Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(6), 188-197
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146311

Hans汉斯

一类抛物方程在Fourier-Besov-Morrey空间内解的适定性

苏　健

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2025年5月19日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月19日

摘　要

本文应用傅里叶局部化方法和Littlewood-Paley定理，在临界Fourier-Besov-Morrey空间 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 对一类抛物方程小初值解的全局适定性问题进行研究，其中 $s=2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}$。

关键词

抛物方程，整体适定性，Fourier-Besov-Morrey空间

The Well-Posedness of Solutions to a Class of Parabolic Equations in Fourier-Besov-Morrey Spaces

Jian Su

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 19th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

This paper applies the Fourier localization method and the Littlewood-Paley theorem to study the global well-posedness of small initial value solutions for a class of parabolic equations in the critical Fourier-Besov-Morrey spaces $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}\left(\mathbb{R}^3\right)$ where $s=2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}$.

文章引用: 苏健. 一类抛物方程在 Fourier-Besov-Morrey 空间内解的适定性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 188-197.
DOI: 10.12677/aam.2025.146311

Keywords

Parabolic Equations, Global Well-Posedness, Fourier-Besov-Morrey Space

1. 引言

本文研究分数阶一类抛物方程在 Fourier-Besov-Morrey 空间的适定性

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\alpha u = \nabla\cdot(u\nabla u) & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3, \\ u(0,x)=u_0(x) & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),u_3(t,x))$ 表示速度场，算子 $(-\Delta)^\alpha$ 是傅里叶乘子其符号为 $|\xi|^{2\alpha}$。Leray [1]和 Kato [2]以及多位研究者对局部存在性进行研究、Leray [1]和 Hopf [3]研究了弱解的全局存在性、Fujita 和 Kato [4]在临界 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$，Cannone [5]在当 $s>\frac{1}{2}$ 的空间 $\dot{H}^s$，Kato [6]在 Lebesgue 空间 L^3，Koch 和 Tataru [7]。在空间 BMO^{-1} 以及 Cannone [5]在空间 $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)$ 中都对小初始数据(初值)强解的适定性问题进行研究。Lei-Lin [7]研究了一个新空间

$$\chi^{-1}=\left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3);\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-1}|\hat{u}|\mathrm{d}\xi<\infty\right\},$$

此空间包含于 BMO^{-1} 中且等价于 Fourier-Herz 空间 $\dot{B}_1^{-1}$ [3]。他们证明了当初值 $u_0\in\chi^{-1}$ 且 $\|u_0\|_{\chi^{-1}}<1$，分数阶 Navier-Stokes 系统存在全局温和解，当 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\chi^{-1})}<1$ 时，解唯一。Cannone 和 Wu [3]给出在临界 Fourier-Herz 空间 $\dot{B}_q^{-1}(q\in[1,2])$ 中小初值时解的全局适定性，且 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\dot{B}_q^{-1})\cap L^1(\mathbb{R}^+;\dot{B}_q^{-1})}<\frac{9}{5}\|u_0\|_{\dot{B}_q^{-1}}$，存在唯一温和解。由 $\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^n)$ 空间的定义可知，其包含了一些经典的空间。例如 $\dot{\mathcal{N}}_{p,0,q}^s=\dot{B}_{p,q}^s$。由 Fourier-Besov-Morrey 空间 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s$ 定义及性质，以及 Navier-Stokes 方程在 Fourier-Besov 空间 $\mathcal{F}\dot{B}_{p,q}^s$ 内的研究。例如 Cannone 和 Wu 在 Fourier-Herz 研究了在空间 $\dot{B}_q^s=\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,1,q}^s$ 中的情况、肖伟良和陈杰成研究了分数阶 Navier-Stokes 方程在 $\mathcal{F}\dot{B}_{p,q}^s$ 空间中的情况，由定义可知 $\dot{B}_q^s=\mathcal{F}\dot{B}_{1,q}^s=\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{1,0,q}^s$。拓展了新思路，本文研究当 $\alpha>1$ 超临界情况下广义的 Navier-Stokes 方程，其中 $u_0\in\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}(\mathbb{R}^3)$。本文的结果拓展了[8]和[9]的结果，用 $\dot{B}_{p,q}^s$ 表示经典的齐次 Besov 空间，C 表示常数，在不同的地方可以取不同值，$U\lesssim V$ 表示存在常数 $C>0$，使得 $U\le CV$，p' 是 p 的共轭，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，当 $1\le p\le\infty$。当 $s=2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}$ 时在临界空间 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s(\mathbb{R}^3)$ 内可保证解的伸缩不变形。

