Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(6), 148-163
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146308

Hans汉斯

抛物方程的变网格连续时空有限体积元法

肖宇宇[1]，何斯日古楞[2]，陈　娟[3]

[1]内蒙古化工职业学院通识教育教学部，内蒙古　呼和浩特
[2]呼和浩特民族学院数学与大数据学院，内蒙古　呼和浩特
[3]包头师范学院数学科学学院，内蒙古　包头

收稿日期：2025年5月19日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月19日

摘　要

从三次Lagrange插值最佳应力点的理论出发，本文提出一种变网格连续时空有限体积元格式，旨在解决抛物方程数值求解问题。通过耦合Legendre-Lobatto节点的Lagrange插值多项式与Gauss积分准则，在时空非匹配网格剖分条件下严格证明了数值解的存在唯一性，并建立立$L^\infty\left(L^2\right)$和$L^\infty\left(H^1\right)$的最优阶误差估计理论。数值实验结果表明收敛数据与理论预测高度一致，验证了算法在非均匀网格环境中的计算优势与理论分析的有效性。

关键词

抛物方程，变网格连续时空元，有限体积元法，误差估计

Variable Mesh Continuous Space-Time Finite Volume Element Method for Parabolic Equations

Yuyu Xiao[1], Siriguleng He[2], Juan Chen[3]

[1]General Education Department, Inner Mongolia Vocational College of Chemical Engineering, Hohhot Inner Mongolia
[2]College of Mathematics and Big Data Science, Hohhot Minzu College, Hohhot Inner Mongolia
[3]School of Mathematical Sciences, Baotou Teachers' College, Baotou Inner Mongolia

Received: May 19th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

Based on the theoretical framework of cubic Lagrange interpolation with optimal stress nodes, this

文章引用: 肖宇宇, 何斯日古楞, 陈娟. 抛物方程的变网格连续时空有限体积元法[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 148-163. DOI: 10.12677/aam.2025.146308

study develops a variable mesh continuous space-time finite volume element scheme to resolve numerical challenges in solving parabolic equations. By integrating Lagrange interpolation polynomials at Legendre-Lobatto nodes with Gauss quadrature rules, we rigorously prove the existence and uniqueness of numerical solutions under spacetime non-matching grid partitions. Optimal-order error estimates in $L^{\infty}(L^{2})$ and $L^{\infty}(H^{1})$ norms are theoretically established. Numerical experiments demonstrate excellent agreement between convergence rates and theoretical predictions, confirming the computational advantages of the proposed algorithm in non-uniform grid environments and the validity of theoretical analysis.

Keywords

Parabolic Equations, Variable Mesh Continuous Space-Time Elements, Finite Volume Element Method, Error Estimates

1. 引言

连续时空有限元方法自 20 世纪 80 年代发展以来，其时空离散方式主要呈现两种典型特征：其一为固定空间网格方法，即在所有时间层采用相同的空间剖分[1]-[4]，其二为变网格方法，允许不同时间层对应不同的空间剖分[5]-[7]，尽管变网格方法在理论上具有显著优势，但相关研究仍较为有限，且多集中于特定类型的偏微分方程。

变网格连续时空有限元方法的理论分析框架最早由 Karakashian 和 Makridakis (1999)建立。他们针对非线性 Schrödinger 方程，在弱时空网格约束条件下，实现了最优 $L^{\infty}(L^{2})$ 和 $L^{\infty}(H^{1})$ 模误差估计[5]。其核心创新在于引入基于 Legendre 与 Lobatto 点的 Lagrange 插值多项式及 Gauss 积分准则，巧妙结合插值多项式特性与积分高精度优势，为后续研究奠定了基础。基于此，候和李(2008)将变网格方法拓展至半线性抛物方程，并得到了最大模 $L^{\infty}(L^{2})$ 误差估计[8]，进一步地，赵和李(2017)针对不含对流项的 Sobolev 方程，在无时空网格限制条件下，建立了 $L^{\infty}(L^{2})$ 和 $L^{\infty}(H^{1})$ 范数的误差估计，显著扩展了方法的适用范围[7]。

相比于文献[5]-[8]的方法，本文突破传统有限元框架，将有限体积元方法引入变网格时空离散体系。所提方法兼具双重优势：一方面继承有限体积元方法的高精度与计算高效性，另一方面严格保持物理量的局部守恒特性。这一创新不仅弥补了现有变网格方法在守恒性方面的不足，还为多尺度、多物理场问题的数值模拟提供了更稳健的解决方案。

本文使用标准的 Sobolev 空间 $H^{m}([a,b])$ 及其范数 $\|\upsilon\|_{m}$ 与半范数 $|\upsilon|_{m}$， $L^{2}([a,b])$ 空间及其相应的内积。文中常数 c, c_{i} 均与时空步长无关，且在不同上下文中可能取不同值。

2. 构造变网格时空有限体积元格式

考虑如下抛物方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{t}-\varepsilon u_{xx}+\gamma u=f(x,t), & (x,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \\ u(x,0)=u(x), & x\in\bar{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

其中$\Omega=(a,b)$，$(0,T]$为时间区间，$u(x,t)$是未知函数，ε和γ是两个正常数，$u_0(x,t)$和$f(x,t)$是给定的光滑函数。

本文基于等距节点三次 Lagrange 插值的导数超收敛特性。构建了一种高精度时空离散格式。在$[-h,h]$上，用等距节点$(-h,u(-h)),\left(-\frac{h}{3},u\left(-\frac{h}{3}\right)\right),\left(\frac{h}{3},u\left(\frac{h}{3}\right)\right),(h,u(h))$构造插值多项式$\prod_h u$，令$\xi=\frac{x}{h}$，则

$$\begin{aligned}\prod_h u=&-\frac{(9\xi^2-1)(\xi-1)}{16}u(-h)+\frac{9(3\xi-1)(\xi^2-1)}{16}u\left(-\frac{h}{3}\right)\\&-\frac{9(3\xi+1)(\xi^2-1)}{16}u\left(\frac{h}{3}\right)+\frac{(9\xi^2-1)(\xi+1)}{16}u(h)\end{aligned}$$

对插值节点函数值$u(-h),u\left(-\frac{h}{3}\right),u\left(\frac{h}{3}\right),u(h)$在$x_0$处进行 Taylor 展开，可得

$$\begin{aligned}\left(\prod_h u\right)'(x_0)=&\frac{1}{16h^3}\Big[\left(h^2+18hx_0-27x_0^2\right)u(-h)-9\left(3h^2+2hx_0-9x_0\right)u\left(-\frac{h}{3}\right)\\&+\left(27h^2-18hx_0-81x_0^2\right)u\left(\frac{h}{3}\right)+\left(-h^2+18hx_0+27x_0^2u(h)\right)\Big]\\=&u'(x_0)+\frac{1}{54}\left(5h^2x_0-9x_0^3\right)u^{(4)}(x_0)-\frac{1}{1080}\left(h^4+70h^2x_0^2-135x_0^4\right)u^{(5)}(x_0)+o\left(h^5\right).\end{aligned}$$

可见，当$x_0=\pm\frac{\sqrt{5}h}{3}$及$x_0=0$时，$\left(\prod_h u\right)'(x_0)=u'(x_0)+o\left(h^4\right)$。

这表明在标准单元$[-1,1]$上，上述三点构成等距节点三次 Lagrange 插值的导数超收敛点。

基于此，我们建立时间间断时空有限体积元格式，首先将时间区间$[0,T]$离散为$0=t^0<t^1<\cdots<t^N=T$，定义时间单元$I_n=\left(t^n,t^{n+1}\right]$，步长$\Delta t_n=t^{n+1}-t^n,n=0,1,\cdots,N-1$。记$\Delta t=\max\limits_{0\le n\le N-1}\Delta t_n$。在每个时空层$I_n\times\Omega$上，采用原始空间剖分$\Sigma_h^n$，其单元定义为$\tau_i=\left[x_{3i-3},x_{3i}\right],(i=1,2,\cdots,M)$。为进一步加密，将每个空间单元进行三等分剖分，记剖分节点为$x_{3i-3}<x_{3i-2}<x_{3i-1}<x_{3i}$，$h_i$为步长。设$h_n=\max\limits_{1\le i\le M}h_i$，$h=\max\limits_{0\le n\le N-1}h_n$。允许采用非匹配网格剖分$\Sigma_h^n$，即在时间界面$t=t^n$处可存在网格节点不连续。

