Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 465-475
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145275

Hans汉斯

高阶Haar小波配置法求解五阶微分方程

秦玺鹏，许小勇*

东华理工大学理学院，江西 南昌

收稿日期：2025年4月28日；录用日期：2025年5月21日；发布日期：2025年5月30日

摘 要

本文利用高阶Haar小波方法求解具有不同边界条件的五阶微分方程。对线性微分方程，使用高阶Haar小波配置法，将微分方程转化为线性代数方程组求解；对于非线性微分方程，则使用拟线性化方法将其转化为线性微分方程后求解。通过计算方程组系数矩阵的条件数，判断出方法的稳定性。数值实验表明，高阶Haar小波方法比经典的Haar小波方法有着更高的数值精度，可以用更少的配置点获得更小的误差，并且增加尺度误差下降得更快，通过求解最大绝对误差和均方根误差，得到了高阶Haar小波方法具有四阶精度的结论，数值计算结果与其他方法进行了比较。

关键词

高阶Haar小波，五阶微分方程，拟线性化方法，两点积分边界条件

The Solution of Fifth-Order Differential Equations by the High-Order Haar Wavelet Collocation Method

Xipeng Qin, Xiaoyong Xu*

School of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Apr. 28th, 2025; accepted: May 21st, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

This paper utilizes the high-order Haar wavelet method to solve fifth-order differential equations with different boundary conditions. For linear differential equations, the high-order Haar wavelet collocation method is employed to transform the differential equation into a system of linear algebraic

*通讯作者。

文章引用: 秦玺鹏, 许小勇. 高阶 Haar 小波配置法求解五阶微分方程[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 465-475.
DOI: 10.12677/aam.2025.145275

equations for solution. For nonlinear differential equations, the quasi-linearization method is used to convert them into linear differential equations before solving. The stability of the method is determined by calculating the condition number of the coefficient matrix of the equation system. Numerical experiments show that the high-order Haar wavelet method has higher numerical accuracy than the classical Haar wavelet method, achieving smaller errors with fewer collocation points. Moreover, as the scale increases, the error decreases more rapidly. By solving the maximum absolute error and the root mean square error, it is concluded that the high-order Haar wavelet method has a fourth-order accuracy. The numerical results are compared with those of other methods.

Keywords

Higher-Order Haar Wavelet, Fifth-Order Differential Equation, Quasi-Linearization Method, Two-Point Integral Boundary Conditions

1. 引言

微分方程在力学、生物数学[1]等众多领域都有着广泛的应用，其中五阶微分方程在高阶非线性动力学和流体力学中有着重要的作用。对于一般的五阶微分方程，通常难以获得其精确解，因此有必要去使用数值方法进行求解。Mechee 等采取了一种直接显式的 Runge-Kutta 方法来求解一种特殊的五阶微分方程[2]，Al-fayyadh 等采用指数拟合－对角隐式 Runge-Kutta 法直接求解五阶微分方程[3]，也有许多学者使用了小波方法去求解微分方程[4]-[6]。2018 年，Majak 等采用了高阶 Haar 小波方法(HOHWM)去求解微分方程[7]，相比于经典的 Haar 小波方法(HWM)，HOHWM 的精度更高，并可以将 HWM 的收敛阶从 2 提升到 4，该方法得到了广泛的关注，随后有学者将高阶 Haar 小波方法用于求解各种应用问题，比如 Ratas 等将 HOHWM 用于求解非线性演化方程，通过与 HWM 的对比，验证 HOHWM 在精度和计算效率上的优势[8]。Bulut 等采用 HOHWM 求解正则化长波方程(RLW) [9]。Yasmeen 等将 HOHWM 用于求解积分方程，观察到 4 阶收敛[10]。也有学者用 HOHWM 去求解高阶微分方程[11]。就我们所知，目前没有学者将 HOHWM 作用在五阶微分方程上。

本文旨在用高阶的 Haar 小波方法(HOHWM)求解如下的五阶微分方程：

$$y^{(5)}=F\left(x,y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)},y^{(4)}\right),\quad \theta_0\le x\le\theta_1 \tag{1}$$

考虑以下三种边界条件：

1) 简单边界条件

$$y(\theta_0)=\alpha_1,\quad y(\theta_1)=\alpha_2,\quad y^{(1)}(\theta_0)=\alpha_3,\quad y^{(1)}(\theta_1)=\alpha_4,\quad y^{(2)}(\theta_0)=\alpha_5.$$

2) 两点边界条件

$$y(\theta_0)+y(\theta_1)=\varepsilon_1,\quad y(\theta_0)+y'(\theta_0)=\varepsilon_2,\quad y(\theta_0)+y'(\theta_1)=\varepsilon_3,$$

$$y(\theta_0)+y''(\theta_0)=\varepsilon_4,\quad y'(\theta_0)+y(\theta_1)=\varepsilon_5.$$

