Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(5), 284-290**
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145256

模糊厌恶下投资组合选择的静态比较

杨 潇

北方工业大学理学院，北京

收稿日期：2025年4月21日；录用日期：2025年5月13日；发布日期：2025年5月23日

摘 要

传统投资组合理论假设风险的概率分布已知，但现实中投资者往往面临“模糊性”——即概率分布本身未知的不确定性。从直觉上来说，更多的模糊厌恶会减少对不确定资产的需求，但事实并非总是如此。本文采用Klibanoff、Marinacci和Mukerji (2005)提出的“平滑模糊厌恶模型”，该模型通过区分模糊性与模糊态度，并分阶段应用期望效用理论——先对一阶分布计算期望效用，再对二阶信念进行加权。当函数ϕ为线性时，模型退化为标准期望效用理论；而当ϕ为凹函数时，则刻画了模糊厌恶行为，此时无法简化为单一复合分布。通过研究一个静态双资产(无风险资产 + 模糊性风险资产)组合问题，其中风险资产的收益率服从依赖连续未知参数θ的分布，在此框架下，本文推导出“增强模糊厌恶会降低风险资产需求”的充分条件，一个满足这些充分条件的例子是，当不确定资产回报的可能分布可以按照其单调似然比进行排序。研究结果揭示了模糊性在投资组合选择中的复杂作用，对不确定性下投资者行为的传统假设提出了挑战。

关键词

模糊厌恶，投资组合，平滑模糊厌恶模型，单调似然比

Static Comparative Analysis of Portfolio Selection under Ambiguity Aversion

Xiao Yang

College of Science, North China University of Technology, Beijing

Received: Apr. 21st, 2025; accepted: May 13th, 2025; published: May 23rd, 2025

Abstract

Traditional portfolio theory assumes that the probability distribution of risk is known, but in reality, investors often face “ambiguity”—uncertainty where the probability distribution itself is unknown.

文章引用: 杨潇. 模糊厌恶下投资组合选择的静态比较[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 284-290.
DOI: 10.12677/aam.2025.145256

Intuitively, greater ambiguity aversion would reduce demand for ambiguous assets, yet this is not always the case. This paper adopts the "smooth ambiguity aversion model" proposed by Klibanoff, Marinacci, and Mukerji (2005), which distinguishes between ambiguity (beliefs) and ambiguity attitude (preferences), and applies expected utility theory in two stages—first computing expected utility over first-order distributions, then weighting second-order beliefs. When the weighting function ϕ is linear, the model reduces to standard expected utility theory; when the function ϕ is concave, it captures ambiguity-averse behavior, precluding reduction to a single compound distribution. By studying a combination problem of static dual assets (risk-free asset + ambiguous risk asset) in which the rate of return of risk asset follows the distribution dependent on continuous unknown parameters θ, under this framework, this paper derives the sufficient condition that "enhanced fuzzy aversion reduces demand for risky assets". An example that meets these sufficient conditions is when the possible distribution of uncertain asset returns can be ranked according to its monotonic likelihood ratio. The findings reveal the complex role of ambiguity in portfolio selection and challenge traditional assumptions about investor behavior under uncertainty.

Keywords

Ambiguity Aversion, Portfolio, Smooth Ambiguity Aversion Model, Monotone Likelihood Ratio

1. 引言

金融市场一直是一个复杂多变、充满机遇和挑战的市场，市场中的投资总是伴随着风险和回报的权衡。高风险投资通常具有高回报潜力，但也可能导致重大损失。投资者需要通过多元化投资、风险管理和资产配置来平衡风险和回报。对金融市场进行理性分析，选择合适的预测模型、有效的风险管理和合理的资产配置，投资者可以在充满机遇和挑战的市场中实现稳健的投资回报。

