

高精度积分值型MQ拟插值

张俊妮, 彭兴璇*, 邵烁童

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年4月28日; 录用日期: 2025年5月21日; 发布日期: 2025年5月30日

摘要

本文针对积分值条件下的拟插值问题, 提出了一种基于Multiquadric (MQ)函数的新型高精度数值逼近方法。作为一类条件正定径向基函数, MQ函数凭借其指数级收敛特性在拟插值理论中具有重要的应用价值。现有的MQ拟插值方法主要基于函数值, 在实际应用中, 函数信息经常以连续区间上的积分值形式呈现, 本文重点解决仅知积分值条件下的构造问题。具体地, 首先基于积分值的线性组合实现对节点处函数值及二阶导数值的逼近, 进而结合利用函数值与二阶导数信息的拟插值方法, 构造出新型的高精度积分值型MQ拟插值算子并推导了相应的误差估计表达式。数值实验结果表明, 该方法有较好的逼近效果且其数值收敛阶与理论分析是吻合的, 验证了所提算法的有效性。

关键词

拟插值, Multiquadric (MQ)函数, 积分值, 误差估计

High-Precision Integral-Value-Based MQ Quasi-Interpolation

Junni Zhang, Xingxuan Peng*, Shuotong Shao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 28th, 2025; accepted: May 21st, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

This paper proposes a novel high-precision numerical approximation method for quasi-interpolation problems under integral value conditions, utilizing Multiquadric (MQ) functions. As a class of conditionally positive definite radial basis functions, MQ functions hold significant application value in quasi-interpolation theory due to their exponential convergence properties. Existing MQ quasi-interpolation methods primarily rely on function values; however, in practical scenarios, functional

*通讯作者。

文章引用: 张俊妮, 彭兴璇, 邵烁童. 高精度积分值型 MQ 拟插值[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 540-553.
DOI: 10.12677/aam.2025.145281

information is often presented in the form of integral values over continuous intervals. This work focuses on addressing the construction of quasi-interpolation operators under the condition of known integral values. Specifically, we first approximate the function values and second-order derivative values at nodes through linear combinations of integral values. Subsequently, by integrating a quasi-interpolation framework that incorporates both function values and second-order derivative information, a novel high-precision integral-value-based MQ quasi-interpolation operator is constructed, accompanied by derived error estimation formulas. Numerical experiments demonstrate the favorable approximation performance of the proposed method, with the numerical convergence order aligning well with theoretical analyses, thereby validating the effectiveness of the algorithm.

Keywords

Quasi-Interpolation, Multiquadric (MQ) Function, Integral Value, Error Estimation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在数据重构领域,插值与拟插值技术因兼具计算效率与构造灵活性而被广泛采用。传统插值方法涉及大规模线性系统求解,当处理高维空间或海量数据时,不仅计算复杂度急剧增长,还容易导致系数矩阵病态化。为解决这一计算瓶颈,拟插值理论通过创新性构造方法绕开了传统插值的求解困境,采用局部支撑的线性组合算子直接生成逼近函数,既避免了矩阵求逆运算,又保持了数值稳定性与计算经济性。特别值得关注的是径向基函数(Radial Basis Function, RBF)拟插值方法,其凭借高维适应性及光滑性优势,成为研究热点。

Multiquadric (MQ)函数作为一类条件正定径向基函数,因其指数级收敛特性被广泛应用于拟插值理论。1990年, Powell [1]提出首个具备线性多项式再生性的MQ拟插值算子 $lf(x)$,标志MQ方法正式进入应用阶段;1992年, Beatson 与 Powell [2]提出可以适用于有限区间的MQ拟插值算子 $L_A f(x)$, $L_B f(x)$ 和 $L_C f(x)$ 分别通过常数延拓、线性延拓等方法构造,但 $L_C f(x)$ 算子依赖端点导数信息;1994年, Wu 与 Schaback [3]改进 $L_C f(x)$ 提出 $L_D f(x)$ 算子,无需端点导数值,并证明其保凸性、保单调性,成为经典框架;2005年, Ling [4]基于 $L_D f(x)$,通过引入两组序列点构造高精度算子 $L_R f(x)$;而在2010年,姜自武在文献[5]基于二阶导数信息并利用多层格式将IMQ径向基插值和MQ拟插值结合实现出了一种高精度的MQ拟插值 $L_W f(x)$,并将其应用在Sine-Gordon方程中;2016年,高文武[6]提出导数值型MQ拟插值 $Q_D^x f(x)$,通过离散导数值构造算子,可应用于动态轮廓建模。然而,现有MQ拟插值方法多依赖于离散节点处的函数值或导数值,在实际场景中(例如力学、统计学和环境科学),函数的信息通常以连续区间中的积分值形式呈现。2006年, Behforouz [7]首次提出积分值三次样条插值方法,但需额外边界条件且计算复杂;2012年, Lang 与 Xu [8]利用四次B样条构造积分值插值算子,证明了节点处的超收敛性;为降低计算复杂度,2015年, Boujraf 等[9]将积分值信息与样条拟插值结合,提出无需解方程组的积分值三次样条拟插值;2018年,吴金明等[10]提高了样条拟插值的次数,将其提升至五次。然而,样条函数在逼近高光滑性函数时存在局限性,且其高维扩展性较差。

针对上述问题,本文通过连续区间积分值的线性组合来逼近节点处的函数值和二阶导数值,并结合

文献[5]中的高精度 MQ 拟插值技术, 构造出一种完全依赖积分值的高精度 MQ 拟插值算子, 并给出了误差估计。突破了传统 MQ 拟插值对目标函数在离散点处信息及导数信息的限制, 从而延伸了其应用范围。此外, 本文提出的拟插值算子无需求解大型线性方程组, 无需额外边界条件, 通过直接构造泛函数实现高效计算, 使其能够高效处理大规模数据问题。