3) 两点积分边界条件

$$\omega_1\int_{\theta_0}^{\theta_1}y(x)\mathrm{d}x=\gamma_1,\ y(\theta_0)+\omega_1\int_{\theta_0}^{\theta_1}y(x)\mathrm{d}x=\gamma_2,\ y(\theta_1)+\omega_1\int_{\theta_0}^{\theta_1}y(x)\mathrm{d}x=\gamma_3,$$

$$y'(\theta_0)+\omega_1\int_{\theta_0}^{\theta_1}y(x)\mathrm{d}x=\gamma_4,\ y'(\theta_1)+\omega_1\int_{\theta_0}^{\theta_1}y(x)\mathrm{d}x=\gamma_5,$$

其中，α_i、ε_i、γ_i、$i=1,2,3,4,5$ 和 ω_1 为常数。

2. Haar 小波函数

Haar 小波函数定义[12]

在$[\theta_0,\theta_1]$上的 Harr 小波定义如下：

$$i=1\text{时},\ \varphi_1(x)=\begin{cases}1 & x\in[\theta_1,\theta_2)\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad i>1\text{时},\ \varphi_i(x)=\begin{cases}1 & x\in[\eta_1(i),\eta_2(i))\\ -1 & x\in[\eta_2(i),\eta_3(i))\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

其中，$\eta_1(i)=\theta_0+\dfrac{(\theta_1-\theta_0)k}{2^j}$，$\eta_2(i)=\theta_0+\dfrac{(\theta_1-\theta_0)(k+0.5)}{2^j}$，$\eta_3(i)=\theta_0+\dfrac{(\theta_1-\theta_0)(k+1)}{2^j}$，$i=2^j+k+1$，$j=0,1,\cdots,J$，$k=0,1,\cdots,2^j-1$。

若函数$u(x)\in L^2[\theta_0,\theta_1]$，则可以由 Haar 小波表示为：

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(x) \tag{2}$$

对式子(2)进行截断，得到$u(x)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\varphi_i(x)$，其中$M=2^J$。为了简化计算，引入 Haar 小波函数的 n 次积分，记作$\psi_{n.i}(x)$，积分公式如下：$i=1$时，$\psi_{n,1}(x)=\dfrac{x^n}{n!}$；

$$i>1\text{时},\ \psi_{n,i}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,\eta_1(i))\\ \dfrac{1}{n!}(x-\eta_1(i))^n & x\in[\eta_1(i),\eta_2(i))\\ \dfrac{1}{n!}\left[(x-\eta_1(i))^n-2(x-\eta_2(i))^n\right] & x\in[\eta_2(i),\eta_3(i))\\ \dfrac{1}{n!}\left[(x-\eta_1(i))^n-2(x-\eta_2(i))^n+(x-\eta_3(i))^n\right] & x\in[\eta_3(i),1)\end{cases}。$$

3. 算法介绍

Haar 小波方法(HWM)求解微分方程是将方程中未知函数的最高阶导数用 Haar 小波表示，而高阶 Haar 小波方法(HOHWM)求解五阶微分方程是将$u^{(5+2s)}(x)$展开为 Haar 小波函数，本文中取$s=1$，即：

$$u^{(7)}(x)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\varphi_i(x),$$

对上述方程两边关于变量 x 连续积分七次，得到未知函数及其低阶导数的表达式：

$$u^{(6)}(x)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{1,i}(x)+a_6,$$

$$u^{(5)}(x)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{2,i}(x)+a_6x+a_5, \tag{3}$$

$$u^{(4)}\left(x\right)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{3,i}\left(x\right)+\frac{a_6x^2}{2}+a_5x+a_4\,, \tag{4}$$

$$u^{(3)}\left(x\right)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{4,i}\left(x\right)+\frac{a_6x^3}{6}+\frac{a_5x^2}{2}+a_4x+a_3\,, \tag{5}$$

$$u^{(2)}\left(x\right)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{5,i}\left(x\right)+\frac{a_6x^4}{24}+\frac{a_5x^3}{6}+\frac{a_4x^2}{2}+a_3x+a_2\,, \tag{6}$$

$$u^{(1)}\left(x\right)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{6,i}\left(x\right)+\frac{a_6}{120}x^5+\frac{a_5}{24}x^4+\frac{a_4}{6}x^3+\frac{a_3}{2}x^2+a_2x+a_1\,, \tag{7}$$

$$u\left(x\right)\approx\sum_{i=1}^{2M}c_i\psi_{7,i}\left(x\right)+\frac{a_6}{720}x^6+\frac{a_5}{120}x^5+\frac{a_4}{24}x^4+\frac{a_3}{6}x^3+\frac{a_2}{2}x^2+a_1x+a_0\,, \tag{8}$$