在单元$\tau_i=\left[x_{3i-3},x_{3i}\right]$上，确定三次 Lagrange 插值的三个最佳应力点：$x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}},x_{3i-\frac{3}{2}},x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$，建立控制体$\tau_i^*=\left[x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}},x_{3i-\frac{3}{2}}\right]$，$\tau_i^{**}=\left[x_{3i-\frac{3}{2}},x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right](i=1,2,\cdots,M)$和$\tau_i^{***}=\left[x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}},x_{3(i+1)-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right](i=1,2,\cdots,M-1)$，$\tau_0^{***}=\left[x_0,x_{3-\frac{\sqrt{5}}{2}}\right]$，$\tau_M^{***}=\left[x_{3M-\frac{\sqrt{5}}{2}},x_{3M}\right]$。并建立$\Sigma_h u$的对偶剖分为$\Sigma_h^{*n}=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{M}\tau_i^*\right)\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{M}\tau_i^{**}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{i=0}^{M}\tau_i^{***}\right)$，各时空层在界面$t=t^n$处允许网格非匹配。

试探函数空间$S_h^n\subset H_0^1(\Omega)$定义为分片三次 Lagrange 有限元空间：$S_h^n=\left\{u_h:u_h\in C(\Omega)\text{且}u_h|_{\tau_i}\text{为三次 Lagrange 多项式},u_h|_{\partial\Omega}=0\right\}$。记$t^0$对应的空间为$S_h^{-1}$，令$S_h^{-1}=S_h^0$。同时构造$q$次分块多项式$\varphi:\Omega\times I_n\to R$组成的空间：

$$V^q=\left\{\varphi:\varphi|_{\Omega\times I_n}=\sum_{j=0}^{q}t^j\chi_j(x),\chi_j(x)\in S_h^n\right\}$$

根据V^q的空间特性可知，对$\forall t\in I_n$，函数φ是S_h^n上关于x的三次多项式，对$\forall x\in\Omega$，函数φ是关

于 t 的 q 次分片多项式，在时间节点 $t^n\left(n=1,2,\cdots,N-1\right)$ 处允许间断。进一步，令 $V_n^q=\left\{\varphi\big|_{I_n\times\Omega}:\varphi\in V^q\right\}$。

构造检验函数空间时，令时空片 $I_n\times\Sigma_h^{*n}$ 中的 $S_h^{*n}\subset H_0^1(\Omega)$ 为分片常函数空间，即

$$S_h^{*n}=\left\{\upsilon_h:\upsilon_h\big|_{\tau_i^*,\tau_i^{**},\tau_i^{***}}\text{为常数, 且}\,\upsilon_h\big|_{\tau_0^{***}}=0,\upsilon_h\big|_{\tau_M^{***}}=0\right\},$$

$$V^{*q}=\left\{\varphi:\varphi\big|_{\Omega\times I_n}=\sum_{j=0}^{q}t^j\chi_j(x),\chi_j(x)\in S_h^{*n}\right\},$$

$$V_n^{*q}=\left\{\varphi\big|_{I_n\times\Omega}:\varphi\in V^{*q}\right\}。$$

为简化分析，取参数 $\varepsilon=\gamma=1$。在对偶时空单元 Σ_h^{*n} 上对方程(1)式积分，引入迁移算子 $\pi_h^*:S_h^n\to S_h^{*n}$，对问题(1)构建如下变分格式：求 $U\in V^q$，使得

$$\begin{cases}\int_{I_n}\left(U_t,\pi_h^*\upsilon_t\right)\mathrm{d}t+\int_{I_n}a\left(U,\pi_h^*\upsilon_t\right)\mathrm{d}t=\int_{I_n}\left(f,\pi_h^*\upsilon_t\right)\mathrm{d}t, & \forall\upsilon\in V_n^q,\\ U^{n+}=\prod^n U\left(t^n\right), & n=0,1,\cdots,N-1.\end{cases}\tag{2}$$

上式可等价地写为

$$\begin{cases}\int_{I_n}\left(U_t,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t+\int_{I_n}a\left(U,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t=\int_{I_n}\left(f,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t, & \forall\varphi\in V_n^{q-1},\\ U^{n+}=\prod^n U\left(t^n\right), & n=0,1,\cdots,N-1.\end{cases}\tag{3}$$

其中初值满足 $U^0=u^0,\upsilon^{n+}=\lim\limits_{t\to t^{n+}}\upsilon(t)$。数值解从 S_h^{n-1} 投影到 S_h^n 上的恰当算子用 $\prod^n$ 来表示。

数值求解格式允许各个时空片间的变网格剖分，一般选取 S_h^n 上的椭圆投影或 L^2 投影算子。若 $S_h^{n-1}\subset S_h^n$，则解函数 U 在节点 t^n 处保持连续。即 $U^{n+}=U\left(t^n\right)$，定义控制体 $\tau_i^*,\tau_i^{**},\tau_i^{***}$ 上的特征函数分别为 $\psi_{3i-2},\psi_{3i-1},\psi_{3i}$，则

$$\pi_h^*\omega_h=\sum_{i=1}^{M}\left(\omega_{3i-2}\psi_{3i-2}+\omega_{3i-1}\psi_{3i-1}\right)+\sum_{i=1}^{M-1}\omega_{3i}\psi_{3i},$$

$$a\left(u_h,\pi_h^*\upsilon_h\right)=\sum_{i=1}^{M}\left(\upsilon_{3i-2}a\left(u_h,\psi_{3i-2}\right)+\upsilon_{3i-1}a\left(u_h,\psi_{3i-1}\right)\right)+\sum_{i=1}^{M-1}\upsilon_{3i}a\left(u_h,\psi_{3i}\right),$$

$$a\left(u_h,\psi_{3i-2}\right)=u_h'\left(x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)-u_h'\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)+\int_{\tau_i^*}u_h\mathrm{d}x,$$

$$a\left(u_h,\psi_{3i-1}\right)=u_h'\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)-u_h'\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)+\int_{\tau_i^{**}}u_h\mathrm{d}x,$$

$$a\left(u_h,\psi_{3i}\right)=u_h'\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)-u_h'\left(x_{3(i+1)-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)+\int_{\tau_i^{***}}u_h\mathrm{d}x.$$

定义 1 椭圆投影算子 $P_h^n:H_0^1(\Omega)\to S_h^n$ 的定义如下[9]-[11]

$$\tilde{a}\left(P_h^n u-u,\pi_h^*\upsilon\right)=0,\quad\forall\upsilon\in S_h^n,$$

其中

$$\begin{aligned}&\tilde{a}\left(u_h,\pi_h^*\upsilon_h\right)\\&=\sum_{i=1}^{M}\left\{\upsilon_{3i-2}\left[u_h'\left(x_{3i-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)-u_h'\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)\right]+\upsilon_{3i-1}\left[u_h'\left(x_{3i-\frac{3}{2}}\right)-u_h'\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\right]+\upsilon_{3i}\left[u_h'\left(x_{3i-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)-u_h'\left(x_{3(i+1)-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

于是对 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^5(\Omega)$，定义 1 中的椭圆投影算子有估计式[9]

$$\left\|u-P_h^n u\right\|\le c\left\|h_n^4 u\right\|_5,\ \left\|\left(u-P_h^n u\right)_x\right\|\le c\left\|h_n^3 u\right\|_4 \tag{4}$$

定义 2 定义 L^2 投影算子 $P^n:H_0^1(\Omega)\to S_h^n$，则有

$$\left(P^n\upsilon-\upsilon,\chi\right)=0\quad\forall\chi\in S_h^n,$$

且满足估计式

$$\left\|P^n\upsilon\right\|\le\left\|\upsilon\right\|,\quad\forall\upsilon\in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

定义 3 定义时空范数为

$$\left\|\upsilon\right\|_n=\left(\int_{I_n}\left\|\upsilon\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\forall\upsilon\in L^2\left(I_n;L^2(\Omega)\right).$$

3. 时空有限体积元解的存在唯一性

Lagrange 插值基函数及 Gauss 积分准则被构造通过 Legendre 多项式的零点，可证数值解的存在唯一性。Gauss-Legendre 积分公式如下：

$$\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\cong\sum_{j=1}^{q}\omega_j g\left(s_j\right),\quad 0<s_1<s_2\cdots<s_q<1,\quad q\ge1,$$

该式对所有次数不超过 $2q-1$ 的多项式精确成立。

定义基于 q 个零点 $s_1,s_2,\cdots,s_q$ 的 Lagrange 插值基函数 $\left\{l_i(s)\right\}_{i=1}^{q}$

$$l_i(s)=\prod_{j=1,i\ne j}^{q}\frac{s-s_j}{s_i-s_j}$$

通过线性变换 $t=t^n+s\Delta t_n$ 将区间 $\overline{I}_n$ 映射到 $[0,1]$，可得如下性质

$$t^{n,j}=t^n+s_j\Delta t_n,\quad t^{n,q}=t^{n+1},\quad l_{n,i}(t)=l_i(s),$$

$$\omega_{n,i}=\int_{t^n}^{t^{n+1}}l_{n,i}(t)\mathrm{d}t=\Delta t_n\int_0^1 l_i(s)\mathrm{d}s=\Delta t_n\omega_i,\quad i=1,2,\cdots,q.$$