2. 高精度 MQ 拟插值算子

2.1. $L_D f(x)$ 拟插值算子

在阐述高精度 MQ 拟插值算子之前, 先对 $L_D f(x)$ 拟插值算子[3]进行介绍。给定一组区间 $[a, b]$ 上的节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $h := \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$, 则定义拟插值算子

$$L_D f(x) = f_0 \delta_0(x) + f_1 \delta_1(x) + \sum_{j=2}^{n-2} f_j \psi_j(x) + f_{n-1} \delta_{n-1}(x) + f_n \delta_n(x). \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \sqrt{c^2 + (x - x_i)^2}, \quad (c > 0), \\ \delta_0(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\phi_1(x) - (x - x_0)}{2(x_1 - x_0)}, \\ \delta_1(x) &= \frac{\phi_2(x) - \phi_1(x)}{2(x_2 - x_1)} - \frac{\phi_1(x) - (x - x_0)}{2(x_1 - x_0)}, \\ \psi_j(x) &= \frac{\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)}{2(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)}{2(x_j - x_{j-1})}, \\ \delta_{n-1}(x) &= \frac{(x_n - x) - \phi_{n-1}(x)}{2(x_n - x_{n-1})} - \frac{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)}{2(x_{n-1} - x_{n-2})}, \\ \delta_n(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\phi_{n-1}(x) - (x_n - x)}{2(x_n - x_{n-1})}. \end{aligned}$$

2.2. $L_W f(x)$ 拟插值算子

接下来对高精度 MQ 拟插值算子 $L_W f(x)$ [5]进行详细说明, 对于函数 $f \in C^2[a, b]$ 和区间 $[a, b]$ 上的节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 假设 $N < n$, $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_N < k_{N+1} = n$, 令 $h_2 := \max_{1 \leq i \leq N+1} |x_{k_i} - x_{k_{i-1}}|$ 。

选择 IMQ 函数 $\phi(r)$ 作为径向基函数

$$\phi(r) = \frac{s^2}{(s^2 + r^2)^{3/2}},$$

这是一种严格的正定径向基函数。

记

$$\begin{aligned} A_{\phi, \mathcal{X}} &= \left(\phi(|x_{k_j} - x_{k_i}|) \right), \\ f_{\mathcal{X}}'' &= \left(f''(x_{k_1}), \cdots, f''(x_{k_N}) \right)^T, \\ \alpha &= (A_{\phi, \mathcal{X}})^{-1} f_{\mathcal{X}}'' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^N \alpha_i \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2}.$$

从而可以生成一组新的数据 $(x_i, \mathcal{E}(x_i))_{i=0}^n$, 采用带参数 c 的 L_D 拟插值算子对这组新数据进行处理, 获得函数 $\mathcal{E}(x)$ 的一个近似形式 $L_D \mathcal{E}(x)$, 从而在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x)$ 的拟插值算子

$$L_W f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} + L_D \mathcal{E}(x). \quad (2)$$

定理 1 [5] 在本性空间 $\mathcal{N}_\phi$ 上考虑 $L_W f(x)$ 的误差, 对于给定函数 $f(x)$, 若 $f'' \in \mathcal{N}_\phi$, $c^2 |\ln c| = O(h^2)$, $h_2 = O(h)$, 则存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$\|f - L_W f\|_\infty \leq C_1 h^2 \cdot e^{-C_2/h} \cdot \|f\|_{\mathcal{N}_\phi}.$$

3. 构造高精度积分型 MQ 拟插值算子

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上一个未知函数, 使用 $n+1$ 个节点均匀分割区间 $[a, b]$ 为 n 个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$. 已确定函数 $f(x)$ 在 n 个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分值 I_i , 即

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

3.1. 函数值与二阶导数值的逼近

本文通过连续区间上的积分值线性组合, 获得节点处函数值的六阶精度估计和二阶导数值的四阶精度估计。并且本文所提供的计算框架可以推广到三阶, 四阶甚至更高阶的导数逼近。具体做法为: 无论是中间节点, 还是端点处, 在得到各节点附近的积分值与其节点处函数值、各阶导数值之间的关系后, 通过适当的线性组合, 即可得到函数值或各阶导数值具体的积分近似表示。可为其他利用泛函信息的拟插值逼近算子与积分值信息的结合提供思路。

定理 2 令 $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, 对于中间节点 $i = 3, 4, \dots, n-3$ 的函数值与二阶导数值有如下近似

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= \frac{1}{60h} (I_{i-3} - 8I_{i-2} + 37I_{i-1} + 37I_i - 8I_{i+1} + I_{i+2}) = f_i + O(h^6), \\ \tilde{f}_i'' &= \frac{1}{8h^3} (-I_{i-3} + 7I_{i-2} - 6I_{i-1} - 6I_i + 7I_{i+1} - I_{i+2}) = f_i'' + O(h^4). \end{aligned}$$

证明 当 $i = 3, 4, \dots, n-3$ 时, 将 $f(x)$ 在 x_i 处泰勒展开

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_i^{(j)}}{j!} (x - x_i)^j,$$

则有

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_i^{(j)}}{j!} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)^j dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} f_i^{(j)} \\ &= f_i h + \frac{f_i'}{2!} h^2 + \frac{f_i''}{3!} h^3 + \frac{f_i'''}{4!} h^4 + \frac{f_i^{(4)}}{5!} h^5 + \frac{f_i^{(5)}}{6!} h^6 + O(h^7). \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
I_i + I_{i+1} &= f_i(2h) + \frac{f'_i}{2!}(2h)^2 + \frac{f''_i}{3!}(2h)^3 + \frac{f'''_i}{4!}(2h)^4 + \frac{f^{(4)}_i}{5!}(2h)^5 + \frac{f^{(5)}_i}{6!}(2h)^6 + O(h^7), \\
I_i + I_{i+1} + I_{i+2} &= f_i(3h) + \frac{f'_i}{2!}(3h)^2 + \frac{f''_i}{3!}(3h)^3 + \frac{f'''_i}{4!}(3h)^4 + \frac{f^{(4)}_i}{5!}(3h)^5 + \frac{f^{(5)}_i}{6!}(3h)^6 + O(h^7), \\
I_{i-1} &= f_i h - \frac{f'_i}{2!}h^2 + \frac{f''_i}{3!}h^3 - \frac{f'''_i}{4!}h^4 + \frac{f^{(4)}_i}{5!}h^5 - \frac{f^{(5)}_i}{6!}h^6 + O(h^7), \\
I_{i-2} + I_{i-1} &= f_i(2h) - \frac{f'_i}{2!}(2h)^2 + \frac{f''_i}{3!}(2h)^3 - \frac{f'''_i}{4!}(2h)^4 + \frac{f^{(4)}_i}{5!}(2h)^5 - \frac{f^{(5)}_i}{6!}(2h)^6 + O(h^7), \\
I_{i-3} + I_{i-2} + I_{i-1} &= f_i(3h) - \frac{f'_i}{2!}(3h)^2 + \frac{f''_i}{3!}(3h)^3 - \frac{f'''_i}{4!}(3h)^4 + \frac{f^{(4)}_i}{5!}(3h)^5 - \frac{f^{(5)}_i}{6!}(3h)^6 + O(h^7).
\end{aligned}$$