2. 预备知识和主要结论

本论文证明主要依靠傅里叶变换的二进制分割，也称为齐次 Littlewood-Paley 分解，下面我们将简要

说明。首先对 $\mathbb{R}^n$ 空间进行分割。

假设 $\mathcal{X}\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$，$\varphi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\right)$ 满足

$$\operatorname{supp}\mathcal{X}\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi|\le\frac{4}{3}\right\},$$

$$\operatorname{supp}\varphi\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:\frac{4}{3}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\right\},$$

$$\mathcal{X}(\xi)+\sum_{j>0}\varphi\left(2^{-j}\xi\right)=1,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi\left(2^{-j}\xi\right)=1,\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

其中 $\varphi_j(\xi)=\varphi\left(2^{-j}\xi\right)$ 且 $\mathcal{P}$ 是所有多项式的集合，S' 表示缓增空间。对 $\forall j\in\mathbb{Z}$，齐次二元块 $\dot{\Delta}_j$ 与齐次低频截止算子 $\dot{S}_j$ 定义为

$$\dot{\Delta}_j u=\varphi\left(2^{-j}D\right)u=2^{jn}\int h\left(2^j y\right)u(x-y)\mathrm{d}y,$$

$$\dot{S}_j u=\sum_{k\le j-1}\dot{\Delta}_k u=\mathcal{X}\left(2^{-j}D\right)u=2^{jn}\int\tilde{h}\left(2^j y\right)u(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中 $h=\mathcal{F}^{-1}\varphi$，$\tilde{h}=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{X}$。

定义 2.1 若 $1\le p\le\infty$，$0\le\lambda<n$，Morrey 空间 $M_p^\lambda=M_p^\lambda\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义为函数 $f\in L_{loc}^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的集合

$$\|f\|_{M_p^\lambda}=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0}r^{-\frac{\lambda}{p}}\|f\|_{L^p(B(x_0,r))}<\infty,\tag{2}$$

其中 $B(x_0,r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心，r 为半径的球。空间 M_p^λ 是一个巴拿赫空间。

当 $\frac{n-\mu}{p_2}\ge\frac{n-\lambda}{p_1}$ 且 $p_2\le p_1$ 时，有 $M_{p_1}^\lambda\hookrightarrow M_2^\mu$ 且 $M_p^0=L^p$。若 $1\le p_1,p_2,p_3<\infty$，且 $0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3<n$，有 $\frac{1}{p_3}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1}$ 且 $\frac{\lambda_3}{p_3}=\frac{\lambda_2}{p_2}+\frac{\lambda_1}{p_1}$，由 Hölder 不等式得

$$\|fg\|_{M_{p_3}^{\lambda_3}}\le\|f\|_{M_{p_1}^{\lambda_1}}\|g\|_{M_{p_2}^{\lambda_2}}.$$

类似的，当 $1\le p<\infty$ 且 $0\le\lambda<n$，对 $\forall\varphi\in L^1$ 且 $\forall g\in M_p^\lambda$，可得

$$\|\varphi*g\|_{M_p^\lambda}\le\|\varphi\|_{L^1}\|g\|_{M_p^\lambda}.\tag{3}$$

定义 2.2 若 $s\in\mathbb{R}$，$1\le p<+\infty$，$1\le q\le+\infty$ 且 $0\le\lambda<n$，则 $\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s\left(\mathbb{R}^n\right)$ 空间定义为

$$\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{u\in\mathcal{Z}'\left(\mathbb{R}^n\right);\|u\|_{\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s\left(\mathbb{R}^n\right)}<\infty\right\}.$$

其中 $\|u\|_{\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s\left(\mathbb{R}^n\right)}$ 定义为

$$\|u\|_{\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^s\left(\mathbb{R}^n\right)}=\begin{cases}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\dot{\Delta}_j u\right\|_{M_p^\lambda}^q\right\}^{1/q} & \text{当 } q<\infty,\\ \sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\dot{\Delta}_j u\right\|_{M_p^\lambda} & \text{当 } q=\infty.\end{cases}$$