进一步引入对应于 $q+1$ 个点 $0=s_0<s_1\cdots<s_q<1$ 的 q 次 Lagrange 插值多项式 $\left\{\hat{l}_i(s)\right\}_{i=0}^{q}$，即 $\hat{l}_i(s)=\prod_{j=0,i\ne j}^{q}\frac{s-s_j}{s_i-s_j}$。若取 $\left\{\hat{l}_{n,i}(t)\right\}_{i=0}^{q}$ (其中 $\hat{l}_{n,i}(t)=\hat{l}_i(s)$)作为空间 $P_q(I_n)$ 的基函数，则解函数 $U|_{I_n}$ 可唯一由函数 $U^{n,j}\in S_h^n\left(U^{n,j}=U\left(x,t^{n,j}\right)\right)$ 表示，即

$$U(x,t)=\sum_{j=0}^{q}\hat{l}_{n,j}(t)U^{n,j}(x),\quad(x,t)\in\Omega\times I_n,\quad t^{n,0}=t^n,$$

数值格式中，初值满足 $U^{n,0}=U^{n+}=\prod^n U\left(t^n\right)$，其中 $U\left(t^n\right)$ 由前一时间层确定。在(3)中取 $\varphi=l_{n,i}\phi$，(其中 $\phi\in S_h^n$)，结合 Gauss-Legendre 积分公式可得

$$\sum_{j=1}^{q}m_{ij}\left(U^{n,j},\pi_h^*\phi\right)+\Delta t_n\omega_i a\left(U^{n,i},\pi_h^*\phi\right)=-m_{i0}\left(U^{n+},\pi_h^*\phi\right)+\int_{I_n}l_{n,i}\left(f,\pi_h^*\phi\right)\mathrm{d}t \tag{6}$$

其中

$$m_{ij}=\int_{I_n}l_{n,i}(t)\hat{l}'_{n,j}(t)\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,q;\ j=0,1,\cdots,q.$$

定义与 Δt_n 无关的 $q\times q$ 矩阵 M,N，其中

$$N=\left(N_{ij}\right)=\omega_i s_i l_j'\left(s_i\right),\quad i,j=1,2,\cdots,q,$$
$$M=\left(W+N\right)D^{-1},\qquad W:=diag\left\{\omega_1,\omega_2\cdots,\omega_q\right\}.$$

由于 $\hat{l}_i\left(s\right)=\dfrac{s}{s_i}l_i\left(s\right)\left(i=1,2,\cdots,q\right)$，$\hat{l}_j\left(s\right)=\dfrac{s}{s_j}\hat{l}_j'\left(s\right)+\dfrac{l_j\left(s\right)}{s_j}$，所以结合上式与 Gauss-Legendre 求积公式可得

$$m_{ij}=\int_{I_n}l_{n,i}\left(t\right)\hat{l}_{n,j}'\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\hat{l}_j\left(s\right)l_i\left(s\right)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1\frac{1}{s_j}\left[l_j\left(s\right)+s\hat{l}_j\left(s\right)\right]l_i\left(s\right)\mathrm{d}s=\frac{\omega_i}{s_j}\left[\delta_{i,j}+s_i l_j'\left(s_i\right)\right],$$

因此 $m_{ij}=M_{ij}$。

引理 1 [5]　设矩阵 $\tilde{M}=D^{-\frac{1}{2}}MD^{\frac{1}{2}},D=diag\left\{s_1,s_2\cdots,s_q\right\}$，则有

$$X^{\mathrm{T}}\tilde{M}X\ge\alpha\left|X\right|^2=\alpha\left(\sum_{i=1}^{q}x_i^2\right),\quad\forall X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_q\right)^{\mathrm{T}}\in R^q.$$

其中 $\alpha:=\dfrac{1}{2}\min\limits_j\dfrac{\omega_j}{s_j}$。

引理 2 [9]-[12]　对于任意的 $u_h\in S_h^n$，有

$$c_1\left\|u_h\right\|^2\le\left(u_h,\pi_h^*u_h\right)\le c_2\left\|u_h\right\|^2,\ \left\|\pi_h^*u_h\right\|\le c\left\|u_h\right\|.$$

引理 3 [9]-[11]　对于充分小的 h，存在正常数 c_3,c_4 和 $c_5,\lambda<\infty$，使得

$$\tilde{a}\left(\upsilon,\pi_h^*\upsilon\right)\ge c_3\left|\upsilon\right|_1^2,\qquad\forall\upsilon\in S_h^n,$$
$$\left|a_1\left(\upsilon,\pi_h^*\upsilon\right)-\overline{a}_h\left(\upsilon,\pi_h^*\upsilon\right)\right|\le c_5h\left|\upsilon\right|_1^2,\quad\forall\upsilon\in S_h^n,$$
$$a\left(\upsilon,\pi_h^*\upsilon\right)+\lambda\left\|\upsilon\right\|^2\ge c_4\left\|\upsilon\right\|_1^2,\qquad\forall\upsilon\in S_h^n,$$

上述常数 β 满足 $r_{\min}>\beta>0,r_{\min}=\min\limits_{x\in\Omega}r\left(x\right)$，且

$$\overline{a}_h\left(\upsilon,\pi_h^*\upsilon\right)=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\sqrt{5}}{2}h_i\left(\left(r_{3i-2}-\beta\right)\upsilon_{3i-2}^2+\left(r_{3i-1}-\beta\right)\upsilon_{3i-1}^2\right)+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(h_i+h_{i+1}\right)\left(r_{3i}-\beta\right)\upsilon_{3i}^2\right]$$

下面定义有限维希尔伯特空间 $\left(S_h^n\right)^q$ (向量空间)，其内积与范数分别定义为

$$\left(\left(\Phi,\Psi\right)\right)=\sum_{i=1}^{q}\left(\phi_i\right),\quad\Phi=\left\{\phi_1,\phi_2\cdots,\phi_q\right\}^{\mathrm{T}},\Psi=\left\{\psi_1,\psi_2\cdots,\psi_q\right\}^{\mathrm{T}}\in\left(S_h^n\right)^q,$$

$\left(\sum\limits_{j=1}^{q}\left\|\cdot\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 记为 $\left\|\left|\cdot\right|\right\|$。

为证明解 U 的存在唯一性，利用矩阵 $\tilde{M}$ 的性质，I_n 上的插值形式将 U 表示为

$$U\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{q}s_j^{\frac{1}{2}}l_{n,j}'\left(t\right)\tilde{U}^{n,j}\left(x\right)+l_{n,0}'\left(t\right)U^{n+}\left(x\right),\quad\left(x,t\right)\in\Omega\times I_n,$$

其中 $\tilde{U}^{n,j}=s_j^{-\frac{1}{2}}U^{n,j},j=1,2,\cdots,q$。

在(3)中取 $\varphi=s_i^{-\frac{1}{2}}l_{n,i}\phi$，(其中 $\phi\in S_h^n$)，结合上式可得

$$\sum_{j=1}^{q}\tilde{m}_{ij}\left(\tilde{U}^{n,j},\pi_h^*\phi\right)+\Delta t_n\omega_i a\left(\tilde{U}^{n,i},\pi_h^*\phi\right)=-s_i^{\frac{1}{2}}\left(m_{i0}\left(U^{n+},\pi_h^*\phi\right)-\int_{I_n}l_{n,i}\left(f,\pi_h^*\phi\right)\mathrm{d}t\right),\quad i=1,2,\cdots,q. \tag{7}$$

这里 $\tilde{m}_{ij}=\tilde{M}_{ij}=s_j^{\frac{1}{2}}m_{ij}s_i^{-\frac{1}{2}},i,j=1,2,\cdots,q$。

定理 1 设 $U\left(t^n\right)$ 在前一时间层 I_{n-1} 给定，并设 $f\in L^2\left(I_n;L^2\right)$，当时间步长 Δt_n 充分小时，方程组(7)中存在唯一的解向量 $\left\{U^{n,j}\right\}_{j=1}^{q}\in\left(S_h^n\right)^q$，因此(1)存在唯一的解 $U\in V_n^q$。

证明 在(7)式中取 $\phi=\tilde{U}^{n,i}$，并对 i 从 1 到 q 求和，可得

$$\begin{aligned}\left(\left(L\left(\tilde{U}\right),\tilde{U}\right)\right)=&-\sum_{i=1}^{q}s_i^{\frac{1}{2}}m_{i0}\left(U^{n+},\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)+\sum_{i=1}^{q}s_i^{\frac{1}{2}}\int_{I_n}l_{n,i}\left(f,\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)\mathrm{d}t\\&-\sum_{i=1}^{q}\Delta t_n\omega_i a\left(\tilde{U}^{n,i},\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right),\qquad i=1,2,\cdots,q.\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\tilde{U}=\left(\tilde{U}^{n,1},\cdots,\tilde{U}^{n,q}\right)^{\mathrm{T}}\in\left(S_h^n\right)^q$，并记 $\left(\left(L\left(\tilde{U}\right),\tilde{U}\right)\right)=\sum_{i,j=1}^{q}\tilde{m}_{ij}\left(\tilde{U}^{n,j},\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)$。