确定 6 个适用的参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \lambda_{-3}$, 让它们契合以下要求

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & -1 & -2^2 & -3^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 1 & 2^3 & 3^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & -1 & -2^4 & -3^4 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 1 & 2^5 & 3^5 \\ 1 & 2^6 & 3^6 & -1 & -2^6 & -3^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_{-1} \\ \lambda_{-2} \\ \lambda_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求出

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \lambda_{-3})^T = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{60}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{60} \right)^T,$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 I_i + \lambda_2 (I_i + I_{i+1}) + \lambda_3 (I_i + I_{i+1} + I_{i+2}) + \lambda_{-1} I_{i-1} + \lambda_{-2} (I_{i-1} + I_{i-2}) + \lambda_{-3} (I_{i-1} + I_{i-2} + I_{i-3}) \\
&= \frac{1}{60} I_{i-3} - \frac{2}{15} I_{i-2} + \frac{37}{60} I_{i-1} + \frac{37}{60} I_i - \frac{2}{15} I_{i+1} + \frac{1}{60} I_{i+2} \\
&= f_i h + O(h^6),
\end{aligned}$$

则有

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{60h} (I_{i-3} - 8I_{i-2} + 37I_{i-1} + 37I_i - 8I_{i+1} + I_{i+2}) = f_i + O(h^6).$$

确定 6 个适用的参数 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_{-1}, \mu_{-2}, \mu_{-3}$, 让它们契合以下要求

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & -1 & -2^2 & -3^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 1 & 2^3 & 3^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & -1 & -2^4 & -3^4 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 1 & 2^5 & 3^5 \\ 1 & 2^6 & 3^6 & -1 & -2^6 & -3^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_{-1} \\ \mu_{-2} \\ \mu_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求出

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_{-1}, \mu_{-2}, \mu_{-3})^T = \left(-\frac{13}{48}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{48}, -\frac{13}{48}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{48} \right)^T,$$

所以有

$$\begin{aligned} & \mu_1 I_i + \mu_2 (I_i + I_{i+1}) + \mu_3 (I_i + I_{i+1} + I_{i+2}) + \mu_{-1} I_{i-1} + \mu_{-2} (I_{i-1} + I_{i-2}) + \mu_{-3} (I_{i-1} + I_{i-2} + I_{i-3}) \\ &= -\frac{1}{48} I_{i-3} + \frac{7}{48} I_{i-2} - \frac{1}{8} I_{i-1} - \frac{1}{8} I_i + \frac{7}{48} I_{i+1} - \frac{1}{48} I_{i+2} \\ &= \frac{f_i''}{3!} h^3 + O(h^4), \end{aligned}$$

则有

$$\tilde{f}_i'' = \frac{1}{8h^3} (-I_{i-3} + 7I_{i-2} - 6I_{i-1} - 6I_i + 7I_{i+1} - I_{i+2}) = f_i'' + O(h^4).$$

定理 3 令 $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, 对于端点 $i=0, 1, 2, n-2, n-1, n$ 处的函数值与二阶导数值有如下近似:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= \frac{1}{60h} (147I_0 - 213I_1 + 237I_2 - 163I_3 + 62I_4 - 10I_5) = f_0 + O(h^6), \\ \tilde{f}_1 &= \frac{1}{60h} (10I_0 + 87I_1 - 63I_2 + 37I_3 - 13I_4 + 2I_5) = f_1 + O(h^6), \\ \tilde{f}_2 &= \frac{1}{60h} (-2I_0 + 22I_1 + 57I_2 - 23I_3 + 7I_4 - I_5) = f_2 + O(h^6), \\ \tilde{f}_{n-2} &= \frac{1}{60h} (-2I_{n-1} + 22I_{n-2} + 57I_{n-3} - 23I_{n-4} + 7I_{n-5} - I_{n-6}) = f_{n-2} + O(h^6), \\ \tilde{f}_{n-1} &= \frac{1}{60h} (10I_{n-1} + 87I_{n-2} - 63I_{n-3} + 37I_{n-4} - 13I_{n-5} + 2I_{n-6}) = f_{n-1} + O(h^6), \\ \tilde{f}_n &= \frac{1}{60h} (147I_{n-1} - 213I_{n-2} + 237I_{n-3} - 163I_{n-4} + 62I_{n-5} - 10I_{n-6}) = f_n + O(h^6), \\ \tilde{f}_0'' &= \frac{1}{48h^3} (294I_0 - 1098I_1 + 1668I_2 - 1308I_3 + 534I_4 - 90I_5) = f_0'' + O(h^4), \\ \tilde{f}_1'' &= \frac{1}{48h^3} (90I_0 - 246I_1 + 252I_2 - 132I_3 + 42I_4 - 6I_5) = f_1'' + O(h^4), \\ \tilde{f}_2'' &= \frac{1}{48h^3} (6I_0 + 54I_1 - 156I_2 + 132I_3 - 42I_4 + 6I_5) = f_2'' + O(h^4), \\ \tilde{f}_{n-2}'' &= \frac{1}{48h^3} (6I_{n-1} + 54I_{n-2} - 156I_{n-3} + 132I_{n-4} - 42I_{n-5} + 6I_{n-6}) = f_{n-2}'' + O(h^4), \\ \tilde{f}_{n-1}'' &= \frac{1}{48h^3} (90I_{n-1} - 246I_{n-2} + 252I_{n-3} - 132I_{n-4} + 42I_{n-5} - 6I_{n-6}) = f_{n-1}'' + O(h^4), \\ \tilde{f}_n'' &= \frac{1}{48h^3} (294I_{n-1} - 1098I_{n-2} + 1668I_{n-3} - 1308I_{n-4} + 534I_{n-5} - 90I_{n-6}) = f_n'' + O(h^4). \end{aligned}$$