空间 $\mathcal{Z}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ 表示空间 $\mathcal{Z}\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{f\in S\left(\mathbb{R}^n\right);\partial^\alpha\hat{f}(0)=0,\forall\alpha\right\}$ 的拓扑对偶空间。

定义 2.3 若 $s\in\mathbb{R},1\le p\le+\infty,1\le q\le+\infty,0\le\lambda<n$，齐次 *Fourier-Besov-Morrey* 空间 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\|u\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)}=\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\right\|^q_{M^{\lambda}_{p}}\right\}^{1/q}<+\infty,\tag{4}$$

当 $q=\infty$ 时，适当修改。当 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ 空间赋予范数(4)时，则为巴拿赫空间。

定义 2.4 若 $s\in\mathbb{R},1\le p<\infty,1\le q,\rho\le\infty,0\le\lambda<n,I=[0,T),T\in(0,\infty]$。对 $u(t,x)$ 定义时空范数为

$$\|u(t,x)\|_{\mathcal{L}^{\rho}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}\right)}=\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\right\|^q_{L^{\rho}\left(I,M^{\lambda}_{p}\right)}\right\}^{1/q},$$

其中 $\mathcal{L}^{\rho}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}\right)$ 表示分布在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}$ 中且范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^{\rho}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}\right)}$ 有限的集合。

定义 2.5 若 $s\in\mathbb{R},1\le p,q\le\infty$，齐次 *Fourier-Besov* 空间 $\mathcal{F}\dot{B}^{s}_{p,q}$ 定义为

$$\mathcal{F}\dot{B}^{s}_{p,q}=\left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}:\|u\|_{\mathcal{F}\dot{B}^{s}_{p,q}}<\infty\right\}.$$

其中

$$\|u\|_{\mathcal{F}\dot{B}^{s}_{p,q}}=\begin{cases}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\right\|^q_{L^p}\right\}^{1/q} & \text{当 } q<\infty,\\ \sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\right\|^q_{L^p} & \text{当 } q=\infty.\end{cases}$$

当 $p=1$ 时 Cannone 和 Wu 引入 Fourier-Herz 空间 $\dot{B}^{s}_{q}$ [3]，其范数为

$$\|u\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}}=\begin{cases}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\right\|^q_{L^1}\right\}^{1/q} & \text{当 } q<\infty,\\ \sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{jqs}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j u}\right\|^q_{L^1} & \text{当 } q=\infty.\end{cases}$$

有 $\dot{B}^{s}_{q}=\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{1,q}$。

由 Lei and Lin [7]引入了空间 χ^{-1}

$$\chi^{-1}=\left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3);\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{-1}|\hat{u}|\mathrm{d}\xi<\infty\right\}.$$

并且得到 $\chi^{-1}=\mathcal{F}\dot{B}^{-1}_{1,1}=\dot{B}^{-1}_{1}$。

引理 2.1 [10] 若 $s_1,s_2\in\mathbb{R},1\le p_1,p_2<+\infty,1\le q_1,q_2\le+\infty,0\le\lambda_1,\lambda_2<n,0\le\theta\le1$。当 $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2}$，$\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_1}+\frac{\theta}{q_2}$，$s=(1-\theta)s_1+\theta s_2$，$\lambda=(1-\theta)\lambda_1+\theta\lambda_2$，则

$$\|u\|_{\mathcal{F}\dot{B}^{s}_{p,q}}<\|u\|^{1-\theta}_{\mathcal{F}B^{s_1}_{p_1,\lambda_1,q_1}}\|u\|^{\theta}_{\mathcal{F}B^{s_2}_{p_2,\lambda_2,q_2}}.$$

引理 2.2 [10] 导数 $D^{\alpha}_{\xi}\mu$ 是一个由 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s+|\alpha|}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s}_{p,\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子。