由引理 1 和引理 2 对(8)式的左端进行整理可得

$$\sum_{i,j=1}^{q}\tilde{m}_{ij}\left(\tilde{U}^{n,j},\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)=\left(\left(\tilde{M}\tilde{U},\pi_h^*\tilde{U}\right)\right)\geq\alpha\left\|\tilde{U}\right\|^2. \tag{9}$$

选取 $\prod^n=P^n$，(P^n 是投影到 S_h^n 的 L^2 投影算子)。对于(8)右端逐项分析，

第一项，结合 Cauchy 不等式，Hölder 不等式以及引理 2、定义 3 可得

$$\left|\sum_{i=1}^{q}s_i^{\frac{1}{2}}m_{i0}\left(U^{n+},\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)\right|\leq c\left\|U\left(t^n\right)\right\|\cdot\left\|\tilde{U}\right\|. \tag{10}$$

第二项，利用 Hölder 不等式及引理 2 可得

$$\left|\sum_{i=1}^{q}s_i^{\frac{1}{2}}\int_{I_n}l_{n,i}\left(f,\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)\mathrm{d}t\right|\leq c\Delta t_n^{\frac{1}{2}}\left\|\tilde{U}\right\|\cdot\|f\|_n. \tag{11}$$

第三项，注意到 $\omega_i=\int_0^1 l_i^2(s)\mathrm{d}s>0$，则

$$\sum_{i=1}^{q}\Delta t_n\omega_i a\left(\tilde{U}^{n,i},\pi_h^*\tilde{U}^{n,i}\right)\geq 0. \tag{12}$$

将(8)~(12)结合可得

$$\left\|\tilde{U}\right\|\leq\frac{c}{\alpha}\left\{\left\|U\left(t^n\right)\right\|+\|f\|_n\right\}. \tag{13}$$

当 $U\left(t^n\right)$ 与 f 分别为零时，由(13)可知 $\tilde{U}=0$。结合线性方程组解的存在唯一性，证得问题(1)存在唯一解 $U\in V_n^q$。

4. 收敛性分析及误差估计

为进行收敛性分析，引入区间 I_n 上的 q 个点 $t^{n,1}<t^{n,2}<\cdots<t^{n,q}$ 确定的 Lagrange 插值算子 $\hat{I}_{n,q-1}^{GL}:C\left(I_n\right)\to P_{q-1}\left(I_n\right)$ 满足插值条件：

$$\left(\hat{I}_{n,q-1}^{GL}y\right)\left(t^{n,j}\right)=y\left(t^{n,j}\right),\quad j=1,2,\cdots,q. \tag{14}$$

利用 Gauss-Legendre 积分公式对次数不超过 $2q-1$ 多项式的精确性，可得对任意的 $\upsilon\in P_q\left(I_n\right)$ 及 $\phi\in P_{q-1}\left(I_n\right)$ 有

$$\int_{I_n}\left(\hat{I}_{n,q-1}^{GL}\upsilon\right)\phi \mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{q}\omega_{n,j}\left(\hat{I}_{n,q-1}^{GL}\upsilon\right)\left(t^{n,j}\right)\phi\left(t^{n,j}\right)=\sum_{j=1}^{q}\omega_{n,j}\upsilon\left(t^{n,j}\right)\phi\left(t^{n,j}\right)=\int_{I_n}\upsilon\phi \mathrm{d}t. \tag{15}$$

这表明将算子 $\hat{I}_{n,q-1}^{GL}$ 限定在空间 $P_q\left(I_n\right)$ 时，其是一个 L^2 投影算子。

为构建数值分析工具，引入 Gauss-Lobatto 积分公式如下

$$\int_0^1 g\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi\cong\sum_{j=0}^{q}b_j g\left(\xi_j\right), \tag{16}$$

其对所有不高于 $2q-1$ 次多项式都准确成立，积分节点 $0=\xi_0<\cdots<\xi_q=1$ 是 Lobatto 多项式 $L\left(x\right)=\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}x^{q-1}}\left[x\left(1-x\right)\right]^q$ 的 $q+1$ 个根，类比 Gauss-Legendre 点的定义方式，定义相应于区间 I_n 的 $\xi_{n,i}$ 和 $b_{n,i}$，进一步，为了定义函数 W，引入 $q+1$ 个 Lobatto 点确定 $t^n=\xi_{n,0}<\cdots<\xi_{n,q}=t^{n+1}$ 的 Lagrange 插值算子 $\hat{I}_{n,q}^{Lo}:C\left(\bar{I}_n\right)\to P_q\left(\bar{I}_n\right)$，即有

$$\left(\hat{I}_{n,q}^{Lo}y\right)\left(\xi_{n,j}\right)=y\left(\xi_{n,j}\right),\quad j=1,2,\cdots,q. \tag{17}$$

并且，定义 $W:\left[0,T\right]\to H_0^1\left(\Omega\right)$ 使得

$$W\left(x,t\right)\Big|_{I_n}=\hat{I}_{n,q}^{Lo}\omega\left(x,t\right),\quad \left(x,t\right)\in\Omega\times I_n. \tag{18}$$

其中

$$\omega\left(x,t\right)=P_h^n u\left(x,t\right),\quad \eta=u-\omega,\quad \left(x,t\right)\in\Omega\times I_n, n=0,1,\cdots,N-1.$$

为简化符号，将 W 仍记为 $W\big|_{I_n}$。此定义基于两点考虑：其一，$W\left(t^{n+1}\right)$ 和 W^{n+} 分别对应于 $\omega\left(t^{n+1}\right)$ 和 ω^{n+}。其二，便于后续理论分析中构造满足精度要求的积分准则。

引理 4 [5]　根据插值逼近性质，误差 $u-W\left(x,t\right)$ 满足以下估计式

$$\left\|u-W\right\|_n\le c\Delta t_n^{q+1}\left\|u^{(q+1)}\right\|_n+c\Delta t_n^{\frac{1}{2}}\max_{I_n}\left\|h_n^4 u\right\|_5,$$
$$\max_{I_n}\left\|u-W\right\|\le c\Delta t_n^{q+1}\max_{I_n}\left\|u^{(q+1)}\right\|+c\max_{I_n}\left\|h_n^4 u\right\|_5.$$

定理 2　假如 u 和 U 分别为方程(1)和(3)的解，并假设 $S_h^{n-1}\subset S_h^n\left(n=0,1,\cdots,N-1\right)$，则满足以下估计式

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,T]}\left\|u\left(t\right)-U\left(t\right)\right\|\le{}& c\max_n\Delta t_n^{q+1}\max_{I_n}\left(\left\|u^{(q+2)}\right\|+\left\|\Im u^{(q+1)}\right\|\right)\\&+ch^4\max_n\max_{I_n}\left(\left\|\Im u\right\|_5+\left\|u_t\right\|_5+\left\|u\right\|_5\right)+cN_c\max_n\left\|J\left[\omega^n\right]\right\|.\end{aligned} \tag{19}$$

上式 N_c 表示 $S_h^j\ne S_h^{j-1}\left(j=1,\cdots,N-1\right)$ 的总数，$J\left[\omega^n\right]:=\omega^n-\omega^{n+}=\left(P_h^n-P_h^{n-1}\right)u\left(t^n\right)$。

证明　令误差项 $e=U-u=\left(U-W\right)+\left(W-u\right)=\theta+\rho$。其中 ρ 的估计由引理 4 直接给出，故仅需对 θ 进行估计。基于变网格有限体积元格式(3)，函数 $\theta=\theta\big|_{I_n}=U-W$ 满足如下方程：

$$\begin{aligned}&\int_{I_n}\left(\theta_t,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t+\int_{I_n}a\left(\theta,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t\\&=-\left\{\left(W\left(t^{n+1}\right),\pi_h^*\varphi^{n+1}\right)-\int_{I_n}\left(W,\pi_h^*\varphi_t\right)\mathrm{d}t-\left(W^{n+},\pi_h^*\varphi^{n+}\right)\right\}-\int_{I_n}a\left(W,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left(f,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20}$$