证明 当 $i=0$ 时, 将 $f(x)$ 在点 x_0 处泰勒展开

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_0^{(j)}}{j!} (x - x_0)^j,$$

则有

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_0^{(j)}}{j!} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^j dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} f_0^{(j)} \\ &= f_0 h + \frac{f_0'}{2!} h^2 + \frac{f_0''}{3!} h^3 + \frac{f_0'''}{4!} h^4 + \frac{f_0^{(4)}}{5!} h^5 + \frac{f_0^{(5)}}{6!} h^6 + O(h^7) \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^1 I_i &= f_0(2h) + \frac{f_0'}{2!}(2h)^2 + \frac{f_0''}{3!}(2h)^3 + \frac{f_0'''}{4!}(2h)^4 + \frac{f_0^{(4)}}{5!}(2h)^5 + \frac{f_0^{(5)}}{6!}(2h)^6 + O(h^7), \\ \sum_{i=0}^2 I_i &= f_0(3h) + \frac{f_0'}{2!}(3h)^2 + \frac{f_0''}{3!}(3h)^3 + \frac{f_0'''}{4!}(3h)^4 + \frac{f_0^{(4)}}{5!}(3h)^5 + \frac{f_0^{(5)}}{6!}(3h)^6 + O(h^7), \\ \sum_{i=0}^3 I_i &= f_0(4h) + \frac{f_0'}{2!}(4h)^2 + \frac{f_0''}{3!}(4h)^3 + \frac{f_0'''}{4!}(4h)^4 + \frac{f_0^{(4)}}{5!}(4h)^5 + \frac{f_0^{(5)}}{6!}(4h)^6 + O(h^7), \\ \sum_{i=0}^4 I_i &= f_0(5h) + \frac{f_0'}{2!}(5h)^2 + \frac{f_0''}{3!}(5h)^3 + \frac{f_0'''}{4!}(5h)^4 + \frac{f_0^{(4)}}{5!}(5h)^5 + \frac{f_0^{(5)}}{6!}(5h)^6 + O(h^7), \\ \sum_{i=0}^5 I_i &= f_0(6h) + \frac{f_0'}{2!}(6h)^2 + \frac{f_0''}{3!}(6h)^3 + \frac{f_0'''}{4!}(6h)^4 + \frac{f_0^{(4)}}{5!}(6h)^5 + \frac{f_0^{(5)}}{6!}(6h)^6 + O(h^7).\end{aligned}$$

确定 6 个适用的参数 $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3, \widetilde{\lambda}_{-1}, \widetilde{\lambda}_{-2}, \widetilde{\lambda}_{-3}$, 让它们契合以下要求

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 & 6^5 \\ 1 & 2^6 & 3^6 & 4^6 & 5^6 & 6^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_1 \\ \widetilde{\lambda}_2 \\ \widetilde{\lambda}_3 \\ \widetilde{\lambda}_{-1} \\ \widetilde{\lambda}_{-2} \\ \widetilde{\lambda}_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求出

$$(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3, \widetilde{\lambda}_{-1}, \widetilde{\lambda}_{-2}, \widetilde{\lambda}_{-3})^T = \left(6, -\frac{15}{2}, \frac{20}{3}, -\frac{15}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{6} \right)^T,$$

所以有

$$\begin{aligned}& \widetilde{\lambda}_1 I_0 + \widetilde{\lambda}_2 (I_0 + I_1) + \widetilde{\lambda}_3 (I_0 + I_1 + I_2) + \widetilde{\lambda}_{-1} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3) \\ & + \widetilde{\lambda}_{-2} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + \widetilde{\lambda}_{-3} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \\ & = \frac{49}{20} I_0 - \frac{71}{20} I_1 + \frac{79}{20} I_2 - \frac{163}{60} I_3 + \frac{31}{30} I_4 - \frac{1}{6} I_5 \\ & = f_0 h + O(h^6),\end{aligned}$$

则有

$$\widetilde{f}_0 = \frac{1}{60h} (147I_0 - 213I_1 + 237I_2 - 163I_3 + 62I_4 - 10I_5) = f_0 + O(h^6).$$

确定 6 个适用的参数 $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2, \widetilde{\mu}_3, \widetilde{\mu}_{-1}, \widetilde{\mu}_{-2}, \widetilde{\mu}_{-3}$, 让它们契合以下要求

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 & 6^5 \\ 1 & 2^6 & 3^6 & 4^6 & 5^6 & 6^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}_1 \\ \widetilde{\mu}_2 \\ \widetilde{\mu}_3 \\ \widetilde{\mu}_{-1} \\ \widetilde{\mu}_{-2} \\ \widetilde{\mu}_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求出

$$\left(\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2, \widetilde{\mu}_3, \widetilde{\mu}_{-1}, \widetilde{\mu}_{-2}, \widetilde{\mu}_{-3}\right)^T = \left(\frac{29}{6}, -\frac{461}{48}, \frac{31}{3}, -\frac{307}{48}, \frac{13}{6}, -\frac{5}{16}\right)^T,$$