在传统的投资组合选择问题中，投资者通常面对的是已知概率分布的风险。然而，现实中的投资者往往面临的是不确定性，即概率分布本身是不确定的。这种不确定性被称为“模糊性”(ambiguity)。模糊性的概念最早可追溯到 Knigh [1]在 1921 年的著作“Risk, Uncertainty, and Profit”中，Knigh 区分了风险和不确定性，结果未知，但概率分布已知(如掷骰子)被定性为风险，结果未知，且概率分布未知(如未来市场走势)被定性为不确定性也就是模糊性。Knigh 认为，模糊性是经济利润的来源，因为企业通过承担模糊性获得超额回报。模糊厌恶是指投资者在面对模糊性时，倾向于选择已知概率分布的风险，而不是未知概率分布的不确定性。近年来，模糊厌恶研究在理论和应用层面均取得了重要进展。理论方面，学者们拓展了模糊偏好的建模框架，如动态递归多先验模型和稳健控制方法(Hansen & Sargent, 2007) [2]，将模糊厌恶纳入连续时间金融分析。Klibanoff、Marinacci 和 Mukerji (2005) [3]的平滑模糊模型通过分离模糊性和模糊态度函数，为实证研究提供了更灵活的工具，并且有学者的统一框架进一步整合了不同建模范式。在应用研究方面，模糊厌恶理论成功解释了多个市场异象，包括股权溢价过高、无风险利率过低、本土投资偏好等现象。研究还发现，模糊厌恶会放大资产价格波动，导致收益分布呈现偏态特征。最新研究正在将该理论拓展应用到公司金融、宏观经济等更广泛的领域。

从直觉上看，更多的模糊厌恶会导致对风险资产的需求减少，事实上，情况并非如此，在 Gollier (2011) [4]一文中通过反例进行了说明，本文基于 Klibanoff、Marinacci 和 Mukerji (2005)提出的平滑模糊厌恶模

型，参考了 Izhakian (2012) [5]对模糊环境下的资本资产定价的分析，研究了在参数连续的情况下，模糊厌恶对投资者的投资组合选择的影响，得出了在模糊厌恶程度更深的情况下对风险资产的需求减少的充分条件。

KMM 提出的平滑模糊厌恶模型相较于其他模糊性模型有两个最大的优势，它区分了模糊性和模糊态度并且依次应用期望的效用机制，从一阶概率分布开始，然后再进入二阶分布。对于给定的投资组合配置方案，投资者的预期收益评估是通过超额收益的各个可能分布计算最终投资的(一阶)期望效用 u 的凹函数 ϕ 的(二阶)期望。与传统风险决策理论[6]的作用相同，凹效用函数 u 表示在风险行为的特殊情况下的风险厌恶倾向。当函数 ϕ 是线性形式时，该模型将退化为标准的期望效用模型，此时模糊性决策问题可简化为单一复合概率分布下的传统问题。然而，当函数 ϕ 是凹的时，意味着投资者是模糊厌恶的，此时单一的复合分布是无效的，因为投资者会对不同概率分布的可能性赋予非线性的权重，从而打破传统期望效用理论的简化假设。

本文通过使用 KMM 提出的平滑模糊厌恶模型，考虑在风险资产的收益率 x 是模糊的情况下，收益率的分布依赖于一个连续的参数 θ，且 θ 的真实值未知，此时与 θ 相关的 $q(\theta)$ 为二阶概率分布也是连续的，利用这样一个参数连续的平滑模糊厌恶模型，分析了一个无风险资产和一个风险资产的静态双资产组合问题，并且推导了参数连续的情况下减少对风险资产需求的充分条件。

2. 投资组合问题中的连续光滑模糊模型

2.1. 模型的设定

本文假设投资者面对的是一个无风险资产和一个风险资产，将无风险资产的收益率标准化为零，风险资产的收益率为 x，对于投资者来说，风险资产的收益率的真实概率分布是模糊的，具体表现为收益率的分布依赖于一个未知的连续参数 θ，例如风险资产中的股权溢价，参数 θ 的连续变化相对于离散情况更符合现实中的实际情况。假定投资者的初始财富为 ω_0，并且将其中的 α 投资于风险资产，那么投资者的最终财富为 $\omega_0+\alpha x$。

风险资产的模糊性由一族可能的累积概率分布 $\Pi=\left\{F_\theta\right\}_{\theta\in\Theta}$ 刻画，其中 Θ 为连续参数空间。记 $\tilde{x}_\theta$ 为服从分布 F_θ 的随机变量。假设所有先验分布的支撑集均包含于 $\left[x_-,x_+\right]$ 区间内，且满足 $x_-<0<x_+$。基于主观信息，投资者对先验分布赋予二阶概率密度函数 $q(\theta)$，满足 $\int_\Theta q(\theta)\mathrm{d}\theta=1$，其中 $q(\theta)\geq 0$ 表示 F_θ 为真实超额收益率分布的概率密度。此后，记 $\tilde{\theta}$ 为以 $q(\theta)$ 为密度的随机变量。

