

高维视角下的积分问题：升维方法与技巧的统一分析

贾瑞玲, 滕吉红, 孙铭娟

信息工程大学, 河南 郑州

收稿日期: 2025年4月23日; 录用日期: 2025年5月16日; 发布日期: 2025年5月28日

摘要

经典的一维积分问题常因复杂性或隐蔽性难以揭示本质特征, 本文通过将低维问题嵌入高维空间进行重构, 借助多维积分理论(如积分换序、参数化技巧、积分号下求导等)进行求解, 充分展现了高维理论对低维问题的统一化解题能力。这不仅为经典积分难题提供了全新的解决路径, 还为跨学科问题的高维建模提供了重要的理论启示, 拓展了高维方法在不同领域的应用前景。

关键词

定积分, 含参变量的反常积分, 重积分, 升维思想

Integral Problems from a High-Dimensional Perspective: A Unified Analysis of Dimensional Elevation Methods and Techniques

Ruiling Jia, Jihong Teng, Mingjuan Sun

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Apr. 23rd, 2025; accepted: May 16th, 2025; published: May 28th, 2025

Abstract

Classical one-dimensional integral problems often struggle to reveal their essential characteristics due to inherent complexity or hidden structures. This study reconstructs these low-dimensional challenges by embedding them into higher-dimensional spaces, employing multidimensional integral theories

文章引用: 贾瑞玲, 滕吉红, 孙铭娟. 高维视角下的积分问题: 升维方法与技巧的统一分析[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 371-376. DOI: 10.12677/aam.2025.145266

(such as integration order interchange, parameterization techniques, and differentiation under the integral sign). This approach fully demonstrates the unified problem-solving capabilities of high-dimensional frameworks for low-dimensional issues. The methodology not only provides innovative solutions to classical integration conundrums, but also offers critical theoretical insights for high-dimensional modeling of interdisciplinary problems, significantly expanding the application potential of high-dimensional methods across diverse fields.

Keywords

Definite Integral, Improper Integral with Parameter, Multiple Integral, Dimensional Elevation Concept

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在数学分析中,许多经典的一维积分问题因其复杂性或隐蔽的特征而难以直接求解。传统方法往往受限于低维空间的局限性,难以揭示问题的本质结构。近年来,通过将低维问题嵌入高维空间,利用多维积分理论(如积分换序、参数化技巧、积分号下求导)进行求解的策略,逐渐展现出独特的优势。例如,通过引入参数将定积分转化为含参变量积分,可利用积分号下求导理论简化计算;而将两个定积分的乘积转化为二重积分,则能借助高维空间的积分理论完成证明;本文作者在[1]中已详细探讨过某些特殊结构的定积分向重积分的转化应用。

本文旨在系统探讨升维方法在积分问题中的转化应用。通过三个典型例题(定积分的计算、变限函数的积分问题与积分不等式)的升维解法,揭示高维理论对低维问题的统一化重构能力。本文不仅为经典问题提供新的解决路径,更试图阐明升维思想在数学方法论中的深层意义:即通过维度的扩展,剥离问题的表层复杂性,直指其内在逻辑。

2. 高维积分理论在低维积分问题中的应用

2.1. 计算复杂定积分或反常积分

例 1 (2021 年第 13 届全国大学生数学竞赛河南赛区(非数学类)决赛) [2]

计算定积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$ 。

解 方法 1 利用定积分的相关理论进行计算。令 $x = \tan t$, 则 $\frac{dx}{1+x^2} = dt$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt. \end{aligned}$$

对上式第二个积分作变量代换: $u = \frac{\pi}{4} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) dt = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos u du,$$

$$\text{故 } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

方法 2 对被积函数引入参数, 将其视为含参变量积分, 利用含参变量的可微性定理求解。

令 $f(x, \alpha) = \frac{\ln(\alpha x + 1)}{x^2 + 1}$, 记 $I(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha) dx$, $\alpha \in [0, 1]$, 则 $I(0) = 0$, $I = I(1)$ 。计算得

$$f_\alpha(x, \alpha) = \frac{x}{(x^2 + 1)(\alpha x + 1)}, \text{ 且 } f(x, \alpha), f_\alpha(x, \alpha) \in C[0, 1; 0, 1].$$