其中， $a_i\left(i=0,1,\cdots,6\right)$ 是未知的积分常数。把式子(3)~(8)代入方程(1)中，并且使用配置点

$$x_l=\theta_0+\frac{\left(\theta_1-\theta_0\right)\left(l-1/2\right)}{2M},l=1,2,\cdots,2M\,,$$

进行离散，得到 $2M$ 个方程，方程中共含有 $2M+7$ 个未知数，再根据初值条件可构造五个方程。根据高阶 Haar 小波方法[7]，另外选择 $x_0=\theta_0$ 与 $x_{2M+1}=\theta_1$ 为配置点，使方程(1)在 x_0 和 x_{2M+1} 上成立，可得到两个方程，构成了包含 $2M+7$ 个未知数的方程组。

为了更好地理解所提出的技术，这里给出(1)的一种特殊情况：

$$y^{(5)}\left(x\right)+xy\left(x\right)=5\left(x-1\right)\sin\left(x\right)+5\left(x-x^2-5\right)\cos\left(x\right),$$

简单边界条件为： $y\left(0\right)=5$ ， $y^{(1)}\left(0\right)=-5$ ， $y^{(2)}\left(0\right)=-5$ ， $y^{(1)}\left(1\right)=-5\cos\left(1\right)$ ， $y\left(1\right)=0$ 。

记

$$C^{\mathrm{T}}=\left[c_1,c_2,\cdots,c_{2M}\right],\quad I^n\Phi\left(x\right)=\begin{bmatrix}\psi_{n,1}\left(x\right)\\ \psi_{n,2}\left(x\right)\\ \vdots\\ \psi_{n,2M}\left(x\right)\end{bmatrix},$$

则由公式(3)和(8)可得：

$$y^{(5)}\left(x\right)+xy\left(x\right)=\left[C^{\mathrm{T}},a_6,a_5,\cdots,a_0\right]\begin{bmatrix}I^2\Phi\left(x\right)+xI^7\Phi\left(x\right)\\ x+\dfrac{x^7}{720}\\ 1+\dfrac{x^6}{120}\\ \vdots\\ x\end{bmatrix}, \tag{9}$$

根据式子(3)~(8)可知，五个边界条件可以表示为：

$$\left[C^{\mathrm{T}},a_6,a_5,\cdots,a_0\right]\begin{bmatrix}I^7\Phi\left(0\right) & I^6\Phi\left(0\right) & \cdots & I^7\Phi\left(1\right)\\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{720}\\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{120}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\left[5,-5,\cdots,0\right],$$

在式子(9)中代入配置点 0、$\frac{l-1/2}{2M}, l=1,2,\cdots,2M$ 、1，并结合边界条件，可以得到：

$$AX=B, \tag{10}$$

其中，$A=\left[C^{\mathrm{T}},a_6,a_5,\cdots,a_0\right]$，$B=\left[-25,\cdots,-25\cos(1),5,-5,\cdots,0\right]$，

$$X=\begin{bmatrix} I^2\Phi(0) & \cdots & I^2\Phi(1)+I^7\Phi(1) & I^7\Phi(0) & \cdots & I^7\Phi(1) \\ 0 & \cdots & 1+\frac{1}{720} & 0 & \cdots & \frac{1}{720} \\ 1 & \cdots & 1+\frac{1}{720} & 0 & \cdots & \frac{1}{120} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

对于两点边界条件和积分边界条件，同理根据式子(3)~(8)得出边界条件的表达式进行计算。

所举的例子是线性方程，可以直接使用高斯消去法来求解方程组(10)，可得小波系数 c_i 和积分常数 a_i，再通过表达式(8)，可以得到函数 $u(x)$ 在定义域内任何点处的近似值，但是若方程组是非线性的，则需要使用拟线性方法，方法一是对方程中的非线性项进行 Taylor 展开，将非线性项转化为线性的之后再代回原方程[5]，方法二是将方程进行 Picard 迭代，直接转化为线性方程进行求解，为了更好地理解 Picard 迭代，这里举一个非线性微分方程的例子：$y^{(5)}(x)-\mathrm{e}^{-x}y^2(x)=0$，简单边界条件：$y(0)=1$，$y(1)=\mathrm{e}$，$y^{(1)}(0)=1$，$y^{(1)}(1)=\mathrm{e}$，$y^{(2)}(0)=1$。对方程采用 Picard 迭代可得：$\left([y]^{z+1}\right)^{(5)}(x)-\mathrm{e}^{-x}\left([y]^z\right)^2=0$，$z$ 表示当前迭代步数为，下一步为 $z+1$，这是一个关于 $[y]^{z+1}$ 的五阶线性微分方程，可以直接对其采用 HOHWM。

4. Haar 小波收敛性和稳定性分析

4.1. 收敛性分析[13]