根据 Klibanoff、Marinacci 和 Mukerji (2005)的研究，所描述的偏好被证明可以用双期望形式的功能来表示 $V=E_\mu\phi\left(E_\pi u\circ f\right)$，通过 ϕ 的曲率独立于 u，明确区分了模糊性(μ 支持的 π 分散度)与模糊厌恶(ϕ 的非线性变换)，对于比较模糊厌恶增加时，投资者对风险资产的需求的比较起到关键作用。假设投资者的偏好具有平滑模糊厌恶特性。对于每一个可能的概率分布 F_θ，投资者通过积分形式计算在该分布下的条件期望效用 $U(\alpha,\theta)=Eu\left(\omega_0+\alpha\tilde{x}_\theta\right)=\int u\left(\omega_0+\alpha x\right)\mathrm{d}F_\theta(x)$，即在 F_θ 为真实分布时的期望效用。假设效用函数 u 单调递增且凹，这意味着投资者对财富的边际效用递减，表现出风险厌恶的特性。因此，对于任意 θ，投资水平 α 的函数 $U(\bullet,\theta)$ 均为凹函数。这一性质表明，随着投资水平的增加，期望效用的增长速度会逐渐减缓，甚至可能下降，从而为投资者的最优投资决策提供了理论依据。

在事前阶段，对于给定的资产配置 α，投资者的预期收益由 $V(\alpha)$ 度量，其表达式为：

$$V(\alpha)=\phi^{-1}\left(\int_\Theta q(\theta)\phi\left(U(\alpha,\theta)\right)\mathrm{d}\theta\right)=\phi^{-1}\left(\int_\Theta q(\theta)\phi\left(Eu\left(\omega_0+\alpha\tilde{x}_\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta\right) \tag{1}$$

其中，ϕ 为反映模糊厌恶程度的非线性变换函数。

$V(\alpha)$ 可以解释为不确定条件期望效用 $U\left(\alpha,\tilde{\theta}\right)$ 的确定性等价。函数 ϕ 的形状刻画了投资者对模糊性

的态度。若 ϕ 为线性函数，则表明投资者对模糊性持中性态度，此时复合概率分布可简化为单一分布 $\int_\Theta q(\theta)F_\theta \mathrm{d}\theta$；反之，若 ϕ 为凹函数，则意味着投资者具有模糊厌恶特性，即决策者厌恶条件期望效用 $U(\alpha,\tilde{\theta})$ 的任何均值保持扩散。

2.2. 模型的求解及分析

当绝对模糊厌恶系数 $\eta(U)=-\dfrac{\phi''(U)}{\phi'(U)}$ 为常数时，此时 $\phi(U)=-\eta^{-1}\mathrm{e}^{-\eta U}$。如 Klibanoff、Marinacci 和 Mukerji (2005)所证明的，当绝对模糊厌恶程度 η 趋近于无穷大时，事前预期收益 $V(\alpha)$ 本质上表现为 Gilboa 和 Schmeidl (1989) [7]提出的最大最小期望效用函数形式，即 $V^{MEU}(\alpha)=\min_\theta Eu(\omega_0+\alpha\tilde{x}_\theta)$。这一极限结果表明，极端模糊厌恶的投资者会采取最保守的决策策略，即在所有可能的概率分布中选择使期望效用最小的情形进行优化，从而反映出其对模糊性的极度规避。

求解投资者的最优资产配置 α^* 是通过最大化事前预期收益 $V(\alpha)$。由于 ϕ 单调递增，因此 α^* 是以下规划问题的解：

$$\alpha^* \in \arg\max_\alpha \int_\Theta q(\theta)\phi\left(Eu(\omega_0+\alpha\tilde{x}_\theta)\right)\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

若 ϕ 与 u 均为严格凹函数，则目标函数关于 α 是凹的，此时规划问题(2)的解若存在则唯一。将规划问题关于 α 求导并令 $\alpha=0$ 可以得到：

$$\begin{aligned}&\int_\Theta q(\theta)\phi'\left(Eu(\omega_0+\alpha\tilde{x}_\theta)\right)\cdot E\left[\tilde{x}_\theta u'(\omega_0+\alpha\tilde{x}_\theta)\right]\mathrm{d}\theta\\&=\int_\Theta q(\theta)\phi'(\omega_0)E\left[\tilde{x}_\theta u'(\omega_0)\right]\mathrm{d}\theta=\phi'(\omega_0)u'(\omega_0)\int_\Theta q(\theta)E(\tilde{x}_\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{3}$$