利用含参变量积分的可微性定理(积分号下求导定理), 得

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^1 f_\alpha(x, \alpha) dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)(\alpha x + 1)} dx \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2} \int_0^1 \left[\frac{\alpha + x}{1 + x^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha x} \right] dx \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2} \left[\frac{\pi}{4} \alpha + \frac{1}{2} \ln 2 - \ln(1 + \alpha) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(1) - I(0) &= \int_0^1 I'(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} d\alpha + \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{1}{\alpha^2 + 1} d\alpha - \int_0^1 \frac{\ln(\alpha + 1)}{\alpha^2 + 1} d\alpha \\ \text{于是,} \quad &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} d\alpha + \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{1}{\alpha^2 + 1} d\alpha - \int_0^1 \frac{\ln(\alpha + 1)}{\alpha^2 + 1} d\alpha \\ &= \frac{\pi}{8} \ln(1 + \alpha^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln 2 \arctan \alpha \Big|_0^1 - I(1) \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I(1) \end{aligned}$$

【总结与反思】方法 2 通过引入参数变量这一关键步骤, 成功构建了多维视角下的分析框架。这里突破传统直接积分法的局限, 将原积分表达式延拓为含参变量的二元函数, 这种升维处理看似增加了问题的复杂度, 实则为应用含参变量积分号下求导定理开辟了道路。事实上, 曾峥[3]与倪伟平[4]也针对例 1 的典型积分问题论述了这一方法理论, 这种思路在后续文献[5]-[7]中得到进一步论证与拓展, 形成了处理复杂积分问题的系统方法。在数学分析的经典方法体系中, 参数化思想始终发挥着重要的作用, 这种参数化思维模式的影响早已超越单纯的计算技巧层面, 它深刻揭示了数学分析中空间构造与维度转换的本质关联。

【举一反三】计算 Dirichlet 积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 。

思路 1 引入收敛因子, 考虑含参变量反常积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ($\alpha \geq 0$), 对 $I(\alpha)$ 验证含参变量反常积分的可微性定理, 利用积分号下求导方法计算, 详见[8]。

思路 2 首先考虑含参变量反常积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x} dx$ ($p > 0, b > a$), 对 I 验证含参变量反常积分的积分换序定理, 利用积分换序方法求出 I 。然后引入 $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin(ax)}{x} dx$, 由 Abel 判别

法, $F(p)$ 关于 $p \geq 0$ 连续, 对 $F(p)$ 利用含参变量反常积分的连续性定理, 求出 $F(0)$, 从而求出 $I = \frac{\pi}{2}$,

详见[9]。

2.2. 变限函数的积分问题

例 2 (2018 年第 10 届全国大学生数学竞赛河南赛区(非数学类)决赛) [10]

设非负函数 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \cos^4 x$, 求 $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 。

结构分析 1) 常规方法的局限性

积分等式的显著特征在于被积函数呈现二元乘积形式 $f(t-x)f(t)$, 且积分上下限与参数 x 存在动态关联关系。尝试用换元法(令 $u=t-x$)处理, 积分等式变为:

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(u+x)f(u)du = \cos^4 x,$$

但新等式仍保留原问题的核心结构, 这一特性导致单变量积分技巧(如分部积分、变限函数求导理论)难以直接求解, 常规低维分析陷入僵局。

2) 升维策略的提出与理论依据

注意到被积函数是函数 $f(t)$ 与其平移函数的局部卷积, 其复杂性与变量间的隐式关联密切相关。此时, 突破维度限制成为关键。如何突破呢? 事实上, 重积分的计算通常将其转化为累次积分的方法, 这一过程在数学分析中具有坚实的理论基础。但两个定积分相乘的形式亦可逆向转化为二重积分进行求解, 从而为复杂问题的求解提供新的视角。这一策略在处理积分等式和不等式证明问题时尤为高效, 其通过升维重构的思维方式, 往往能打破单变量积分的局限, 使解题路径更加清晰简洁。鉴于此, 这里引入辅助变量将隐藏的关系显示化, 将单变量积分升维为二重积分, 具体如下: 对原方程整体积分(即对 x 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 积分), 将原积分转化为累次积分, 再利用二重积分的不同积分顺序, 将动态积分区域 $x \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 转