定理 1 (HOHWM) 设 $\frac{\mathrm{d}^{p+2s}u(x)}{\mathrm{d}x^{p+2s}}, p=1,2,3,4,5,6$ 存在，且在 $[\theta_0,\theta_1]$ 上有界，用 $u(x)$ 代表精确解，$u_{2M}(x)=\sum_{i=1}^{2M}c_i\varphi_i(x)$ 代表高阶 Haar 小波数值解，$M=2^J, J=0,1,2,\cdots$，$s=1,2$，有

$$\left\|u(x)-u_{2M}(x)\right\|_2=O\left[\left(\frac{1}{2^{J+1}}\right)^{2+2s}\right]。$$

4.2. 稳定性分析

定义 1 假设对于式子(10)的方程组 $AX=B$，若 X^{-1} 的范数小于某个常数 C，即 $\left\|X^{-1}\right\|\le C$，则称线性方程组是稳定的[5]。

对于方程组 $AX=B$，考虑其稳定性，首先要检查 X 是否可逆，若 X 不可逆，则说明方程组的解不唯一，在表 1 中给出了本文所举例子在不同 J 下 X 的条件数，观察到条件数均不为零，即矩阵 X 是可逆的。同时，由条件数的定义可知，对于给定元素的 X，当其条件数为有限值时，可得 $\left\|X^{-1}\right\|$ 有界，并且由表 1 可知，随着 J 的增加，条件数不会增加得很快，从而说明稳定性。

5. 数值算例

将高阶 Haar 小波方法用于给定了不同初值条件的线性或非线性五阶微分方程，并且与其他的方法进行了比较，展示高阶 Haar 小波方法的优势。为了检验所得结果的准确性和可靠性，采取了最大逐点误差：

Table 1. Condition numbers under different parameter conditions
表 1. 不同参数情况下的条件数

	例子 1	例子 2		例子 3		例子 4	
J	边界 1	边界 3	边界 1	Taylor 边界 1	Picard 边界 1	Taylor 边界 2	Picard 边界 2
1	4.54e+02	7.76e+03	2.76e+02	2.77e+02	2.75e+02	1.42e+05	4.00e+02
2	1.71e+03	8.31e+03	1.37e+03	1.38e+03	1.37e+03	2.10e+05	1.46e+03
3	8.75e+03	1.00e+04	7.25e+03	7.27e+03	7.26e+03	3.45e+05	7.26e+03
4	4.71e+04	4.55e+04	3.96e+04	3.97e+04	3.97e+04	1.52e+06	3.97e+04
5	2.60e+05	2.50e+05	2.21e+05	2.21e+05	2.21e+05	8.11e+06	2.21e+05
6	1.45e+06	1.39e+06	1.24e+06	1.24e+06	1.24e+06	4.45e+07	1.24e+06

$$L_\infty(J)=\max_i\left|u(x_i)-u_{2M}(x_i)\right|$$

以及均方根误差：

$$L_2(J)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}\left[\left(u(x_i)-u_{2M}(x_i)\right)^2\right]}{9}}$$

其中，$u(x)$ 代表精确解，$u_{2M}(x)$ 代表通过表达式(8)得出的近似解，$x_i=\theta_0+i\dfrac{(\theta_1-\theta_0)}{10},i=1,2,\cdots,9$，$M=2^J$。

为了展示 HOHWM 相对于 HWM 的优势，定义收敛阶为 $k_J=\dfrac{\log\left(L_\infty(J-1)\right)-\log\left(L_\infty(J)\right)}{\log(2)}$ 以及 $k_J=\dfrac{\log\left(L_2(J-1)\right)-\log\left(L_2(J)\right)}{\log(2)}$。

例 1 求解五阶线性微分方程：

$$y^{(5)}(x)+xy(x)=5(x-1)\sin(x)+5\left(x-x^2-5\right)\cos(x),$$

简单边界条件为：$y(0)=5$，$y^{(1)}(0)=-5$，$y^{(2)}(0)=-5$，$y^{(1)}(1)=-5\cos(1)$，$y(1)=0$，其精确解为 $y(x)=5(1-x)\cos(x)$。

表 2 给出了例 1 简单边界条件下 HOHWM 的 L_∞ 和 L_2 误差，并计算收敛阶，与文献[5]中 HWM 的 L_∞ 误差和收敛阶对比。由表 2 可知，相对于 HWM，HOHWM 的误差更小，并且随着 J 的增加，HOHWM 误差下降得更快，收敛阶为 4。

Table 2. L_∞ errors、L_2 errors and the convergence orders of the HWM and HOHWM methods in Example 1
表 2. 例 1 HWM 和 HOHWM 方法的 L_∞ 误差、L_2 误差以及收敛阶