可以观察到，风险溢价 $E\tilde{x}=\int_\Theta q(\theta)E\tilde{x}_\theta\mathrm{d}\theta$ 的符号为正(零/负)时，规划问题在 $\alpha=0$ 的导数为正(零/负)，结合目标函数关于 α 是凹的，模糊资产的需求符号为正(零/负)，如此可以得到以下引理。

引理 1. 当风险溢价为正(零/负)时，对模糊资产的需求为正(零/负)。

这意味着，与风险厌恶类似，模糊厌恶也具有二阶性质(如 Segal 和 Spivak (1990) [8]所定义)。一旦风险溢价为正，投资者仍会持有模糊资产，无论收益分布的模糊程度如何。从现在起假设风险溢价为正，因此 α^* 为正。

3. 模糊厌恶增加的静态比较

3.1. 静态比较的设定

投资者的信念由风险资产超额收益的连续先验分布族 $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 及其上的二阶概率密度函数 $q(\theta)$ 表示。这一设定允许投资者对收益分布的不确定性具有丰富的认知，而二阶概率密度 $q(\theta)$ 则进一步反映了投资者对不同可能分布的主观权重。比较两个具有相同信念和相同凹效用函数 u 的投资者，但其对模糊性的态度分别由凹函数 ϕ_1 和 ϕ_2 刻画。投资者 ϕ_1 对风险资产的需求 α_1^* 满足以下一阶条件：

$$\int_\Theta q(\theta)\phi_1'\left(U(\alpha_1^*,\theta)\right)E\tilde{x}_\theta u'(\omega_0+\alpha_1^*\tilde{x}_\theta)\mathrm{d}\theta=0 \tag{4}$$

若存在一个递增且凹的转换函数 k 使得 $\phi_2(U)=k(\phi_1(U))$ 对所有相关域内的 U 成立，则称投资者 ϕ_2 比投资者 ϕ_1 具有更强的模糊厌恶。希望得到在何种条件下，模糊厌恶更强的投资者 ϕ_2 对风险资产的需求会小于投资者 ϕ_1，即 $\alpha_2^*\le\alpha_1^*$。此时对于投资者 ϕ_2 而言，当投资额为 α_1^* 时，已经超过最优投资额，事前的预期收益 $V(\alpha)$ 关于 α 的曲线将呈现下降形式，即规划问题(2)关于 α 的导数在投资额为 α_1^* 时小于零，所以使得 $\alpha_2^*\le\alpha_1^*$ 成立的充要条件为：

$$\int_{\Theta} q(\theta)\phi_2'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)E\tilde{x}_\theta u'\left(\omega_0+\alpha_1^*\tilde{x}_\theta\right)\mathrm{d}\theta \le 0 \tag{5}$$

为了找到使得上述条件总能成立的充分条件，将这一蕴含关系可以改写为：

$$E\tilde{y}_1 u'\left(\omega_0+\alpha_1^*\tilde{y}_1\right)=0 \Rightarrow E\tilde{y}_2 u'\left(\omega_0+\alpha_1^*\tilde{y}_2\right)\le 0 \tag{6}$$

其中，$\tilde{y}_1$ 是一个蕴含 $\tilde{x}_\theta$ 和 $\hat{q}^1(\theta)$ 的复合随机变量，密度 $\hat{q}^i(\theta)$ 为：

$$\hat{q}^i(\theta)=\frac{q(\theta)\phi_i'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)}{\int_{\Theta} q(t)\phi_i'\left(U\left(\alpha_1^*,t\right)\right)\mathrm{d}t} \tag{7}$$