所以有

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mu}_1 I_0 + \widetilde{\mu}_2 (I_0 + I_1) + \widetilde{\mu}_3 (I_0 + I_1 + I_2) + \widetilde{\mu}_{-1} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3) \\ & + \widetilde{\mu}_{-2} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + \widetilde{\mu}_{-3} (I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \\ & = \frac{49}{48} I_0 - \frac{61}{16} I_1 + \frac{139}{24} I_2 - \frac{109}{24} I_3 + \frac{89}{48} I_4 - \frac{5}{16} I_5 \\ & = \frac{f_0''}{3!} h^3 + O(h^4), \end{aligned}$$

则有

$$\widetilde{f}_0'' = \frac{1}{48h^3} (294I_0 - 1098I_1 + 1668I_2 - 1308I_3 + 534I_4 - 90I_5) = f_0'' + O(h^4).$$

采取相同的思路, 可以获得 f 在 $x_1, x_2, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ 处函数值及二阶导数值的近似计算。

3.2. 高精度积分型 MQ 拟插值格式

借助定理 2 和定理 3 中的 $\widetilde{f}_i$ 和 $\widetilde{f}_i''$ 更换拟插值算子 $L_w f(x)$ 中的 f_i 和 f_i'' , 基于径向基函数插值的理论基础, 能够构造一个径向基插值函数 $\mathcal{S}_{\widetilde{f}, N}$, 在 $[a, b]$ 上逼近 $\widetilde{f}(x)$ 的二阶导数值, 满足

$$\mathcal{S}_{\widetilde{f}, N}(x_{k_i}) = \widetilde{f''}(x_{k_i}), \quad i = 1, \dots, N.$$

取径向基函数为严格的正定径向基函数 IMQ 函数

$$\phi(r) = \frac{s^2}{(s^2 + r^2)^{3/2}},$$

该函数能够通过 MQ 径向基函数

$$\psi(r) = \sqrt{s^2 + r^2}, \quad s > 0,$$

求取二次导数得到。

鉴于 $\phi(r)$ 是严格正定的, 因此根据径向基函数的插值理论, 能够将 $\mathcal{S}_{\widetilde{f}, N}$ 表示为:

$$\mathcal{S}_{\widetilde{f}, N}(x) = \sum_{i=1}^N \widetilde{\alpha}_i \phi(|x - x_{k_i}|),$$

其中, $\{\widetilde{\alpha}_i\}_{i=1}^N$ 遵循如下插值条件

$$\mathcal{S}_{\widetilde{f}, N}(x_{k_j}) = \sum_{i=1}^N \widetilde{\alpha}_i \phi(|x_{k_j} - x_{k_i}|) = \widetilde{f''}(x_{k_j}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

记

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{x_{k_1}, \dots, x_{k_N}\}, \\ \widetilde{\alpha} &= (\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_N)^T, \\ A_{\phi, \mathcal{X}} &= \left(\phi(|x_{k_j} - x_{k_i}|)\right), \end{aligned}$$

$$\widetilde{f''}_{\mathcal{X}} = \left(\widetilde{f''(x_{k_1})}, \dots, \widetilde{f''(x_{k_N})} \right)^T.$$

由于(4)具有唯一可解性, 可以推导出

$$\tilde{\alpha} = (A_{\phi, \mathcal{X}})^{-1} \cdot \widetilde{f''}_{\mathcal{X}},$$

利用 $\tilde{\alpha}$ 中每个 $\tilde{\alpha}_i$ 及 $\widetilde{f(x)}$, 构造出函数

$$\widetilde{\mathcal{E}(x)} = \widetilde{f(x)} - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2}. \quad (5)$$

从而可以生成一组新的数据 $\left(x_i, \widetilde{\mathcal{E}(x_i)} \right)_{i=0}^n$, 采用带参数 c 的 L_D 拟插值算子对这组新数据进行处理, 获得函数 $\widetilde{\mathcal{E}(x)}$ 的一个近似形式 $L_D \widetilde{\mathcal{E}(x)}$, 从而在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x)$ 的拟插值算子

$$IL_W f(x) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} + L_D \widetilde{\mathcal{E}(x)}. \quad (6)$$

由此得到的高精度积分型拟插值算子 $IL_W f(x)$ 无需目标函数的函数值和二阶导数值, 仅需知道积分值即可。

3.3. 误差估计

接下来推导拟插值算子 $IL_W f(x)$ 的误差估计。

定理 4 在本性空间 $\mathcal{N}_\phi$ 上衡量 $IL_W f(x)$ 的误差, 对于一个给定函数 $f(x)$, 如果满足 $f'' \in \mathcal{N}_\phi$, $c^2 |\ln c| = O(h^2)$, $h_2 = O(h)$, 则会存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得误差满足

$$\|IL_W f - f\|_\infty \leq C_1 h^2 \cdot e^{-C_2/h} \cdot \|f\|_{\mathcal{N}_\phi}.$$

证明 显然

$$\begin{aligned} \|IL_W f(x) - f(x)\|_\infty &= \|IL_W f(x) - L_W f(x) + L_W f(x) - f(x)\|_\infty \\ &\leq \|IL_W f(x) - L_W f(x)\|_\infty + \|L_W f(x) - f(x)\|_\infty, \end{aligned}$$

对 $\forall i$, 有

$$\widetilde{f(x_i)} - f(x_i) = O(h^6), \quad \widetilde{f''(x_i)} - f''(x_i) = O(h^4),$$

$$\tilde{\alpha} - \alpha = A_{\phi, \mathcal{X}}^{-1} \widetilde{f''_{\mathcal{X}}} - A_{\phi, \mathcal{X}}^{-1} f''_{\mathcal{X}} = A_{\phi, \mathcal{X}}^{-1} (\widetilde{f''_{\mathcal{X}}} - f''_{\mathcal{X}}),$$