引理 2.3 [10] 若 $1\le q\le p<\infty,0\le\lambda_1,\lambda_2<n,\frac{n-\lambda_1}{p}\le\frac{n-\lambda_2}{q}$，$\gamma$ 是一多重指标。若 $\mathrm{supp}(\hat{f})\subset\left\{|\xi|\le A2^j\right\}$，则存在与 f 和 j 无关的常数 $C>0$，使得

$$\left\|(i\xi)^{\gamma}\hat{f}\right\|_{M^{\lambda_2}_{q}}\le C2^{j|\gamma|+j\left(\frac{n-\lambda_2}{q}-\frac{n-\lambda_1}{p}\right)}\left\|\hat{f}\right\|_{M^{\lambda_1}_{q}}.\tag{5}$$

定理 2.1 若 $s\in\mathbb{R},1\le p<\infty,1\le q\le\infty,0\le\lambda<n,1\le\alpha<\dfrac{3+\dfrac{3}{p'}+\dfrac{\lambda}{p}}{4-\dfrac{2\alpha}{\rho}}$，对 $\forall u_0\in\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 满足 $\nabla\cdot u_0=0$ 且 $\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}<C_0$，则存在一个常数 $C_0(\alpha,p,q)$，使得(1)有唯一的全局温和解 u，

$$u\in C\left(\left[0,\infty\right);\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)\cap\mathcal{L}^1\left(\left[0,\infty\right);\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right),$$

并且满足

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty\left([0,\infty);\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}+\|u\|_{\mathcal{L}^1\left([0,\infty),\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}\le\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

注记 2.1 其中 *Fourier-Besov-Morrey* 空间与 φ_j 的选择无关，并且与经典的 *Besov-Morrey* 空间相比选择此空间为研究空间优势在于，该空间可以不使用 *Bernstein* 不等式，可直接通过 Hölder's 不等式估计双线性仿积。

注记 2.2 *Fourier-Besov-Morrey* 空间 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 对方程(1)是关键的，若 $u_{0,\gamma}(\xi)=\gamma^{2\alpha-2}u_0(\gamma\xi)$，则 $\widehat{u_{0,\gamma}}(\xi)=\gamma^{2\alpha-5}\widehat{u_0}\left(\gamma^{-1}\xi\right)$。设 $f_j(\xi)=\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]-\log_2\gamma}\xi\right)\widehat{u_{0,\gamma}}(\xi)$，有

$$\begin{aligned}
2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\|f_j\|_{M_p^\lambda}&=2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\sup_{r>0}r^{-\frac{\lambda}{p}}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]-\log_2\gamma}\xi\right)\widehat{u_{0,\gamma}}(\xi)\right\|_{L^p(B(x_0,r))}\\
&=2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\sup_{r>0}r^{-\frac{\lambda}{p}}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]-\log_2\gamma}\xi\right)\gamma^{2\alpha-5}\widehat{u_0}\left(\gamma^{-1}\xi\right)\right\|_{L^p(B(x_0,r))}\\
&=2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\gamma^{2\alpha-5}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\sup_{r>0}r^{-\frac{\lambda}{p}}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\gamma^{-1}\xi\right)\widehat{u_0}\left(\gamma^{-1}\xi\right)\right\|_{L^p(B(x_0,r))}\\
&=2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\gamma^{2\alpha-5}\gamma^{\frac{3}{p}}r^{-\frac{\lambda}{p}}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\sup_{r>0}\left(\gamma^{-1}r\right)^{-\frac{\lambda}{p}}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\eta\right)\widehat{u_0}(\eta)\right\|_{L^p\left(B\left(\gamma^{-1}x_0,\gamma^{-1}r\right)\right)}\\
&=2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}2^{\left(2\alpha-2-\frac{3}{p'}-\frac{\lambda}{p}\right)\log_2\gamma}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\eta\right)\widehat{u_0}(\eta)\right\|_{M_p^\lambda}\\
&=2^{([\log_2\gamma]-\log_2\gamma)\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}2^{(j-[\log_2\gamma])\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\eta\right)\widehat{u_0}(\eta)\right\|_{M_p^\lambda}\\
&\approx2^{(j-[\log_2\gamma])\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\times\left\|\varphi\left(2^{-j+[\log_2\gamma]}\eta\right)\widehat{u_0}(\eta)\right\|_{M_p^\lambda}.
\end{aligned}$$

则说明

$$\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)q}\|f_j\|_{M_p^\lambda}^q\right\}^{1/q}\approx\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}},$$

由于

$$\varphi_j(\xi)\widehat{\mu_{0,\gamma}}(\xi)=\sum_{|k-j|\le2}\varphi_j(\xi)f_k(\xi),$$