	HWM [5]		HOHWM			
J	L_∞	收敛阶	L_∞	收敛阶	L_2	收敛阶
$J=1$	2.48e−5	-	1.82e−07	-	1.16e−07	-
$J=2$	6.04e−6	2.0363	1.07e−08	4.0864	6.81e−09	4.0869

续表

$J=3$	1.52e−6	1.9920	6.63e−10	4.0139	4.21e−10	4.0151
$J=4$	3.79e−7	2.0046	4.14e−11	4.0024	2.63e−11	4.0025
$J=5$	9.47e−8	1.9984	2.58e−12	4.0036	1.64e−12	4.0043

例 2 考虑线性五阶微分方程：

$$y^{(5)}(x)-y(x)=-15\mathrm{e}^{x}-10x\mathrm{e}^{x},$$

考虑两种边界条件：1) 两点积分边值条件为：$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=3-\mathrm{e}$，$y(0)+\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=3-\mathrm{e}$，$y(1)+\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=3-\mathrm{e}$，$y^{(1)}(0)+\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=4-\mathrm{e}$，$y^{(1)}(1)+\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=3-2\mathrm{e}$。2) 简单边界条件为：$y(0)=0$，$y(1)=0$，$y^{(1)}(0)=1$，$y^{(1)}(1)=-\mathrm{e}$，$y^{(2)}(0)=0$。

方程的精确解为 $y(x)=(x-x^2)\mathrm{e}^{x}$。

表 3 给出了例 2 在两点积分边界条件下 HOHWM 的 L_∞ 和 L_2 误差，并计算收敛阶，与文献[5]中 HWM 的 L_∞ 误差和收敛阶对比。由表 3 可知，相对于 HWM，HOHWM 的误差更小，并且随着 J 的增加，HOHWM 误差下降得更快，收敛阶为 4。表 4 给出了例 2 在简单边界条件下，不同配置点个数 n 的 HOHWM 的 L_∞ 误差，并于其他方法进行了对比。由表 4 可知，HOHWM 可以在配置点个数 n 更少时，取得更小的误差，效果更好。表 5 给出了例 2 在简单边界条件下 HOHWM 的 L_∞ 和 L_2 误差，并计算收敛阶，由表 5 可知，HOHWM 的收敛阶为 4。

Table 3. L_∞ errors、L_2 errors and convergence orders of the HWM and HOHWM methods under two-point integral boundary conditions in Example 2

表 3. 例 2 两点积分边界条件下 HWM 和 HOHWM 方法的 L_∞ 误差、L_2 误差以及收敛阶

	HWM [5]		HOHWM			
J	L_∞	收敛阶	L_∞	收敛阶	L_2	收敛阶
$J=2$	4.62e−6	-	7.93e−09	-	5.69e-09	-
$J=3$	1.40e−6	1.7215	4.95e−10	4.0018	3.55e-10	4.0029
$J=4$	3.62e−7	1.9510	3.10e−11	4.0000	2.22e-11	3.9993
$J=5$	9.11e−8	1.9923	1.93e−12	4.0009	1.39e-12	3.9965
$J=6$	2.28e−8	2.0000	1.30e−13	3.8999	8.66e-14	4.0036

Table 4. L_∞ errors of HOHWM and other methods under simple boundary conditions with different collocation points in Example 2

表 4. 例 2 简单边界条件下 HOHWM 和其他方法在不同配置点下的 L_∞ 误差

方法	n	L_∞	n	L_∞	n	L_∞
HOHWM	8	2.85e−8	16	1.78e−9	32	1.11e−10
HWM [5]	8	1.16e−5	16	3.00e−6	32	7.57e−7
Sextic spline [14]	8	5.59e−4	16	3.41e−5	32	1.59e−7
Cubic B-spline [15]	10	1.84e−4	20	4.54e−5	40	1.14e−5
NSM [5]	10	1.28e−4	20	2.79e−4	40	9.39e−4
NSSM [5]	10	3.75e−5	20	6.20e−6	40	8.87e−4

Table 5. L_∞ errors, L_2 errors and the convergence orders of the HOHWM methods under simple boundary conditions in Example 2

表 5. 例 2 简单边界条件下 HOHWM 的 L_∞ 误差、L_2 误差以及收敛阶

	$J=1$	$J=2$	$J=3$	$J=4$	$J=5$
L_∞	4.67e−7	2.85e−8	1.78e−9	1.11e−10	6.97e−12
收敛阶	-	4.0359	3.9981	3.9987	3.9995
L_2	2.95e−7	1.80e−8	1.13e−9	7.06e−11	4.41e−12
收敛阶	-	4.0353	3.9982	3.9986	3.9995