其中对积分项 $\int_{I_n}\left(W_t,\pi_h^*\varphi\right)\mathrm{d}t$ 应用分部积分公式。在(20)中取 $\varphi=l_{n,i}\phi,\left(\phi\in S_h^n\right)$，结合 Gauss-Legendre 和 Gauss-Lobatto 及定义 1，可得关于 θ 的误差方程：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{q} m_{ij}\left(\theta^{n,j},\pi_h^*\varphi\right)+\Delta t_n\omega_i a\left(\theta^{n,i},\pi_h^*\varphi\right)\\&=\left(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4,\pi_h^*\varphi\right)+\omega_{n,i}\overline{a}\left(u^{n,i}-\omega^{n,i},\pi_h^*\varphi\right),\quad i=1,2,\cdots,q\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$\Sigma_1 := -l_{n,i}\left(t^{n+1}\right)\eta\left(t^{n+1}\right)-\sum_{j=0}^{q} b_{n,j}l'_{n,i}\left(\xi_{n,j}\right)u\left(\xi_{n,j}\right)-l_{n,i}\left(t^{n+}\right)\eta^{n+},$$

$$\Sigma_2 := \sum_{j=0}^{q} b_{n,j}l'_{n,i}\left(\xi_{n,j}\right)u\left(\xi_{n,j}\right)-\int_{I_n} l'_{n,i}\left(t\right)u\mathrm{d}t,$$

$$\Sigma_3 := \int_{I_n} l_{n,i}\left(t\right)\Im u\mathrm{d}t-\sum_{j=0}^{q} b_{n,j}l_{n,i}\left(\xi_{n,j}\right)\Im u\left(\xi_{n,j}\right),\quad \left(\Im u=-\varepsilon u_{xx}+\gamma u\right)$$

$$\Sigma_4 := \sum_{j=0}^{q} b_{n,j}l_{n,i}\left(\xi_{n,j}\right)\Im\eta\left(\xi_{n,j}\right).$$

上式中的 u 需满足

$$\left(u^{n+1},\pi_h^*\phi^{n+1}\right)-\int_{I_n}\left(u,\pi_h^*\phi_t\right)\mathrm{d}t+\int_{I_n} a\left(u,\pi_h^*\phi\right)\mathrm{d}t-\left(u^{n+},\pi_h^*\phi^{n+}\right)-\int_{I_n}\left(f,\pi_h^*\phi\right)\mathrm{d}t=0$$

令 $\tilde{\theta}^{n,j}=s_j^{-\frac{1}{2}}\theta^{n,j}\left(j=1,2,\cdots,q\right)$，在 I_n 上有 $\theta=\sum_{j=1}^{q} s_j^{\frac{1}{2}}\hat{l}_{n,j}\tilde{\theta}^{n,j}+\hat{l}_{n,0}\theta^{n+}$，则关于 $\tilde{\theta}^{n,j}$ 的(21)式等价为

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{q}\tilde{m}_{ij}\left(\tilde{\theta}^{n,j},\pi_h^*\phi\right)+\Delta t_n\omega_i a\left(\tilde{\theta}^{n,i},\pi_h^*\phi\right)\\&=s_i^{-\frac{1}{2}}\left\{-m_{i0}\left(\theta^{n+},l_{n,i}\left(t^n\right)\pi_h^*\phi\right)+\omega_{n,i}\overline{a}\left(u^{n,i}-\omega^{n,i},\pi_h^*\phi\right)+\left(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4,\pi_h^*\phi\right)\right\},\quad i=1,2,\cdots,q.\end{aligned}\tag{22}$$

引理 5 对任意的 $0\le n\le N-1$，下述估计式成立：

$$\begin{aligned}&\left\|\Sigma_1\right\|\le c\Delta t_n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I_n}\left\|h_n^4u_t\right\|_5^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\quad \left\|\Sigma_2\right\|\le c\Delta t_n^{q+\frac{3}{2}}\left\|u^{(q+2)}\right\|_n,\\&\left\|\Sigma_3\right\|\le c\Delta t_n^{q+\frac{3}{2}}\left\|\Im u^{(q+1)}\right\|_n,\qquad \left\|\Sigma_4\right\|\le c\Delta t_n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I_n}\left\|h_n^4\Im u\right\|_5^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{23}$$

其中 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 的定义由式(21)给出。

证明 基于 I_n 上的 Lobatto 积分准则，对任意的 $i=1,2,\cdots,q$，可得

$$l_{n,i}\left(t^{n+1}\right)-\sum_{j=0}^{q} b_{n,j}l'_{n,i}\left(\xi_{n,j}\right)-l_{n,i}\left(t^{n+}\right)=l_{n,i}\left(t^{n+1}\right)-\int_{I_n} l'_{n,i}\left(t\right)\mathrm{d}t-l_{n,i}\left(t^{n+}\right)=0$$

上式表明存在与 n 无关的常数 β_{ij}，使得

$$\Sigma_1=\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}\left(\eta\left(\xi_{n,j}\right)-\eta\left(\xi_{n,j-1}\right)\right)=\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}\int_{\xi_{n,j-1}}^{\xi_{n,j}}\eta_t\left(s\right)\mathrm{d}s.\quad \left(\eta\left(\xi_{n,0}\right):=\eta^{n+}\right)$$

由 $\eta_t=\left(I-P_h^n\right)u_t$ 及式(4)，可得

$$\left\|\Sigma_1\right\|\le c\int_{I_n}\left\|h_n^4u_t\right\|_5\mathrm{d}t\le c\Delta t_n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I_n}\left\|h_n^4u_t\right\|_5^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任意的 $x\in\Omega$，$l_{n,i}\hat{I}_{n,q}^{LO}\Im u$ 是关于 t 的一个 $2q-1$ 次多项式，有

$$\Sigma_3=\int_{I_n} l_{n,i}(t)\Im u\mathrm{d}t-\sum_{j=0}^{q} b_{n,j} l_{n,i}(\xi_{n,j})\Im u(\xi_{n,j})=\int_{I_n} l_{n,i}(t)\left(I-\hat{I}_{n,q}^{LO}\right)\Im u\mathrm{d}t.$$

结合 Hölder 不等式及插值算子的性质，得

$$\begin{aligned}\|\Sigma_3\| &\le c\left(\int_{I_n}|l_{n,i}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\left(I-\hat{I}_{n,q}^{Lo}\right)\Im u\right\|_n \\ &\le c\left(\Delta t_n\int_0^1|l_{n,i}(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\Delta t_n^{q+1}\left\|\Im u^{(q+1)}\right\|_n\le \Delta t_n^{q+\frac{3}{2}}\left\|\Im u^{(q+1)}\right\|_n.\end{aligned}$$

类似可得

$$\|\Sigma_4\|\le c\left(\int_{I_n}|l_{n,i}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I_n}\left\|\left(I-P_h^n\right)\Im u\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\le c\Delta t_n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I_n}\left\|h_n^4\Im u\right\|_5^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

为了估计Σ_2，定义区间$\left[t^n,t^{n+1}\right]$上基于$q+2$个节点的 Lagrange 插值算子$I_{n,q+1}^{Lo}$，基于区间$\left[t^n,t^{n+1}\right]$上的$q+1$个 Lobatto 点，对于给定的$x\in\Omega$，$l'_{n,i}I_{n,q+1}^{Lo}u$是一个关于t的$2q-1$次多项式，则有

$$\Sigma_2=\sum_{j=0}^{q} b_{n,j} l'_{n,i}(\xi_{n,j})u(\xi_{n,j})-\int_{I_n} l'_{n,i}(t)u\mathrm{d}t=\int_{I_n} l'_{n,i}(t)\left(I-I_{n,q+1}^{Lo}\right)u\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}\|\Sigma_2\| &\le c\left(\int_{I_n}|l'_{n,i}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\left(I-\hat{I}_{n,q+1}^{Lo}\right)u\right\|_n \\ &\le c\left(\Delta t_n^{-1}\int_0^1|l_{n,i}(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\Delta t_n^{q+2}\left\|u^{(q+2)}\right\|_n\le c\Delta t_n^{q+\frac{3}{2}}\left\|u^{(q+2)}\right\|_n.\end{aligned}$$

在(21)式中选取$\phi\in\theta^{n,i}$，并对i从 1 到q求和，结合引理 3 及L^2投影的性质(15)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{q} m_{ij}\left(\theta^{n,j},\pi_h^*\theta^{n,i}\right) &=\int_{I_n}\left(\theta_t,I_{n,q-1}^{GL}\pi_h^*\theta\right)\mathrm{d}t=\int_{I_n}\left(\theta_t,\pi_h^*\theta\right)\mathrm{d}t \\ &=\left(\theta^{n+1},\pi_h^*\theta^{n+1}\right)-\left(\theta^{n+},\pi_h^*\theta^{n+}\right)-\int_{I_n}\left(\theta,\pi_h^*\theta_t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{24}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}&\left(\theta^{n+1},\pi_h^*\theta^{n+1}\right)-\left(\theta^{n+},\pi_h^*\theta^{n+}\right)+c_4\int_{I_n}\|\theta\|_1^2\mathrm{d}t \\ &\le\sum_{i=1}^{q}\left(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4,\pi_h^*\theta^{n,i}\right)+\lambda\|\theta\|_n^2+\int_{I_n}\overline{a}\left(u-\omega,\pi_h^*\theta\right)\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left(\theta,\pi_h^*\theta_t\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由$\omega_i=\int_0^1 l_i^2(s)\mathrm{d}s>0$可得

$$\sum_{i=1}^{q}\Delta t_n\omega_i a\left(\theta^{n,i},\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\ge 0.\tag{25}$$

