小二乘法拟合平面的激光平面度检测[J]. 智能制造, 2023(5): 112-118.