例 3 考虑如下形式的五阶非线性微分方程：

$$y^{(5)}(x)-\mathrm{e}^{-x}y^2(x)=0, \tag{11}$$

考虑简单边界条件：$y(0)=1$，$y(1)=\mathrm{e}$，$y^{(1)}(0)=1$，$y^{(1)}(1)=\mathrm{e}$，$y^{(2)}(0)=1$，其精确解为：$y=\mathrm{e}^x$。

对于非线性微分方程，采用线性化方法。方法一：Taylor 展开法。对式子中的非线性项 y^2 进行泰勒展开[5]，设当前迭代步数为 z，下一步为 $z+1$，对 $\left([y]^{z+1}\right)^2$ 在 $[y]^z$ 处进行 Taylor 展开：

$$\left([y]^{z+1}\right)^2 \approx \left([y]^z\right)^2+2[y]^z\left([y]^{z+1}-[y]^z\right),$$

即：

$$\left([y]^{z+1}\right)^2 \approx 2[y]^z[y]^{z+1}-\left([y]^z\right)^2 \tag{12}$$

把式子(12)代入到式子(11)中可得：$\left([y]^{z+1}\right)^{(5)}+2\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)[y]^z[y]^{z+1}=\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\left([y]^z\right)^2$，这是一个关于 y^{z+1} 的五阶线性微分方程。

方法二：Picard 迭代法。对式子(11)应用 Picard 迭代得：$\left([y]^{z+1}\right)^{(5)}(x)-\mathrm{e}^{-x}\left([y]^z\right)^2=0$，$z$ 表示当前迭代步数，下一步为 $z+1$，这是一个关于 $[y]^{z+1}$ 的五阶线性微分方程。

表 6 给出了例 3 经过 Taylor 展开法后，在简单边界下 HOHWM 的误差，与文献[5]中的 HWM 误差对比。由表 6 可知，相对于 HWM，HOHWM 的在各个点处的误差都更小，并且随着 J 的增加，HOHWM 的误差下降得更快。表 7 给出了例 3 经过 Picard 迭代法后，在 $J=4$ 时 HOHWM 方法和其他方法在各点的对比，由表 7 可知，相对于其他方法，HOHWM 方法的误差更小。表 8 和表 9 给出了例 3 在两个线性化方法下使用 HOHWM 的 L_∞ 和 L_2 误差，并计算收敛阶。由表 8 和表 9 可知，HOHWM 的收敛阶为 4。

Table 6. Comparison of the errors at each point between HWM and HOHWM after using the Taylor expansion method in Example 3

表 6. 例 3 经过 Taylor 展开法后 HWM 和 HOHWM 在各点处的误差对比

	$J=4$		$J=5$		$J=6$	
x	HWM [5]	HOHWM	HWM [5]	HOHWM	HWM [5]	HOHWM
0.1	3.9e−10	3.4e−14	9.8e−11	2.2e−15	2.4e−11	2.2e−16
0.2	2.5e−9	2.2e−13	6.3e−10	1.4e−14	1.5e−10	8.9e−16
0.3	6.6e−9	5.7e−13	1.6e−9	3.6e−14	4.1e−10	2.2e−15
0.4	1.1e−8	1.0e−12	2.9e−9	6.3e−14	7.3e−10	4.0e−15

续表

0.5	1.6e−8	1.4e−12	4.0e−9	8.7e-14	1.0e−9	5.6e−15
0.6	1.8e−8	1.6e−12	4.5e−9	9.8e−14	1.1e−9	6.0e−15
0.7	1.6e−8	1.4e−12	4.1e−9	8.9e−14	1.0e−9	5.8e−15
0.8	1.1e−8	9.6e−13	2.8e−9	6.0e−14	7.0−10	4.0e−15
0.9	4.0e−9	3.5e−13	1.0e−9	2.2e−15	2.5e−10	1.8e−15

Table 7. Comparison of the errors at each point between HOHWM and other methods after applying the Picard iterative method in Example 3 when $J = 4$
表 7. $J = 4$ 时，例 3 经过 Picard 迭代法后 HOHWM 和其他方法在各点的误差对比

x	HOHWM	HPM [16]	B-spline [16]	VIM [17]
0.1	3.4e−14	1.0e−9	7.0e−9	0
0.2	2.2e−13	2.0e−9	7.2e−9	1.0e−5
0.3	5.8e−13	1.0e−8	4.1e−8	1.0e−5
0.4	1.0e−12	2.0e−8	4.6e−8	1.0e−4
0.5	1.4e−12	3.1e−8	4.7e−8	3.2e−4
0.6	1.6e−12	3.7e−8	4.8e−8	3.6e−5
0.7	1.4e−12	4.1e−8	3.9e−8	1.4e−4
0.8	9.7e−13	3.1e−8	3.1e−8	3.1e−4
0.9	3.5e−13	1.4e−8	1.4e−8	5.8e−4