$$\tilde{\alpha}_i - \alpha_i = O(h^4).$$

而

$$\begin{aligned} &\|IL_W f(x) - L_W f(x)\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} + L_D \widetilde{\mathcal{E}(x)} - \sum_{i=1}^N \alpha_i \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} - L_D \mathcal{E}(x) \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^N (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i) \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} \right\|_\infty + \|L_D \widetilde{\mathcal{E}(x)} - L_D \mathcal{E}(x)\|_\infty, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& \|L_D \widetilde{\mathcal{E}}(x) - L_D \mathcal{E}(x)\|_\infty \\
&= \left\| \left[\widetilde{f(x_0)} - f(x_0) \right] + \sum_{i=1}^N (\widetilde{\alpha_i} - \alpha_i) \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} \right\} \delta_0(x) \\
&+ \left\{ \left[\widetilde{f(x_1)} - f(x_1) \right] + \sum_{i=1}^N (\widetilde{\alpha_i} - \alpha_i) \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} \right\} \delta_1(x) \\
&+ \sum_{j=2}^{N-2} \left\{ \left[\widetilde{f(x_j)} - f(x_j) \right] + \sum_{i=1}^N (\widetilde{\alpha_i} - \alpha_i) \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} \right\} \psi_j(x) \\
&+ \left\{ \left[\widetilde{f(x_{N-1})} - f(x_{N-1}) \right] + \sum_{i=1}^N (\widetilde{\alpha_i} - \alpha_i) \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} \right\} \delta_{N-1}(x) \\
&+ \left\{ \left[\widetilde{f(x_N)} - f(x_N) \right] + \sum_{i=1}^N (\widetilde{\alpha_i} - \alpha_i) \sqrt{s^2 + (x - x_{k_i})^2} \right\} \delta_N(x) \Big\|_\infty \\
&= O(h^4).
\end{aligned}$$

由文献[5]中的定理 1, 可以知道

$$\|f - L_W f\|_\infty \leq C_1 h^2 \cdot e^{-C_2/h} \cdot \|f\|_{N_\phi},$$

从而 $IL_W f(x)$ 的误差估计为:

$$\|IL_W f - f\|_\infty \leq C_1 h^2 \cdot e^{-C_2/h} \cdot \|f\|_{N_\phi}.$$

4. 数值实验

在本节中, 我们采用新构造出的拟插值算子 $IL_W f(x)$ 对文献[10]所列举的函数 $f(x) = e^x$ 和 $g(x) = \sin(\pi x)$ 进行逼近, 定义最大误差(maximum error, ME)为:

$$ME(n) = \|IL_W f(x) - f(x)\|_\infty.$$

为了直观体现逼近的整体趋势, 本实验首先选取 $c = h^5$, $s = 5h$, 分别呈现出 $f(x)$ 和 $IL_W f(x)$ 、 $g(x)$ 和 $IL_W g(x)$ 、 $f'(x)$ 和 $IL_W f'(x)$ 、 $g'(x)$ 和 $IL_W g'(x)$ 、 $f(x)$ 和 $IL_W f(x)$ 的最大误差及 $g(x)$ 和 $IL_W g(x)$ 的最大误差的函数图像, 详见图 1、图 2 和图 3 所示(取 $n = 40$)。

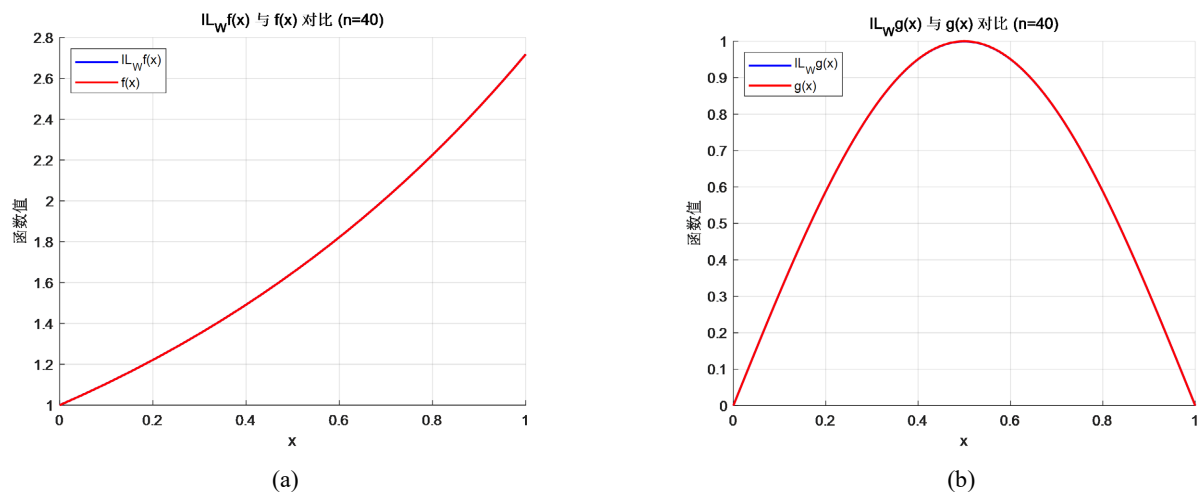


Figure 1. (a) Functions $IL_W f(x)$ and $f(x)$; (b) Functions $IL_W g(x)$ and $g(x)$