式子(6)左边的条件可以解释为期望效用最大化投资者在选择最优组合 α_1^* 时的一阶条件，其信念由 $\tilde{y}_1$ 的分布由 $\tilde{x}_\theta$ 和 $\hat{q}^1(\theta)$ 表示。因此，模糊厌恶的投资者 ϕ_1 的行为与一个扭曲了二阶信念的期望效用最大化投资者相同，其将二阶信念从 $q(\theta)$ 扭曲为“观测等价概率密度” $\hat{q}^1(\theta)$。扭曲因子的形式为 $\phi_1'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)\Big/\int q(t)\phi_1'\left(U\left(\alpha_1^*,t\right)\right)\mathrm{d}t$ 是一个连续的 Radon-Nikodym 导数[9]。需要注意的是，这一扭曲是内生的，因为它依赖于投资者选择的组合配置 α_1^*，所以并不能通过观测等价概率密度将平滑模糊厌恶模型的一阶条件等价于期望效用最大化的一阶条件去求解最优投资组合，只能应用于最优投资组合的比较分析。右边的条件意味着，当信念从 $\tilde{y}_1$ 转移到 $\tilde{y}_2$ 时，模糊中性投资者对风险资产的需求会减少。这些发现总结为以下引理。

引理 2. 从偏好 (u,ϕ_1) 到 (u,ϕ_2) 的变化会减少对模糊资产的需求，当且仅当具有效用函数 u 的期望效用投资者在其对超额收益的信念从 $\tilde{y}_1$ （密度为 $\hat{q}^1(\theta)$)转移到 $\tilde{y}_2$ （密度为 $\hat{q}^2(\theta)$)时，其对风险资产的需求减少，其中 $\hat{q}^i(\theta)$ 由上述定义。

这一结果揭示了模糊厌恶对投资决策的深层影响，更强的模糊厌恶改变了投资者对概率分布的权重分配，从而对风险资产的需求产生影响。接下来，本文将利用扭曲了二阶信念的期望效用最大化模型，分析模糊厌恶增加时，使得对风险资产需求更少的充分条件。

3.2. 静态比较的应用

接下来，本文将探讨将函数 ϕ_1 变为 ϕ_2 如何改变对超额收益的观测等价概率分布。

$$\begin{aligned}\frac{\hat{q}^2(\theta)}{\hat{q}^1(\theta)}&=\frac{q(\theta)\phi_2'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)}{\int_{\Theta} q(t)\phi_2'\left(U\left(\alpha_1^*,t\right)\right)\mathrm{d}t}\cdot\frac{\int_{\Theta} q(t)\phi_1'\left(U\left(\alpha_1^*,t\right)\right)\mathrm{d}t}{q(\theta)\phi_1'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)}\\&=C\cdot\frac{\phi_2'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)}{\phi_1'\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)}=C\cdot k'\left(\phi_1\left(U\left(\alpha_1^*,\theta\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $C=\dfrac{\int_{\Theta} q(t)\phi_1'\left(U\left(\alpha_1^*,t\right)\right)\mathrm{d}t}{\int_{\Theta} q(t)\phi_2'\left(U\left(\alpha_1^*,t\right)\right)\mathrm{d}t}$，为大于零的常数，$k$ 为递增且凹的转换函数，所以 $\dfrac{\hat{q}^2(\theta)}{\hat{q}^1(\theta)}$ 关于 θ 递减，即信念 $\hat{q}^2(\theta)$ 在单调似然比(MLR)序的意义上被 $\hat{q}^1(\theta)$ 支配，由此可以得到下面引理 3。

引理 3. 以下两个条件等价：

1) 投资者 ϕ_2 比投资者 ϕ_1 具有更强的模糊厌恶；

2) 信念 $\hat{q}^2(\theta)$ 在单调似然比(MLR)序的意义上被 $\hat{q}^1(\theta)$ 支配。

引理 3 中的条件 2)意味着，假设 $U\left(\alpha_1^*,\theta\right)$ 关于 θ 递增，似然比 $\hat{q}^2(\theta)/\hat{q}^1(\theta)$ 关于 θ 递减。模糊厌恶程度的提升会产生与信念分布发生单调似然比恶化完全相同的可观测效应。换句话说，更强的模糊厌恶会系统地扭曲投资者的主观概率评估，使其决策行为表现出对不利先验分布的特别“偏爱”。如果投资者

ϕ_1更偏好先验 $\tilde{x}_\theta$ 而非 $\tilde{x}_{\theta'}$ (当 $\theta' > \theta$)，那么与投资者 ϕ_1 相比，模糊厌恶更强的投资者 ϕ_2 会相对更多地增加低 θ 区域的扭曲概率密度 $\hat{q}^2(\theta)$。引理 3 提供了一个理由，即在投资组合问题的情况下，更多的歧义厌恶在观察上等同于更多的悲观主义，即信念的单调似然比恶化。