Table 8. L_∞ errors, L_2 errors and the convergence orders of the HOHWM methods after using the Taylor expansion method in Example 3
表 8. 例 3 经过 Taylor 展开法后 HOHWM 方法的 L_∞ 误差、L_2 误差以及收敛阶

	$J = 1$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$	$J = 5$
L_∞	6.52e−9	4.00e−10	2.50e−11	1.57e−12	9.79e−14
收敛阶	-	4.0286	3.9961	3.9981	4.0004
L_2	4.12e−9	2.53e−10	1.59e−11	9.92e−13	6.21e−14
收敛阶	-	4.0258	3.9962	3.9979	3.9981

Table 9. L_∞ errors, L_2 errors and the convergence orders of the HOHWM methods after applying the Picard iteration in Example 3
表 9. 例 3 经过 Picard 迭代后 HOHWM 方法的 L_∞ 误差、L_2 误差以及收敛阶

	$J = 1$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$	$J = 5$
L_∞	6.52e−9	4.00e−10	2.50e−11	1.58e−12	1.09e−13
收敛阶	-	4.0285	3.9955	3.9884	3.8499
L_2	4.12e−09	2.53e−10	1.59e−11	1.00e−12	6.93e−14
收敛阶	-	4.0257	3.9956	3.9882	3.8501

例 4 考虑五阶非线性微分方程：

$$y^{(5)}(x)+24\mathrm{e}^{-5y}=\frac{48}{(1+x)^5}, x\in(0,1), \tag{13}$$

考虑两点边界条件： $y(1)+y(0)=\ln 2$， $y(0)+y^{(1)}(0)=1$， $y(0)+y^{(1)}(1)=0.5$， $y(0)+y^{(2)}(0)=-1$， $y(1)+y^{(1)}(0)=\ln(2)+1$，其精确解为 $y(x)=\ln(1+x)$。

同理对非线性方程采用线性化的方法，方法一：Taylor 展开法，对于这个方程中的非线性项 e^{-5y} 进行线性化，设当前迭代步数为 z，下一步为 $z+1$，对 $\mathrm{e}^{-5[y]^{z+1}}$ 在 $[y]^z$ 处进行泰勒展开：

$$\mathrm{e}^{-5[y]^{z+1}}\approx\mathrm{e}^{-5[y]^z}-5\mathrm{e}^{-5[y]^z}\left([y]^{z+1}-[y]^z\right), \tag{14}$$

把式子(14)代入到(13)中可得：

$$\left([y]^{z+1}\right)^{(5)}-120\mathrm{e}^{-5[y]^z}[y]^{z+1}=\frac{48}{(1+x)^5}-120\mathrm{e}^{-5[y]^z}[y]^z-24\mathrm{e}^{-5[y]^z}.$$

方法二：Picard 迭代法：对式子(13)应用 Picard 迭代可得： $\left([y]^{z+1}\right)^{(5)}(x)+24\mathrm{e}^{-5[y]^z}=\frac{48}{(1+x)^5}$， z 表示当前迭代步数，下一步为 $z+1$。

表 10 给出了例 4 Taylor 展开法和 Picard 迭代法的线性化后的使用 HOHWM 的 L_∞ 和 L_2 误差，并计算收敛阶，与文献[5]中 HWM 的 L_∞ 误差和收敛阶对比。由表 10 可知，相对于 HWM，HOHWM 的误差更小，并且随着 J 的增加，HOHWM 误差下降得更快，收敛阶为 4。

Table 10. L_∞ errors, L_2 errors and convergence orders of the HWM and HOHWM methods under two-point boundary conditions in Example 4
表 10. 例 4 两点边界条件下 HWM 和 HOHWM 方法的 L_∞ 误差、 L_2 误差以及收敛阶

	HWM [5]		Taylor 展开法 HOHWM				Picard 迭代法 HOHWM			
J	L_∞	收敛阶	L_∞	收敛阶	L_2	收敛阶	L_∞	收敛阶	L_2	收敛阶
$J=2$	1.8e−5	-	7.9e−7	-	5.2e−07	-	7.9e−7	-	5.2e−7	-
$J=3$	4.2e−6	2.078	4.8e−8	4.164	3.1e−08	4.042	4.8e−8	4.035	3.2e−8	4.042
$J=4$	1.0e−6	2.010	3.0e−9	4.035	2.0e−09	4.002	3.0e−9	4.000	2.0e−9	4.002
$J=5$	2.6e−7	2.003	1.9e−10	4.000	1.2e−10	3.999	1.9e−10	3.994	1.2e−10	3.995
$J=6$	6.4e−8	2.001	1.1e−11	3.998	7.8e−12	3.999	1.2e−11	3.932	8.1e−12	3.935