此外，结合见引理 3 中$\overline{a}\left(u-\omega,\pi_h^*\upsilon\right)$的定义及 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\left\|\overline{a}\left(u-\omega,\pi_h^*\theta\right)\right\|\le c\|u-\omega\|\,\|\theta\|_1.\tag{26}$$

进一步地，对任意$\upsilon=\sum_{j=0}^{q}\hat{l}_{n,j}\upsilon^j\in V_n^q$，其范数满足等价性：

$$c_1\left\{\Delta t_n\sum_{j=0}^{q}\|\upsilon\|^{j2}\right\}^{\frac{1}{2}}\le\|\upsilon\|_n\le c_2\left\{\Delta t_n\sum_{j=0}^{q}\left\|\upsilon^j\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.\tag{27}$$

基于逆不等式 $\max_n |y(t)| \le c_1 \Delta t_n^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{I_n} |y(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}, \forall y \in P_q(I_n)$ 及估计式 $\int_{I_n} \hat{l}_{n,j}^2 \mathrm{d}t \le c\Delta t_n$，可得前两项不等式。

结合式(25)和(27)，对式(24)右端应用 Cauchy 不等式和 Hölder 不等式，并结合引理 5 可得，

$$\left\|\theta^{n+1}\right\|^2 \le c\left\|\theta^{n+}\right\|^2 + c\|\theta\|_n^2 + c\Delta t_n^{-1}\|\theta\|_n^2 + c\varepsilon_n. \tag{28}$$

其中

$$\varepsilon_n = c\Delta t_n^{2q+2}\left(\left\|u^{(q+2)}\right\|_n^2 + \left\|\Im u^{(q+1)}\right\|_n^2\right) + \int_{I_n}\left\|h_n^4 u_t\right\|_5^2 \mathrm{d}t + \int_{I_n}\left\|h_n^4 \Im u\right\|_5^2 \mathrm{d}t + \int_{I_n}\left\|h_n^4 u\right\|_5^2 \mathrm{d}t.$$

考虑 $\left\|\theta^{n+}\right\|$，取 L^2 投影算子 $\prod^n = P^n$，则

$$\theta^{n+} = U^{n+} - W^{n+} = P^n\theta\left(t^n\right) + P^n J\left[\omega^n\right],$$

其中椭圆投影在 t^n 处的跳跃项为 $J\left[\omega^n\right] = \omega^n - \omega^{n+} = \left(P_h^n - P_h^{n-1}\right)u\left(t^n\right)$。将式(28)代入(27)式，结合 Cauchy 不等式，式(5)及 Young 不等式可得

$$\left\|\theta^{n+1}\right\|^2 \le c\left(1+\beta_n\right)\left\|\theta^n\right\|^2 + c\|\theta\|_n^2 + c\Delta t_n^{-1}\|\theta\|_n^2 + c\varepsilon_n + cM_n\left\|J\left[\omega_n\right]\right\|^2, \tag{29}$$

其中 M_n 是与 n 无关的常数，定义参数如下：

$$\beta_n = \begin{cases} 0, & S_h^{n-1} = S_h^n, \\ \dfrac{1}{M_n - 1}, & S_h^{n-1} \ne S_h^n, \quad n = 1, 2, \cdots, N-1. \end{cases}$$

为了估计 $\|\theta\|_n$，在式(22)中取 $\phi = \tilde{\theta}^{n,i}$，并对 i 从 1 到 q 求和，结合引理 1 可得

$$\sum_{i,j=1}^q \tilde{m}_{ij}\left(\tilde{\theta}^{n,j}, \pi_h^* \tilde{\theta}^{n,i}\right) \ge \alpha \sum_{i=1}^q \left\|\tilde{\theta}^{n,i}\right\|^2. \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\left(\alpha - \lambda\Delta t_n\right)\sum_{i=1}^q\left(1-\omega_i\right)\left\|\tilde{\theta}^{n,i}\right\|^2 + c_4\Delta t_n\sum_{i=1}^q \omega_i\left\|\tilde{\theta}^{n,i}\right\|_1^2 \\ &\le c\left(\sum_{i=1}^q\left\|\tilde{\theta}^{n,i}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\theta^n\right\| + \left\|J\left[\eta^n\right]\right\| + \left(\sum_{i=1}^q\left[\left\|\Sigma_1\right\|^2 + \left\|\Sigma_2\right\|^2 + \left\|\Sigma_3\right\|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \Delta t_n\sum_{i=1}^q \omega_i\left\|u^{n,i} - \omega^{n,i}\right\|\left\|\tilde{\theta}^{n,i}\right\|_1. \end{aligned} \tag{31}$$

注意到 $\sum_{i=1}^q\left\|\tilde{\theta}^{n,i}\right\|^2$ 和 $\sum_{i=1}^q\left\|\theta^{n,i}\right\|^2$ 仅依赖于 s_i 的常数，对式(31)利用(26)和(27)式及引理 5 可得

$$\|\theta\|_n^2 \le c\Delta t_n\left\{\left\|\theta^n\right\|^2 + \left\|J\left[\omega^n\right]\right\|^2 + c\Delta t_n\varepsilon_n\right\}. \tag{32}$$

将式(29)右端代入迭代格式，经递推整理得

$$\begin{aligned} \left\|\theta^{n+1}\right\|^2 &\le c\prod_{j=0}^n\left(1+\beta_j + c\Delta t_j\right)\left\|\theta^0\right\|^2 \\ &\quad + c\sum_{m=0}^n\left(\prod_{j=m+1}^n\left(1+\beta_j + c\Delta t_j\right)\right)\times\left(\varepsilon_m + c\left(\Delta t_m + M_m + 1\right)\left\|J\left[\omega^n\right]\right\|^2\right) \end{aligned}$$

固定 n，取 $M_m = M = N_c(n)\left(m = 1, \cdots, n\right)$。其中 $N_c(n)$ 表示 $S_h^{j-1} \ne S_h^j$ 的总数，当 $N_c(n) = 0$ 或 1 时，取 $M = 2$ 时。此时 $S_h^{j-1} \ne S_h^j$，$\beta_j = \beta = \dfrac{1}{M-1}$。从而

$$\prod_{j=0}^{n}\left(1+\beta_j+c\Delta t_j\right)\le\prod_{j=0,\beta<c\Delta t_j}^{n}\left(1+2c\Delta t_j\right)\prod_{j=0,\beta\ge c\Delta t_j}^{n}\left(1+2\beta\right)$$
$$\le\prod_{j=0}^{n}\left(1+2c\Delta t_j\right)\left(1+2\beta_j\right)^M\le \mathrm{e}^{2ct^{n+1}}\cdot 3\mathrm{e}^2.$$

令 $C_n:=\left(3\mathrm{e}^{2ct^n+2}\right)^{\frac{1}{2}}$。结合初始条件 $\theta^0=u_0-P_h^0u_0, J\left[\omega^0\right]=0$ 得

$$\left\|\theta^{n+1}\right\|\le\left\|u_0-P_h^0u_0\right\|^2+cC_{n+1}\left(\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\right)^{\frac{1}{2}}+cC_{n+1}\sqrt{M+1}\left(\sum_{m=1}^{n}\left\|J\left[\omega^m\right]\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中，$M=N_c(n)$。利用式(32)和式(4)，对 $n=0,\cdots,N-1$，有

$$\|\theta\|_n\le\Delta t_n^{\frac{1}{2}}cC_n\left\|h_0^4u_0\right\|_5+\Delta t_n^{\frac{1}{2}}cC_n\left(\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon_n\right)^{\frac{1}{2}}+\Delta t_n^{\frac{1}{2}}cC_{n+1}\sqrt{N_c(n-1)+1}\left(\sum_{m=1}^{n}\left\|J\left[\omega^m\right]\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