图 1. (a) 函数 $IL_W f(x)$ 与 $f(x)$; (b) 函数 $IL_W g(x)$ 与 $g(x)$

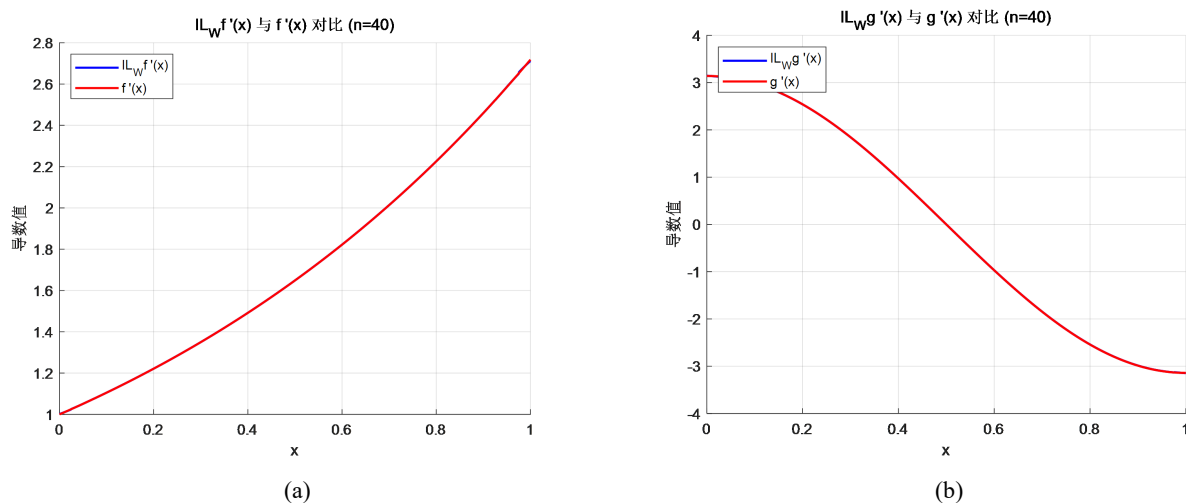


Figure 2. (a) Functions $IL_W f'(x)$ and $f'(x)$; (b) Functions $IL_W g'(x)$ and $g'(x)$

图 2. (a) 函数 $IL_W f'(x)$ 与 $f'(x)$; (b) 函数 $IL_W g'(x)$ 与 $g'(x)$

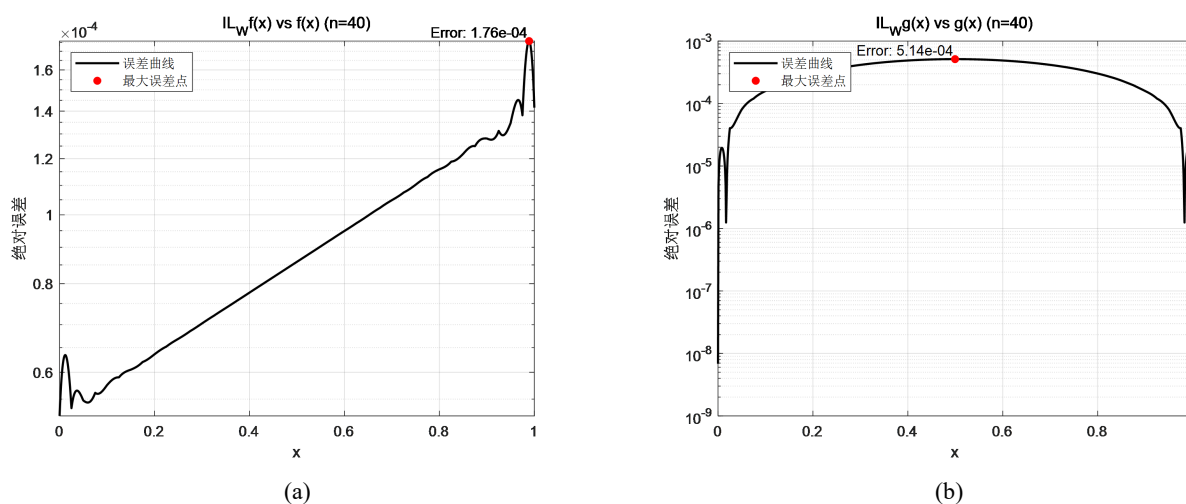


Figure 3. (a) Error between functions $IL_W f(x)$ and $f(x)$; (b) Error between functions $IL_W g(x)$ and $g(x)$

图 3. (a) 函数 $IL_W f(x)$ 与 $f(x)$ 的误差; (b) 函数 $IL_W g(x)$ 与 $g(x)$ 的误差

进一步考虑参数的选取对近似效果的影响, 我们改变 c, s 的取值, 其对目标函数的最大误差如下表 1、表 2 所示(取 $n = 40$)。

Table 1. Maximum error of $IL_W f(x)$ on $f(x)$ for varying values of c and s ($n = 40$)

表 1. 当 c, s 取不同值时, $IL_W f(x)$ 对 $f(x)$ 的最大误差($n = 40$)

$s \backslash c$	h	h^5	h^{10}	h^{15}
$5h$	2.29×10^{-4}	1.76×10^{-4}	1.76×10^{-4}	1.76×10^{-4}
$10h$	1.53×10^{-4}	1.46×10^{-4}	1.46×10^{-4}	1.46×10^{-4}
$15h$	1.43×10^{-4}	1.42×10^{-4}	1.42×10^{-4}	1.42×10^{-4}
$20h$	1.42×10^{-4}	1.42×10^{-4}	1.42×10^{-4}	1.42×10^{-4}

Table 2. Maximum error of $IL_w g(x)$ on $g(x)$ for varying values of c and s ($n=40$)**表 2.** 当 c, s 取不同值时, $IL_w g(x)$ 对 $g(x)$ 的最大误差 ($n=40$)

$s \backslash c$	h	h^5	h^{10}	h^{15}
$5h$	5.10×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}
$10h$	5.13×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}
$15h$	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}
$20h$	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}

接下来列举不同数值的 n , 计算 $IL_w f(x)$, $IL_w g(x)$ 的最大误差并对比了文献[11]中的 $L_{dl} f(x)$ 拟插值算子、文献[12]中的 $Q_{Bl} f(x)$ 拟插值算子和文献[13]中的 $\tilde{L}H_3 f(x)$ 拟插值算子的最大误差, 详细数据如下表 3、表 4 所示。

Table 3. Maximum error between quasi-interpolation operator $IL_w f(x)$ on $f(x)$ **表 3.** 拟插值算子 $IL_w f(x)$ 对 $f(x)$ 的最大误差

n	$\ IL_w f(x) - f(x)\ _\infty$	$\ L_{dl} f(x) - f(x)\ _\infty$	$\ Q_{Bl} f(x) - f(x)\ _\infty$	$\ \tilde{L}H_3 f(x) - f(x)\ _\infty$
10	2.89×10^{-3}	6.16×10^{-3}	1.29×10^{-1}	4.61×10^{-5}
20	7.09×10^{-4}	1.62×10^{-3}	6.63×10^{-2}	3.13×10^{-6}
40	1.76×10^{-4}	4.14×10^{-4}	3.36×10^{-2}	2.04×10^{-7}
80	4.37×10^{-5}	1.05×10^{-4}	1.69×10^{-2}	1.29×10^{-8}