则

$$\|u_{0,\gamma}\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}} \approx \|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.$$

3. 定理证明

首先，考虑非齐次线性分数阶方程

$$\begin{cases} u_t+(-\Delta)^{\alpha}u=f(t,x) & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3, \\ u(0,x)=u_0(x) & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{6}$$

有以下结论。

引理 3.1 [10] 若 $I=[0,T),1\le T<\infty, s\in\mathbb{R},1\le p<\infty,1\le q\le\infty,0\le\lambda<n$，当 $f\in\mathcal{L}^1\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{s}\right)$ 且 $u_0\in\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{s}$，则柯西问题(6)的解 $u(t,x)$ 满足

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty\left(I;\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{s}\right)}+\|u\|_{\mathcal{L}^1\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{s+2\alpha}\right)}\le\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^{\alpha}\right)\left(\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{s}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{s}\right)}\right).$$

命题 3.1 若 $1\le p<\infty,1\le\rho\le\infty,1\le q\le 2,1\le\alpha<\dfrac{3+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}{4-\frac{2\alpha}{\rho}},0\le\lambda<n$，设

$$X=\mathcal{L}^\infty\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)\cap\mathcal{L}^\rho\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}\right),$$

其范数为

$$\|u\|_X=\|u\|_{\mathcal{L}^\infty\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}+\|u\|_{\mathcal{L}^\rho\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}\right)}.$$

存在一个常数 $C=C(\alpha,p,q)>0$ 与 α,p,q 有关，使得

$$\|\nabla\cdot(v\nabla u)\|_{\mathcal{L}^\rho\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}\right)}\le C\mu^{-1}\|u\|_X\|v\|_X \tag{7}$$

证明. 首先引入一些标准逻辑算子，设

$$u_j=\hat{\Delta}_j u,\quad \dot{S}_j u=\sum_{k\le j-1}\Delta_k u,\quad \tilde{\dot{\Delta}}_j u=\sum_{|k-j|\le 1}\dot{\Delta}_k u$$

利用 Bony’s 仿积分解与 quasi-orthogonality 性质对 Littlewood-Paley 分解，固定 j，有

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_j(v\nabla u)&=\sum_{|k-j|\le 4}\dot{\Delta}_j\left(\dot{S}_{k-1}v\dot{\Delta}_k\nabla u\right)+\sum_{|k-j|\le 4}\dot{\Delta}_j\left(\dot{S}_{k-1}\nabla u u_k v\right)+\sum_{k\ge j-3}\dot{\Delta}_j\left(\dot{\Delta}_k v\tilde{\dot{\Delta}}_k\nabla u\right)\\&=I_j+II_j+III_j\ .\end{aligned}$$

则

$$
\begin{aligned}
&\left\|\partial(v\nabla u)\right\|_{\mathcal{L}^{\rho}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}\right)} \\
&\lesssim\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_j(v\nabla u)}\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{I}_j\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\quad+\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{II}_j\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\quad+\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{III}_j\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

由 Morrey 空间的 Young’s 不等式(3)和引理 2.3 当 $|\gamma|=0$ 时，可以得到

$$
\begin{aligned}
\left\|\widehat{I}_j\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}^{q}&\le\sum_{|k-j|\le4}\left\|\widehat{\dot{S}_{k-1}v\dot{\Delta}_k\nabla u}\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)} \\
&\le\sum_{|k-j|\le4}\left\|\widehat{v}_k\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}\sum_{l\le k-2}\left\|\widehat{\nabla u_l}\right\|_{L^{\infty}\left(I,L^1\right)} \\
&\le\sum_{|k-j|\le4}\left\|\widehat{v}_k\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}\sum_{l\le k-2}2^{l\left(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+1\right)}\left\|\widehat{u}_l\right\|_{L^{\infty}\left(I,M_p^{\lambda}\right)} \\
&\le\sum_{|k-j|\le4}\left\|\widehat{v}_k\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}\sum_{l\le k-2}2^{l\left(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+1\right)}2^{-l(2\alpha-1)}2^{l(2\alpha-1)}\left\|\widehat{u}_l\right\|_{L^{\infty}\left(I,M_p^{\lambda}\right)} \\
&\le\sum_{|k-j|\le4}\left\|\widehat{v}_k\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}\left(\sum_{l\le k-2}2^{l(2\alpha-1)q'}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|u\right\|_{\ell^{\infty}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)} \\
&\lesssim\sum_{|k-j|\le4}2^{k(2\alpha-1)}\left\|\widehat{v}_k\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}\left\|u\right\|_{\ell^{\infty}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}
\end{aligned}
$$