基于 $\theta|_{I_n}\in V_{hk}^n$ 的性质，应用逆不等式 $\max_n|\theta(t)|\le c\Delta t_n^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{I_n}|\theta(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ 可得

$$\max_{I_n}\|\theta\|$$
$$\le C_n\left\{\left\|h_0^4u_0\right\|_5+\left(\sum_{m=0}^{n}\Delta t_m^{2q+2}\left(\left\|u^{(q+2)}\right\|_m^2+\left\|\Im u^{(q+1)}\right\|_m^2\right)+\sum_{m=0}^{n}\int_{I_m}\left\|h_m^4u_t\right\|_5^2\mathrm{d}t+\sum_{m=0}^{n}\int_{I_m}\left\|h_m^4\Im u\right\|_5^2\mathrm{d}t+\sum_{m=0}^{n}\int_{I_m}\left\|h_m^4u\right\|_5^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{N_c(n-1)+1}\left(\sum_{m=1}^{n}\left\|J\left[\omega^m\right]\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

通过三角不等式整合 θ 与 ρ 的估计，最终得误差估计式(19)。

注 1 通过应用 $\left\|h_{n-1}^4u\right\|_5+\left\|h_n^4u\right\|_5$；以此来估计 $\left\|J\left[\omega^m\right]\right\|$。从而验证定理 2 的估计式是收敛的。若空间 $S_h^n(n=1,2,\cdots,N-1)$ 的网格变化不是很频繁时，则定理 2 所构建的 $L^\infty\left([0,T];L^2([\Omega])\right)$——模误差估计是 $O\left(k^{q+1},h^4\right)$。

为了给出 $L^\infty\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$——模误差估计，首先给出所需的一个引理。

引理 6 [5] 对任意的 $1\le n\le N-1$，满足

$$\begin{aligned}&S_h^{n-1}\subset S_h^n,\\&\left\|\nabla P^n\upsilon\right\|\le C\|\nabla\upsilon\|,\quad\forall\upsilon\in H_0^1(\Omega),\end{aligned}\tag{33}$$

其中 p^n 是 S_h^n 上的 L^2 投影。

引理 7 设 u 和 U 分别为(1)和式(3)的解，且 $S_h^{n-1}\subset S_h^n(n=0,1,\cdots,N-1)$，则

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,T]}\left\|\nabla\left(u(t)-U(t)\right)\right\|\le&\, C_n\max_n\Delta t_n^{q+1}\max_{I_n}\left(\left\|\nabla u^{(q+2)}\right\|+\left\|\nabla\Im u^{(q+1)}\right\|\right)\\&+C_nh^3\max_n\max_{I_n}\left(\left\|\Im u\right\|_4+\left\|u_t\right\|_4+\left\|u\right\|_4\right)+C_nN_c\max_n\left\|\nabla J\left[\omega^n\right]\right\|.\end{aligned}\tag{34}$$

其中 $C_n=c\mathrm{e}^{ct^n}$。

证明 将误差分解为 $e=\nabla(U-u)=\nabla(U-W)+\nabla(W-u)=\nabla\theta+\nabla\rho$。其中 $\nabla\rho$ 有类似引理 4 的估计结果，故仅需对 $\nabla\theta$ 进行估计。

定义离散算子 $A_h^n: H_0^1(\Omega)\to S_h^n$ [5]满足

$$\left(A_h^n\upsilon,\chi\right)=\left(\nabla\upsilon,\nabla\chi\right),\quad \forall\chi\in S_h^n. \tag{35}$$

在(21)式中取 $\phi=A_h^n\theta^{n,i}$，并对 i 从 1 到 q 求和，结合 L^2 投影的性质和(31)式可得

$$\begin{aligned}&\left(\nabla\theta^{n+1},\nabla\theta^{n+1}\right)-\left(\nabla\theta^{n+},\nabla\theta^{n+}\right)+\sum_{i=1}^{q}\Delta t_n\omega_i a\left(\nabla P^n\theta^{n,i},\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\\&=\sum_{i=1}^{q}\left(\nabla P^n\left[\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4\right],\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)+\sum_{i=1}^{q}\omega_{n,i}\overline{a}\left(\nabla P^n\left[u^{n,i}-\omega^{n,i}\right],\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)+\int_{I_n}\left(\nabla\theta,\nabla\pi_h^*\theta_t\right)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{36}$$

由式(26)和 L^2 投影的性质，类似可知

$$\sum_{i=1}^{q}\Delta t_n\omega_i a\left(\nabla P^n\theta^{n,i},\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\ge\sum_{i=1}^{q}\Delta t_n\omega_i\left|\nabla\theta^{n,i}\right|_1^2\ge 0.$$

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|^2&\le c\left\|\nabla\theta^{n+}\right\|^2+\sum_{i=1}^{q}\left(\nabla P^n\left[\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4\right],\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^{q}\omega_{n,i}\overline{a}\left(\nabla P^n\left[u^{n,i}-\omega^{n,i}\right],\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)+c\Delta t_n^{-1}\left\|\left|\nabla\theta^n\right|\right\|_n^2.\end{aligned} \tag{37}$$

结合引理 5、引理 6、引理 2、(4)式及(28)式中 $\nabla\theta$ 的等价估计式，可类似证得下式

$$\left|\sum_{i=1}^{q}\left(\nabla P^n\Sigma_1,\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\right|\le c\left(\int_{I_n}\left\|h_n^3u_t\right\|_4^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\left|\nabla\theta\right|\right\|_n,$$

此处 $\nabla\Sigma_2=\int_{I_n}l'_{n,i}\left(I_{n,q+1}^{Lo}-I\right)\nabla u\mathrm{d}t$，由引理 6 及参照 $\left\|\Sigma_2\right\|$ 的证明过程可得

$$\left|\sum_{i=1}^{q}\left(\nabla P^n\Sigma_2,\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\right|\le c\Delta t_n^{q+1}\left\|\left|\nabla u^{(q+2)}\right|\right\|_n\left\|\left|\nabla\theta\right|\right\|_n.$$

进一步类似可得

$$\left|\sum_{i=1}^{q}\left(\nabla P^n\Sigma_3,\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\right|\le c\Delta t_n^{q+1}\left\|\left|\nabla\Im u^{(q+1)}\right|\right\|_n\left\|\left|\nabla\theta\right|\right\|_n,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{q}\left(\nabla P^n\Sigma_4,\nabla\pi_h^*\theta^{n,i}\right)\right|\le c\left(\int_{I_n}\left\|h_n^3\Im u\right\|_4^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\left|\nabla\theta\right|\right\|_n.$$

将(34)下面的几个估计式及(27)，结合 Young 不等式合并可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|^2&\le c\left\|\nabla\theta^{n+}\right\|^2+c\left\|\left|\nabla\theta^n\right|\right\|_n^2+c\Delta t_n^{2q+2}\left(\left\|\left|\nabla u^{(q+2)}\right|\right\|_n^2+\left\|\left|\nabla\Im u^{(q+1)}\right|\right\|_n^2\right)\\&\quad+c\left(\int_{I_n}\left\|h_n^3u_t\right\|_4^2\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left\|h_n^3u\right\|_4^2\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left\|h_n^3\Im u\right\|_4^2\mathrm{d}t\right)+c\Delta t_n^{-1}\left\|\left|\nabla\theta^n\right|\right\|_n^2.\end{aligned} \tag{38}$$

考虑 $\left\|\nabla\theta^{n+}\right\|$，取 $\prod^n=P^n$ 是 L^2 投影，由于 $\theta^{n+}=U^{n+}-W^{n+}=P^n\theta\left(t^n\right)+P^nJ\left[\omega^n\right]$，因此结合 Cauchy 不等式、(5)式及 Young 不等式可得

$$\left\|\nabla\theta^{n+}\right\|^2\le\left(1+\beta_n\right)\left\|\nabla\theta^n\right\|^2+M_n\left\|\nabla J\left[\omega^n\right]\right\|^2, \tag{39}$$

其中关于 β_n,M_n 的定义在(29)式中已给出，这里的

$$\left(\nabla J\left[\omega^{n}\right],\nabla\pi_h^*\varphi\right)=\left(\nabla\left(\omega^{n}-\omega^{n+}\right),\nabla\pi_h^*\varphi\right)=0,\ \forall\varphi\in S_h^{n-1}.$$

在式(22)中取 $\phi=A_h^n\tilde{\theta}^{n,i}$，且参照(34)式的证明过程，有

$$\begin{aligned}\|\nabla\theta\|_n^2\le c\Delta t_n\Bigg\{&\left\|\nabla\theta^{n}\right\|^2+c\Delta t_n^{2q+1}\left(\left\|\nabla u^{(q+2)}\right\|_n^2+\left\|\nabla\Im u^{(q+1)}\right\|_n^2\right)\\&+c\Delta t_n\left(\int_{I_n}\left\|h_n^3u_t\right\|_4^2\,\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left\|h_n^3u\right\|_4^2\,\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left\|h_n^3\Im u\right\|_4^2\,\mathrm{d}t\right)+\left\|\nabla J\left[\omega^{n}\right]\right\|^2\Bigg\}\end{aligned}\tag{40}$$