命题 1. 设 D 为以下随机序之一：FSD (一阶随机占优)、SSD (二阶随机占优)或 IR (风险增加)。假设 $E\tilde{x} > 0$，且超额收益的先验分布族 $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 可以按随机序 D 排序(即 $\theta \le \theta'$ 蕴含 $\tilde{x}_\theta \le_D \tilde{x}_{\theta'}$)。若存在凹函数 k 使得 $\phi_2(U) = k(\phi_1(U))$，则观测等价分布 $\tilde{y}_2$ 在 D 序的意义上被 $\tilde{y}_1$ 支配，即 $\tilde{y}_2 \le_D \tilde{y}_1$。

证明：由 $\tilde{x}_\theta \le_D \tilde{x}_{\theta'}$ 对于 $\theta \le \theta'$，假设效用函数 $v \in C$，C 的形式取决于随机序 D 的类型，对所有的 $v \in C$，满足 $\int_\Theta \hat{q}^2(\theta) Ev(\tilde{x}_\theta)\mathrm{d}\theta \le \int_\Theta \hat{q}^1(\theta) Ev(\tilde{x}_\theta)\mathrm{d}\theta$，则观测等价分布 $\tilde{y}_2$ 在 D 序的意义上被 $\tilde{y}_1$ 支配，即 $\tilde{y}_2 \le_D \tilde{y}_1$。

在 Fishburn 和 Burr Porter (1976) [10]中提出，当风险资产的收益分布从 F 改善为 G ($F \le_{FSD} G$)，不一定会增加投资者对风险资产的最优配置比例。并且文章中找出了一个充分条件，在满足风险资产收益高于无风险资产收益的条件下，满足不等式 $R_p(z) \le 1 + \rho R_\alpha(z)$，$R_p(z)$ 表示相对风险厌恶系数，$R_\alpha(z)$ 表示绝对风险厌恶系数，此时将无风险资产收益 ρ 标准化为 0，因此得到命题 2 中的结论 1)，同样在 Hadar 和 Seo (1990) [11]中提出，由于替代效应和收入效应，风险增加并不会减少对高风险资产超额回报的需求，并且给出对风险资产需求减少的一个充分条件，因此可以得到以下命题：

命题 2. 假设 $u \in C^3$ (三阶可导的连续函数)且 $E\tilde{x} > 0$。若以下两个条件之一成立，则任何模糊厌恶的增加都会减少对风险资产的需求：

1) $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 可以按 FSD 排序，且相对风险厌恶 $R_p(z) \le 1$；

2) $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 可以按 Rothschild 和 Stiglitz 的风险排序，且相对谨慎度 $0 \le P(z) \le 2$。

当先验分布族 $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 可以按照二阶随机占优排序时，若投资者的相对风险厌恶系数小于 1 且相对谨慎度为正并小于 2，则模糊厌恶程度的增加会降低对风险资产的需求。对于幂效用函数而言，相对谨慎度恰好等于相对风险厌恶系数加 1。这意味着，当相对风险厌恶为常数且先验分布可按 SSD 排序时，只要相对风险厌恶小于 1，任何模糊厌恶的增加都会减少对模糊资产的需求。然而这一条件在现实中可能较难满足，因为通常假设相对风险厌恶大于 1，因此限制效用函数集合来获得明确结论并不适用，可以通过限制先验分布集则无需严格限制效用函数形式，也能保证模糊厌恶增加会减少风险资产需求。这一方法避免了直接假设较小的风险厌恶系数，转而通过对收益分布本身的约束来获得稳健结论。参考 Gollier (2011)可以得出以下命题：

命题 3. 假设 $E\tilde{x} > 0$。若超额收益的先验分布族 $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 可以同时按 SSD 和中心支配(CD)排序(即 $\theta \le \theta'$ 蕴含 $\tilde{x}_\theta \le_{SSD} \tilde{x}_{\theta'}$ 且 $\tilde{x}_\theta \le_{CD} \tilde{x}_{\theta'}$)，则任何模糊厌恶的增加都会减少对风险资产的需求。