化为静态区域 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 以便进行变量分离, 为后续计算提供突破口。

解 等式 $\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \cos^4 x$ 两端关于 x 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 积分, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx,$$

将等式左端的积分(先 t 对后对 x)化为先 x 对后对 t 的积分顺序可得,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \int_0^t f(t-x)dx.$$

记 $\int_0^t f(t-x)dx = -\int_0^t f(t-x)d(t-x) = \int_0^t f(u)du \triangleq F(t)$, 则 $F'(t) = f(t)$, 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t)F'(t)dt = \frac{1}{2} F^2(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} F^2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

从而可得 $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6\pi}}{4}$, 所以

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{6\pi}}{4} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

【总结与反思】 当低维空间的分析受限于结构复杂性时, 通过增加维度、重构问题空间揭示隐藏的规律。这种将动态参数问题转化为静态重积分分析的方法, 在含卷积结构的积分方程、概率论(联合分布

分析)、信号处理(相关函数计算)等领域均有深刻的应用,展现了高维视角对低维复杂性的降维解析能力。

例 2 至例 3 充分展现了重积分在处理某些特殊结构定积分等式与定积分不等式问题时的独特魅力与优势。这两个例子将“两个定积分的乘积转化为重积分”的思想运用得淋漓尽致,不仅使问题的求解过程更加简洁明了,还揭示了重积分在解决复杂积分问题时的强大力量。通过这种巧妙的转化,原本复杂的定积分问题得以在更高维度的积分框架下得到更高效的解决,充分体现了数学方法的灵活性与创造性。

2.3. 积分不等式的证明

例 3 (2017 年第 9 届全国大学生数学竞赛河南赛区(非数学类)决赛) [11]

证明: $\sqrt{1-e^{-1}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx < \sqrt{1-e^{-2}}$ 。

结构分析 1) 常数变易法是证明积分不等式的一种有效方法,难点在于如何构造变限函数。这里即证 $1-e^{-1} < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 < 1-e^{-2}$, 注意到 $\left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)' = e^{-t^2}$, 很难构造与之相关的变限函数。

2) 升维策略的提出与理论依据

在积分理论中,常规思路将重积分化为两个累次积分进行计算,而逆向思维则把两个定积分的乘积升维为重积分。这种维度转换不仅简化了积分不等式的证明过程,更突破了“降维求解”的思维定势,展现出高维空间处理低维问题的独特优势。处理思路如下:

$$\left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \int_{-1}^1 e^{-y^2} dy = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \int_{-1}^1 e^{-y^2} dy = \iint_{[-1,1];[-1,1]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

接下来,想办法将这个二重积分与要证明的结论(具有形式 $1-e^{-1}, 1-e^{-2}$)建立联系,注意到结论被积函数的结构特征以及积分区域的特征,将其转化为极坐标系下计算。

解 记 $I = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$, 则

$$I^2 = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \int_{-1}^1 e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-y^2} dx dy, \quad D = [-1,1];[-1,1].$$

记 $D_1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_2 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 则 $D_1 \subset D \subset D_2$, 于是

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I^2 \leq \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

$$\text{且 } \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^1 e^{-r^2} dr^2 = \pi(1-e^{-1}),$$

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} e^{-r^2} dr^2 = \pi(1-e^{-2}),$$

即 $\pi(1-e^{-1}) \leq I^2 \leq \pi(1-e^{-2})$, 故

$$\sqrt{1-e^{-1}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx < \sqrt{1-e^{-2}}.$$

【总结与反思】 通过将乘积积分升维重构,引导学生突破常规解题路径,体验从“分解降维”到“整合升维”的思维飞跃,培养多维视角分析问题的能力。正向与逆向思维的辩证关系在此方法中得到完美诠释:二者既对立又统一,通过矛盾转化实现解题路径的优化,体现了数学思维的灵活性与创造性。

2.4. 在其他数学分支的应用

升维方法还有很多应用案例,如平面曲线积分转化为二重积分(格林公式)、空间曲线积分转化为曲面积分(斯托克斯公式)、第二类曲面积分转化为三重积分(高斯公式)。升维方法的核心价值在于其打破了维