等式两端同时乘以 $2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}\right)}$ 并且取 l^q 模，可得到

$$
\begin{aligned}
&\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{I}_j\right\|_{L^{\rho}\left(I,M_p^{\lambda}\right)}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim\left\|v\right\|_{\ell^{\rho}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}\right)}\left\|u\right\|_{\ell^{\infty}\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

同理可得，第二部分可得

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{I}_j\right\|^q_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\right\}^{\frac{1}{q}}\\&\lesssim\|u\|_{\ell^\rho\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\|v\|_{\ell^\infty\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}.\end{aligned}\tag{10}$$

估计第三部分 III_j，设

$$III_{jk}:=\dot{\Delta}_j\left(\sum_{|i-k|\le1}\dot{\Delta}_iv\dot{\Delta}_i\nabla u\right)=\sum_{i=-1}^{1}\dot{\Delta}_j\left(\dot{\Delta}_k\nabla u\dot{\Delta}_{i+k}v\right).$$

由 Morrey 空间的 Young’s 不等式(3)和引理 2.3 当 $|\gamma|=0$ 时，可得到

$$\begin{aligned}&2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}\left\|\widehat{III}_{jk}\right\|_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\\&\le\sum_{i=-1}^{1}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}\left\|\widehat{\dot{\Delta}_ku\dot{\Delta}_{i+k}\nabla v}\right\|_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\\&\le\sum_{i=-1}^{1}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}\left\|\hat{u}_k\right\|_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\left\|\widehat{\nabla v}_{i+k}\right\|_{L^\infty\left(I,L^1\right)}\\&\le\sum_{i=-1}^{1}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}2^{(i+k+1)\left(\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\left\|\hat{u}_k\right\|_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\left\|\hat{v}_{i+k}\right\|_{L^\infty\left(I,M^\lambda_p\right)}\\&=\sum_{i=-1}^{1}2^{(j-k)\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}2^{i(2\alpha-1)}\left(2^{k\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}\left\|\hat{u}_k\right\|_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\right)\times\left(2^{(i+k)\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\left\|\hat{v}_{i+k}\right\|_{L^\infty\left(I,M^\lambda_p\right)}\right).\end{aligned}$$

对等式两端同时取 ℓ^q 的范数，当 $\alpha<\dfrac{3+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}{4-\frac{2}{\rho}}$ 时，$3-4\alpha+\dfrac{2\alpha}{\rho}+\dfrac{3}{p'}+\dfrac{\lambda}{p}>0$，由 Hölder’s 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{III}_j\right\|^q_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le\left(\left(\sum_{l\le3}\sum_{i=-1}^{1}2^{l\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}2^{(j-l)\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}2^{i(2\alpha-1)}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\times\left\|\hat{u}_{j-l}\right\|_{L^\rho\left(I,M^\lambda_p\right)}2^{(i+j-l)\left(2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}\right)}\left\|\hat{v}_{j+i-l}\right\|_{L^\infty\left(I,M^\lambda_p\right)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le\sum_{i=-1}^{1}\sum_{l\le3}2^{l\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)}2^{i(2\alpha-1)}\|u\|_{\ell^\rho\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\|v\|_{\ell^\infty\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\right)}\end{aligned}$$

由 $1\le q\le2$，有 $q\le q'$ 且 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}\hookrightarrow\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q'}$，则

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\left(3-4\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}+\frac{2\alpha}{\rho}\right)q}\left\|\widehat{III}_j\right\|^q_{L^\rho\left(I,M_p^\lambda\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim\|u\|_{\mathcal{L}^\rho\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{p}}\right)}\|v\|_{\mathcal{L}^\infty\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