Table 4. Maximum error between quasi-interpolation operator $IL_w g(x)$ on $g(x)$ **表 4.** 拟插值算子 $IL_w g(x)$ 对 $g(x)$ 的最大误差

n	$\ IL_w g(x) - g(x)\ _\infty$	$\ L_{dl} g(x) - g(x)\ _\infty$	$\ Q_{Bl} g(x) - g(x)\ _\infty$	$\ \tilde{L}H_3 g(x) - g(x)\ _\infty$
20	2.06×10^{-3}	6.16×10^{-3}	7.82×10^{-2}	3.66×10^{-5}
40	5.14×10^{-4}	1.54×10^{-3}	3.92×10^{-2}	1.99×10^{-6}
80	1.29×10^{-4}	3.85×10^{-4}	1.92×10^{-2}	1.25×10^{-7}
160	3.21×10^{-5}	9.64×10^{-5}	9.82×10^{-3}	7.77×10^{-9}

分析表中数据, 可以明显看出新的拟插值算子 $IL_w f(x)$ 与 $L_{dl} f(x)$ 拟插值算子、 $Q_{Bl} f(x)$ 拟插值算子相比, 展现出更佳的逼近效果。与拟插值算子 $\tilde{L}H_3 f(x)$ 相比, 本文的最大误差相对较大, 不过本文所构造的拟插值算子有两个可供调整的参数 c, s 。通过参数的调整, 可以优化逼近目标函数的效果, 具有重要的实际意义。需要指出的是, 目标函数动态调整时参数寻优机制尚未建立明确的方法论体系, 针对该问题, 计划通过参数敏感性分析框架, 结合自适应优化算法寻找最佳参数, 计划在后续研究中完成。

在表 5、表 6 中相应列出了当 n 取不同的数值时, $IL_w f(x)$ 与 $IL_w g(x)$ 实验收敛阶数值与理论收敛阶数值的对比, 其中数值收敛阶(NCO)定义如下:

$$NCO := NCO(n \rightarrow 2n) = \frac{\ln(ME(n)/ME(2n))}{\ln 2}.$$

Table 5. Numerical convergence order of quasi-interpolation operator $IL_w f(x)$ on $f(x)$

表 5. 拟插值算子 $IL_w f(x)$ 对 $f(x)$ 的数值收敛阶

n	$NCO(f(x))$
10 $\rightarrow$ 20	2.03
20 $\rightarrow$ 40	2.01
40 $\rightarrow$ 80	2.01
理论值	2

Table 6. Numerical convergence order of quasi-interpolation operator $IL_w g(x)$ on $g(x)$

表 6. 拟插值算子 $IL_w g(x)$ 对 $g(x)$ 的数值收敛阶

n	$NCO(g(x))$
20 $\rightarrow$ 40	2.00
40 $\rightarrow$ 80	2.00
80 $\rightarrow$ 160	2.00
理论值	2

数值实验结果表明，两个函数的实测收敛阶与理论预测值在统计误差范围内保持高度一致。

5. 结语

本文所构造的高精度积分值型 MQ 拟插值算子在解决已知连续区间上积分值的函数重构上具有一定的优越性。不需要额外的目标函数边界条件等信息，也不要求解线性方程组。整体而言，对目标函数的逼近效果比较理想。拓宽了 MQ 拟插值的应用范围，在气候模拟、流体力学及高维数据建模等领域具有潜在的使用价值。同时，本文所提方法的计算框架为其他径向基函数与积分值信息的结合提供了参考范式。

参考文献

- [1] Powell, M.J.D. (1990) Univariate Multiquadric Approximation: Reproduction of Linear Polynomials. In: *International Series of Numerical Mathematics/Série Internationale d'Analyse Numérique*, Birkhäuser Basel, 227-240. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5685-0_17
- [2] Beatson, R.K. and Powell, M.J.D. (1992) Univariate Multiquadric Approximation: Quasi-Interpolation to Scattered Data. *Constructive Approximation*, **8**, 275-288. <https://doi.org/10.1007/bf01279020>
- [3] Wu, Z. and Robert, S. (1994) Shape Preserving Properties and Convergence of Univariate Multiquadric Quasi-Interpolation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **10**, 441-446. <https://doi.org/10.1007/bf02016334>
- [4] Ling, L. (2005) Multivariate Quasi-Interpolation Schemes for Dimension-Splitting Multiquadric. *Applied Mathematics and Computation*, **161**, 195-209. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.022>
- [5] 姜自武. 样条函数与径向基函数的若干研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2010.
- [6] 高文武. 基于导数信息的 Multiquadric 拟插值[J]. 复旦学报, 2016, 55(3): 298-303.
- [7] Behforooz, H. (2006) Approximation by Integro Cubic Splines. *Applied Mathematics and Computation*, **175**, 8-15. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.07.066>
- [8] Lang, F. and Xu, X. (2012) On Integro Quartic Spline Interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 4214-4226. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.05.017>

-
- [9] Boujraf, A., Sibih, D., Tahrichi, M. and Tijini, A. (2015) A Simple Method for Constructing Integro Spline Quasi-Interpolants. *Mathematics and Computers in Simulation*, **111**, 36-47. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.11.019>
 - [10] 吴金明, 张雨, 张晓磊, 等. 积分值五次样条拟插值[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(5): 801-807.
 - [11] 彭兴璇, 常雪, 王倩. 基于积分值的 MQ 拟插值[J]. 数学的实践与认识, 2024, 54(12): 211-218.
 - [12] Gao, W., Zhang, X. and Zhou, X. (2020) Multiquadric Quasi-Interpolation for Integral Functionals. *Mathematics and Computers in Simulation*, **177**, 316-328. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.04.015>
 - [13] 吴金明, 单婷婷, 朱春钢. 连续区间上积分值的 MQ 拟插值算子[J]. 系统科学与数学, 2019, 39(12): 1972-1982.