由于单调似然比序同时蕴含一阶随机占优和中心支配性，可以直接得到以下推论：

推论 1. 假设 $E\tilde{x} > 0$ 且先验分布族 $\{\tilde{x}_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 可以按单调似然比排序，则任何模糊厌恶的增加都会减少对风险资产的需求。

结论表明，模糊性厌恶对投资行为的影响并非单一方向，而是取决于市场的不确定性结构。投资者在面对模糊性时可能减少、增加或重新配置风险资产，这解释了现实市场中的复杂行为(如危机期间的“安全资产抢购”与“高风险资产增持”并存)。如果投资者认为股权溢价大于零并且分布可以按 MLR 排序，则模糊性厌恶会降低股票需求。这一发现对资产定价、投资策略和金融稳定政策具有重要启示。

4. 结论

本文基于 Klibanoff、Marinacci 和 Mukerji (2005)提出的平滑模糊厌恶模型，研究了在参数连续的情

况下，模糊厌恶对投资者投资组合选择的影响。通过分析一个包含无风险资产和风险资产的静态双资产组合问题，推导了模糊厌恶程度增加时减少对风险资产需求的充分条件。

模糊厌恶的增加并不总是导致对风险资产需求的减少。其影响方向与收益分布的形状与投资者效用的局部特征有关。在特定分布结构下，模糊厌恶可能反而促使投资者增加对风险资产的配置，以规避模糊性带来的“中等回报不足”风险。在满足一些特定随机序排序的情况下，在效用函数满足相对风险厌恶系数小于 1 或相对谨慎度为正且小于 2 时，模糊厌恶的增加会降低对风险资产的需求。然而，现实中投资者的风险厌恶系数通常大于 1，因此通过对收益分布本身的约束可以避免对效用函数的严格限制，从而得到更稳健的结论。当风险资产的收益分布可以按照二阶随机占优(SSD)和中心支配(CD)或单调似然比(MLR)排序时，模糊厌恶程度的增加会显著减少对风险资产的需求。这一结论为投资者在模糊性环境下的决策提供了理论依据。

本文的研究不仅丰富了模糊性理论在金融领域的应用，还为投资者在不确定性环境下的资产配置提供了实践指导。未来的研究可以进一步探讨动态投资组合问题或多资产情境下模糊厌恶的影响，以更全面地理解模糊性在金融市场中的作用。

参考文献

[1] Knight, F.H. (1921) Risk, Uncertainty and Profit. Houghton Mifflin.

[2] Hansen, L.P. and Sargent, T.J. (2007) Recursive Robust Estimation and Control without Commitment. *Journal of Economic Theory*, **136**, 1-27. https://doi.org/10.1016/j.jet.2006.06.010

[3] Klibanoff, P., Marinacci, M. and Mukerji, S. (2005) A Smooth Model of Decision Making under Ambiguity. *Econometrica*, **73**, 1849-1892. https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2005.00640.x

[4] Gollier, C. (2011) Portfolio Choices and Asset Prices: The Comparative Statics of Ambiguity Aversion. *The Review of Economic Studies*, **78**, 1329-1344. https://doi.org/10.1093/restud/rdr013

[5] Izhakian, Y. (2012) Capital Asset Pricing under Ambiguity. *SSRN Electronic Journal*.

[6] Falk, A., Becker, A., Dohmen, T., Enke, B., Huffman, D. and Sunde, U. (2018) Global Evidence on Economic Preferences. *The Quarterly Journal of Economics*, **133**, 1645-1692. https://doi.org/10.1093/qje/qjy013

[7] Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1989) Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior. *Journal of Mathematical Economics*, **18**, 141-153. https://doi.org/10.1016/0304-4068(89)90018-9

[8] Segal, U. and Spivak, A. (1990) First Order versus Second Order Risk Aversion. *Journal of Economic Theory*, **51**, 111-125. https://doi.org/10.1016/0022-0531(90)90053-m

[9] Delbaen, F. (2006) The Mathematics of Arbitrage. Springer.

[10] Fishburn, P.C. and Burr Porter, R. (1976) Optimal Portfolios with One Safe and One Risky Asset: Effects of Changes in Rate of Return and Risk. *Management Science*, **22**, 1064-1073. https://doi.org/10.1287/mnsc.22.10.1064

[11] Hadar, J. and Seo, T.K. (1990) The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolios. *International Economic Review*, **31**, 721-736. https://doi.org/10.2307/2527171