由(8)，(9)，(10)，(11)联立可得等式(7)成立。

引理 3.2 设$\left(X,\|\cdot\|\right)$为 *Banach* 空间，$B:X\times X\mapsto X$ 是一个有界线性算子，对$\forall u,v\in X$，存在一个常数$\eta>0$使得$\|B(u,v)\|_X\le\eta\|u\|_X$。若$0<\varepsilon<\frac{1}{4\eta}$且$y\in X$使得$\|y\|_X\le\varepsilon$，方程$x:=y+B(x,x)$存在一个解$\bar{x}\in X$且$\|\bar{x}\|_X\le 2\varepsilon$。$\bar{x}$是球$\bar{B}(0,2\varepsilon)$内唯一解。此外，该解$\bar{x}$对$y$是连续依赖的。

即当$\|y'\|_X<\varepsilon$，$x':=y'+B(x',x')$，$\|x'\|_X\le 2\varepsilon$，则$\|\bar{x}-x'\|_X\le\frac{1}{1-4\varepsilon\eta}\|\bar{y}-y'\|_X$。

定理 2.1 证明. 由引理 3.2 可知当确初值很小时，该函数是一个向量场，其范数是三个分量范数之和。因此对方程(1)由常数变易法可得

$$
\begin{aligned}
u(t,x)&=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}u_0-\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)(-\Delta)^\alpha}\nabla\cdot(u\nabla u)(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau \\
&=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}u_0+B(u,u).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

当$u_0=0$且$f=\nabla\cdot(u\nabla u)$时，$B(u,v)$是热方程(6)的解。当$s=2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}$由引理 3.1 和当$\rho=1$，由命题 3.1 可得

$$
\begin{aligned}
\|B(u,v)\|_X&\le\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)\|\nabla\cdot(u\nabla u)\|_{\mathcal{L}^1\left(I,\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}\right)} \\
&\le\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)C\|u\|_X\|v\|_X.
\end{aligned}
$$

由引理 3.2 知，当$\left\|\mathrm{e}^{-\mu t(-\Delta)^\alpha}u_0\right\|_X<R$，其中$R=\frac{1}{4\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)C}$时，方程(12)在$B(0,2R):=\left\{x\in X:\|x\|_X\le 2R\right\}$内存在唯一解。当$u_0=u_0$且$f=0$时，$\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}u_0$是耗散方程(6)的解。所以，由定理 3.1 有

$$
\left\|\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}u_0\right\|_X\le\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.
$$

因此，若$\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}\le C_0$，其中$C_0=\frac{1}{4\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)^2C}$，则方程(13)存在唯一解$u\in X$，并且满足

$$
\|u\|_X\le 2\left(1+\left(\frac{16}{9}\right)^\alpha\right)\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}_{p,\lambda,q}^{2-2\alpha+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}}.
$$

参考文献

[1] Farwig, R. (2017) Jean Leray: Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **119**, 249-272. https://doi.org/10.1365/s13291-017-0160-y

[2] Kato, T. (1972) Nonstationary Flows of Viscous and Ideal Fluids in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Functional Analysis*, **9**, 296-305. https://doi.org/10.1016/0022-1236(72)90003-1

[3] Cannone, M. and Wu, G. (2012) Global Well-Posedness for Navier-Stokes Equations in Critical Fourier-Herz Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **75**, 3754-3760. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.01.029

[4] Kato, T. (1992) Strong Solutions of the Navier-Stokes Equation in Morrey Spaces. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, **22**, 127-155. https://doi.org/10.1007/bf01232939

[5] Cannone, M. (1995) Ondellettes, Paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur.

[6] Hopf, E. (1950) Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. *Mathematische Nachrichten*, **4**, 213-231. https://doi.org/10.1002/mana.3210040121

[7] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/bf00276188

[8] Lei, Z. and Lin, F. (2011) Global Mild Solutions of Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **64**, 1297-1304. https://doi.org/10.1002/cpa.20361

[9] Xiao, W., Chen, J., Fan, D. and Zhou, X. (2014) Global Well-Posedness and Long Time Decay of Fractional Navier-Stokes Equations in Fourier-Besov Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 463639. https://doi.org/10.1155/2014/463639

[10] El Baraka, A. and Toumlilin, M. (2017) Global Well-Posedness for Fractional Navier-Stokes Equations in Critical Fourier-Besov-Morrey Spaces. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, **3**, 1-13. https://doi.org/10.1515/mjpaa-2017-0001