将(38)和(40)式代入(37)式合并可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|^2\le{}&c\left(1+\beta_n+c\Delta t_n\right)\left\|\nabla\theta^{n}\right\|^2+c\Delta t_n^{2q+2}\left(\left\|\nabla u^{(q+2)}\right\|_n^2+\left\|\nabla\Im u^{(q+1)}\right\|_n^2\right)\\&+c\left(\int_{I_n}\left\|h_n^3u_t\right\|_4^2\,\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left\|h_n^3u\right\|_4^2\,\mathrm{d}t+\int_{I_n}\left\|h_n^3\Im u\right\|_4^2\,\mathrm{d}t\right)+c\left(M_n+\Delta t_n+1\right)\left\|\nabla J\left[\omega^{n}\right]\right\|^2.\end{aligned}\tag{41}$$

对上式进行 $L^\infty\left(\left[0,T\right];L^2\left(\Omega\right)\right)$——模误差估计，式(34)以后的证明类似可得

$$\begin{aligned}\max_{I_n}\|\nabla\theta\|\le C_n\Bigg\{&\left\|h_0^3u_0\right\|_4+\Bigg(\sum_{m=0}^{n}\Delta t_m^{2q+2}\left(\left\|\nabla u^{(q+2)}\right\|_m^2+\left\|\nabla\Im u^{(q+1)}\right\|_m^2\right)\\&+\sum_{m=0}^{n}\int_{I_m}\left\|h_m^3u_t\right\|_4^2\,\mathrm{d}t+\sum_{m=0}^{n}\int_{I_m}\left\|h_m^3u\right\|_4^2\,\mathrm{d}t+\sum_{m=0}^{n}\int_{I_m}\left\|h_m^3\Im u\right\|_4^2\,\mathrm{d}t\Bigg)^{\frac{1}{2}}\\&+\sqrt{N_c\left(n-1\right)+1}\left(\sum_{m=1}^{n}\left\|\nabla J\left[\omega^{m}\right]\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}.\end{aligned}\tag{42}$$

通过三角不等式将上述 $\nabla\theta$ 的估计与 $\nabla\rho$ 的估计合并，可得误差估计(37)式。

注 2 通过应用 $\left\|h_{n-1}^3u\right\|_4+\left\|h_n^3u\right\|_4$；可有效估计 $\left\|\nabla J\left[\omega^m\right]\right\|$。从而验证定理 2 的收敛性。进一步地，若空间 $S_h^n\left(n=0,1,\cdots,N-1\right)$ 的网格变化频繁较低时，则定理 2 所建立的 $L^\infty\left(\left[0,T\right];H^1\left(\left[\Omega\right]\right)\right)$——模误差估计是 $O\left(k^{q+1},h^3\right)$。

5. 数值算例

为检验所提格式的有效性及理论推导结论的可靠性，选取如下抛物方程初边值问题：

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}+u=f\left(x,t\right), & 0\le x\le1,\ 0<t\le1,\\ u\left(0,t\right)=u\left(1,t\right)=0, & 0<t\le1,\\ u\left(x,0\right)=\sin\left(\pi x\right), & 0\le x\le1,\end{cases}$$

其解析解为 $u\left(x,t\right)=\mathrm{e}^{-t}\sin\left(\pi x\right)$。数值实验中，试探函数空间采用时间二次多项式 $\left(q=2\right)$ 与空间三次 Lagrange 插值基函数，检验函数空间采用时间线性多项式及空间分片常数基函数。

表 1 展示了固定时间步长 $\Delta t=0.002$，空间依次取 $h=1/15,1/30,1/60,1/120$ 时，时空误差 $\|u-U\|_{L^\infty\left(L^2\right)}$ 和 $\|u-U\|_{L^\infty\left(H^1\right)}$ 的数值结果及其收敛阶数。由数据可知，当空间步长 h 逐次减半时，$L^\infty\left(L^2\right)$ 的模误差的收敛阶接近四阶，$L^\infty\left(H^1\right)$ 半模误差的收敛阶接近三阶，实验结果与理论分析高度吻合。

表 2 进一步研究了时间离散对计算精度的影响。实验中，空间步长固定为 $h=0.0006$，时间步长依次取 $\Delta t=1/2,1/4,1/8,1/16$，数值结果表明，随着时间步长 Δt 逐次减半，$L^\infty\left(L^2\right)$ 模误差的收敛阶趋近于理论最优的三阶精度，而 $L^\infty\left(H^1\right)$ 半模误差的收敛阶也接近三阶，实验结果与理论推导近乎相等。

Table 1. With the temporal discretization parameter Δt fixed at 0.002, the spatial error and its convergence rate
表 1. 固定时间剖分 $\Delta t = 0.002$，空间误差及收敛阶

h	$\|u-U\|_{L^\infty(L^2)}$	收敛阶	$\|u-U\|_{L^\infty(H^1)}$	收敛阶
$\frac{1}{15}$	3.5835e−05	-	1.7532e−03	-
$\frac{1}{30}$	2.2511e−06	3.9926	2.1982e−04	2.9955
$\frac{1}{60}$	1.4127e−07	3.9941	2.7499e−05	2.9988
$\frac{1}{120}$	9.2835e−09	3.9276	3.4381e−06	2.9997

Table 2. With the spatial discretization parameter h fixed at 0.0006, the temporal error and its convergence rate
表 2. 固定空间剖分 $h = 0.0006$，时间误差及收敛阶

Δt	$\|u-U\|_{L^\infty(L^2)}$	收敛阶	$\|u-U\|_{L^\infty(H^1)}$	收敛阶
$\frac{1}{2}$	7.8147e−03	-	2.5764e−02	-
$\frac{1}{4}$	1.1651e−03	2.7457	3.8413e−03	2.7457
$\frac{1}{8}$	1.8786e−04	2.6327	6.1937e−04	2.6327
$\frac{1}{16}$	2.8305e−05	2.7305	9.3321e−05	2.7305

6. 结论

针对抛物型偏微分方程的数值求解问题，本文设计了一种基于变网格策略的连续时空有限体积元算法，通过构造 Legendre 和 Lobatto 点上的 Lagrange 插值多项式，并结合 Gauss 数值积分准则，形成了系统的理论分析体系。研究证明：该方法在不依赖网格限制条件下，严格保证了数值解的唯一存在性，同时达到了 $L^\infty\left(L^2\right)$ 与 $L^\infty\left(H^1\right)$ 模误差估计的理论最优阶。最后通过数值算例验证了所提格式的有效性。

基金项目

国家自然科学基金(12161034)，包头师范学院青年科研项目(BSYKJ2022-ZQ06)，自治区规划课题(NZJGH2023264, NZJGH2024327)。

参考文献

[1] Aziz, A.K. and Monk, P. (1989) Continuous Finite Elements in Space and Time for the Heat Equation. *Mathematics of Computation*, **52**, 255-274. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1989-0983310-2

[2] Bales, L. and Lasiecka, I. (1994) Continuous Finite Elements in Space and Time for the Nonhomogeneous Wave Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **27**, 91-102. https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)90048-5

[3] French, D. and Peterson, T. (1996) A Continuous Space-Time Finite Element Method for the Wave Equation. *Mathematics of Computation*, **65**, 491-506. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-96-00685-0

[4] Li, H., Zhao, Z. and Luo, Z. (2016) A Space-Time Continuous Finite Element Method for 2D Viscoelastic Wave Equation. *Boundary Value Problems*, **2016**, Article No. 53. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0563-1

[5] Karakashian, O. and Makridakis, C. (1999) A Space-Time Finite Element Method for the Nonlinear Schrödinger Equation: The Continuous Galerkin Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **36**, 1779-1807. https://doi.org/10.1137/s0036142997330111

[6] Karakashian, O. and Makridakis, C. (2004) Convergence of a Continuous Galerkin Method with Mesh Modification for Nonlinear Wave Equations. *Mathematics of Computation*, **74**, 85-103. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-04-01654-0

[7] Zhao, Z., Li, H. and Luo, Z. (2016) A New Space-Time Continuous Galerkin Method with Mesh Modification for Sobolev Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **440**, 86-105. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.035

[8] 候春英，李宏．半线性抛物方程的时空有限元方法[J]．高校应用数学学报, 2008, 23(4): 459-470.

[9] Gao, G. and Wang, T. (2010) Cubic Superconvergent Finite Volume Element Method for One-Dimensional Elliptic and Parabolic Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 2285-2301. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.10.013

[10] 肖宇宇，何斯日古楞，杨凯丽．对流扩散方程的时间间断时空有限体积元法[J]．高校应用数学学报，2021，36(2): 179-192.

[11] 肖宇宇，何斯日古楞．抛物型方程的高精度时空有限体积元方法[D]: [硕士学位论文]．呼和浩特：内蒙古大学，2021.

[12] 李荣华，陈仲英．微分方程广义差分法[M]．长春：吉林大学出版社, 1994.