6. 小结

本文将高阶 Haar 小波的方法用于求解具有不同初值条件的五阶微分方程。对于线性微分方程，该方法可直接获得数值解；对于非线性问题，则通过拟线性化方法将其转化为线性方程后再进行求解。通过对比分析发现，与经典 Haar 小波方法相比，高阶 Haar 小波方法在数值精度方面具有显著优势，最大逐点误差和均方根误差显著降低，可以用更少的配置点获得更高精度的数值解，并且具有四阶收敛特性，随着尺度参数的增大，数值解的精度可进一步提升。数值实验结果验证了所提方法的有效性和优越性。

基金项目

江西省自然科学基金项目(2020BABL201006)。

参考文献

[1] 马智慧. 微分方程在生物数学中的应用[J]. 教育进展, 2024, 14(5): 1481-1489.

[2] Mechee, M.S. and Kadhim, M.A. (2016) Explicit Direct Integrators of RK Type for Solving Special Fifth-Order Ordinary Differential Equations. *American Journal of Applied Sciences*, **13**, 1452-1460. https://doi.org/10.3844/ajassp.2016.1452.1460

[3] A. M. Al-fayyadh, K., Adel Fawzi, F. and Abbas Hussain, K. (2025) Exponentially Fitted-Diagonally Implicit Runge-Kutta Method for Direct Solution of Fifth-Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics*, **17**, 142-158. https://doi.org/10.29304/jqcsm.2025.17.12034

[4] Amin, R. (2015) Haar Wavelet Method for the Solution of Sixth-Order Boundary Value Problems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **20**, 1-8.

[5] Ahsan, M., Lei, W., Junaid, M., Ahmed, M. and Alwuthaynani, M. (2024) A Numerical Solver Based on Haar Wavelet to Find the Solution of Fifth-Order Differential Equations Having Simple, Two-Point and Two-Point Integral Conditions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **70**, 5575-5601. https://doi.org/10.1007/s12190-024-02176-3

[6] 周凤英, 何红梅, 朱合欢, 等. 分数阶微分方程的二维三尺度第 3 类 Chebyshev 小波法[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2023, 48(1):226-235.

[7] Majak, J., Pohlak, M., Karjust, K., Eerme, M., Kurnitski, J. and Shvartsman, B.S. (2018) New Higher Order Haar Wavelet Method: Application to FGM Structures. *Composite Structures*, **201**, 72-78. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.06.013

[8] Ratas, M. and Salupere, A. (2020) Application of Higher Order Haar Wavelet Method for Solving Nonlinear Evolution Equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, **25**, 271-288. https://doi.org/10.3846/mma.2020.11112

[9] Bulut, F., Oruç, Ö. and Esen, A. (2022) Higher Order Haar Wavelet Method Integrated with Strang Splitting for Solving Regularized Long Wave Equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, **197**, 277-290. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.02.006

[10] Yasmeen, S., Siraj-ul-Islam and Amin, R. (2023) Higher Order Haar Wavelet Method for Numerical Solution of Integral Equations. *Computational and Applied Mathematics*, **42**, Article No. 147. https://doi.org/10.1007/s40314-023-02283-0

[11] Ahsan, M., Lei, W., Khan, A.A., Ahmed, M., Alwuthaynani, M. and Amjad, A. (2024) A Higher-Order Collocation Technique Based on Haar Wavelets for Fourth-Order Nonlinear Differential Equations Having Nonlocal Integral Boundary Conditions. *Alexandria Engineering Journal*, **86**, 230-242. https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.11.066

[12] 楼钦艺, 许小勇, 何通森, 等. 高阶 Haar 小波方法求解一类 Caputo-Fabrizio 分数阶微分方程[J]. 江西科学, 2024, 42(3): 470-474.

[13] Ahsan, M., Bohner, M., Ullah, A., Khan, A.A. and Ahmad, S. (2023) A Haar Wavelet Multi-Resolution Collocation Method for Singularly Perturbed Differential Equations with Integral Boundary Conditions. *Mathematics and Computers in Simulation*, **204**, 166-180. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.08.004

[14] Siddiqi, S.S. and Akram, G. (2007) Sextic Spline Solutions of Fifth Order Boundary Value Problems. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 591-597. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.06.012

[15] Lang, F. and Xu, X. (2010) A New Cubic B-Spline Method for Linear Fifth Order Boundary Value Problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **36**, 101-116. https://doi.org/10.1007/s12190-010-0390-y

[16] Noor, M.A., Mohyud-Din, S.T. and Waheed, A. (2008) Variation of Parameters Method for Solving Fifth-Order Boundary Value Problems. *Applied Mathematics & Information Sciences*, **2**, 135-141.

[17] Zhang, J. (2009) The Numerical Solution of Fifth-Order Boundary Value Problems by the Variational Iteration Method. *Computers & Mathematics with Applications*, **58**, 2347-2350. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.073