度的固有界限,将不同类型问题纳入一个统一的分析体系,不仅使得问题的求解更加高效,还培养了学生的思维灵活性和创新能力。这种方法在数学教学中具有重要的方法论意义,也为其他学科的教学提供了有益的借鉴。

在拓扑学中,升维方法可用于处理复杂的拓扑结构和空间映射问题。如通过将数据映射到更高维度的空间,可以更好地捕捉数据的拓扑特征,有效避免信息丢失,具有无损的优势。通过同胚映射将一个拓扑空间映射到另一个空间,使得在高维空间中更容易处理连通性或紧致性等问题。在流形学习中,升维方法可以用于将低维流形嵌入到高维空间,以便更好地理解和分析流形的几何结构。

在微分几何中,嵌入定理(如 Whitney 嵌入定理)表明,任何光滑流形都可以嵌入到足够高维的欧几里得空间中。这种嵌入方法使得复杂的低维流形可以在高维空间中被更清晰地描述和分析。如将二维曲面嵌入到三维或更高维度的空间中,可以更直观地分析曲率和法向量等几何特征。通过升维可以将纤维丛的基空间和纤维空间统一到一个高维空间中进行研究,利用切空间的高维表示来研究流形上的微分形式和联络。

这种跨学科的探索将推动数学工具在更广泛领域的普适化发展,为解决复杂问题提供更强大的理论支持。通过不断拓展升维方法的应用范围,我们有望在更多领域实现突破,推动科学和技术的持续进步。

3. 结束语

本文以定积分的计算、变限函数的积分问题与积分不等式证明三大经典问题为切入点,系统阐释了升维方法论在单变量积分问题所引发的创新突破,揭示出高维空间重构对低维积分问题的解蔽机制。其一,通过参数构造法将一维积分拓展为含参变量积分,可借助积分号下可微性定理突破传统分部积分法的局限,如在 Dirichlet 积分计算中,参数化技巧使原本依赖复变函数理论的问题转化为初等微积分操作;其二,在变限函数的积分问题求解中,通过引入辅助参数构建二重积分。其三,采用升维策略将单变量积分转化为双变量重积分,利用高维空间的相关理论重构证明方法。这些案例共同印证,维度扩展不仅能剥离积分问题的表层复杂性,更能通过多维空间的代数结构与几何特性,重构被积函数的内蕴逻辑体系。这种从低维到高维的思维转变,不仅革新了传统微积分的解题体系,也印证了 Hilbert 的断言:“数学发展的动力在于从有限维走向无限维的永恒追求”。在维度交响的数学宇宙中,升维策略将继续谱写解析难题的新乐章。

参考文献

- [1] 贾瑞玲,韩艺兵,孙铭娟. 重积分在某些极限问题和定积分问题中的应用[J]. 理论数学. 2022, 12(6): 919-927.
- [2] 2021 年第十三届全国大学生数学竞赛河南赛区[非数学类]决赛试题参考答案及评分标准[Z/OL]. https://mp.weixin.qq.com/s/bgJS-hW_o6pVawo_3rpJuA, 2023-03-07.
- [3] 曾峥. 适当引入参变量定积分法及其作用[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1997(S1): 94-98.
- [4] 倪伟平. 用含参变量积分解决积分计算的数学模式[J]. 枣庄师专学报, 2000(2): 31-32+45.
- [5] 贾瑞玲,孙铭娟,张冬燕. 利用积分号下求导计算含参变量广义积分[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 11-14.
- [6] 明瑞怀. 一道含参变量积分考研真题的推广及应用[J]. 汉江师范学院学报, 2020, 40(3): 111-114.
- [7] 向长富. “含参变量积分”的教学研究[J]. 科技信息, 2011(35): 303-304.
- [8] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(上册)[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [9] 华东师范大学数学科学学院, 编. 数学分析(下册)[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [10] 第十届全国大学生数学竞赛河南赛区《非数学专业》复赛试卷及参考解答[Z/OL]. <https://mp.weixin.qq.com/s/HS7StwR7ptRmUUOk-VhYQ>, 2021-03-07.
- [11] 河南省第九届大学生数学竞赛(非数学类)复赛试题及参考答案[Z/OL]. <https://mp.weixin.qq.com/s/6qyndl7FqrJUXe18GY7d7Q>, 2020-01-28.