

积分差分先锋 - 顶级竞争系统的传播速度和行波解

温雅菲

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2025年5月9日; 录用日期: 2025年6月2日; 发布日期: 2025年6月10日

摘要

针对先锋 - 顶级竞争系统的时空传播动力学问题, 本文利用积分差分方程研究该模型的入侵动力学行为, 证明了空间齐次系统的边界平衡点和正平衡点的存在性和稳定性, 并确定了入侵传播速度和行波解的存在性, 以及传播速度与最小波速的一致性。

关键词

积分差分先锋 - 顶级模型, 传播速度, 行波解

Spreading Speeds and Traveling Waves for the Integro-difference Pioneer-Climax Competition System

Yafei Wen

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: May 9th, 2025; accepted: Jun. 2nd, 2025; published: Jun. 10th, 2025

Abstract

This paper concerns the spatiotemporal dynamics of pioneer-climax competition systems, where the integro-difference equations are used to study the invasion propagation behavior of the models. The existence and stability of the boundary equilibrium points and the positive equilibrium point of the spatially homogeneous system are proven. Furthermore, the existence of invasion propagation speed and traveling wave solutions is determined, and it is demonstrated that the propagation speed is consistent with the minimal wave speed.

Keywords

Integrodifference Pioneer-Climax Model, Spreading Speeds, Traveling Waves

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

种群的竞争模型主要表明,当两个不同的种群竞争有限的资源时,竞争力较低的种群通常会被淘汰,而竞争力更强的种群将会达到环境的最大承载能力。著名的 Logistic 模型、Lotka-Volterra 模型和 RPS 模型已经被大量研究人员广泛研究,本文将研究前人研究相对较少的先锋-顶级种群的空间传播动力学行为。生态学上,新建立的栖息地最初由先锋种群组成,它们在低密度下生长得最好,并且可以殖民无人居住的环境,先锋种群的适应函数是总密度的单调递减函数。后来,顶级种群出现,它们是强大的竞争对手,但不是好的殖民者,在低种群密度下,顶级种群通常不能独立存在,但随着种群密度的增加顶级种群的竞争力变得更强,趋向于蓬勃发展,直到高密度的过度拥挤导致种群密度下降,顶级种群的适应函数表现为驼峰函数[1]。这两个物种的长期行为取决于种间和种内竞争,根据竞争的相对强度,先锋种群和顶级种群的长期动力学行为可以表现为竞争排斥或者稳定共存,这两个种群的传播速度和行波解的存在性问题成为本文研究的重点。如今,数学与生物学的交叉发展已逐渐成熟,建立数学模型来研究生态问题,揭示生态现象的规律逐渐成为一种更重要的方法,对演替群落的入侵动力学行为的研究在种群保护中具有重要意义。

2. 模型介绍

本文研究如下积分差分先锋-顶级竞争系统的入侵传播动力学:

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u_n(y) + a_2 v_n(y)) u_n(y) k_1(x-y) dy \\ v_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(a_1 u_n(y) + v_n(y)) v_n(y) k_2(x-y) dy \end{cases} \quad (1)$$

生态学上,该模型主要用来描述先锋与顶级物种的空间扩散和相互作用,其中 $u_n(x)$ 和 $v_n(x)$ 分别表示第 n 年,位置 x 处的先锋种群和顶级种群的种群密度;适应函数 f, g 依赖于两物种种群密度的线性组合;核 $k_1(x-y)$ 和 $k_2(x-y)$ 描述种群从位置 y 扩散到位置 x 的概率密度函数;正参数 a_1 和 a_2 表示种间竞争相对于种内竞争强度的相对竞争系数。

基于先锋-顶级种群的相互作用机理,易知先锋种群是指在种群密度较低的环境中生存能力强,并随着种群密度的升高其适应能力逐渐变弱的种群[2],故模型假设存在常数 $z_0 > 0$,使得先锋种群适应函数 $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ 满足:

对于任意 $z \in \mathbb{R}$, 有 $f'(z) < 0$, 即函数 f 关于种群密度严格单调递减,且存在唯一正常数 z_0 , 使得 $f(z_0) = 0$ 成立。顶级种群是随着种群密度的升高,适应能力先变强后达到最大值再逐渐变弱的种群,故模型假设顶级种群适应函数 $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ 为关于种群密度先增后减的驼峰函数,即存在 $0 < w_1 < w^* < w_2$ 满足 $g(w_1) = g(w_2) = 1$, 且当 $w < w^*$ 时,有 $g'(w) > 0$, 当 $w > w^*$ 时,有 $g'(w) < 0$ 。关于适应函数的典型示例可参考文献[3]-[6]中研究各类先锋-顶级模型,如:

$$f(z) = e^{r-z}, \quad g(w) = we^{b-w}; \quad \text{以及} \quad f(z) = \frac{R_1}{1+dz}, \quad g(w) = \frac{R_2(1+b_1w)}{1+b_2w^2}.$$

为了研究系统的空间传播动力学, 对系统(1)作如下假设:

(K1) $k_i(x) \geq 0, i=1,2$ 为 \mathbb{R} 上的连续非负函数, 且满足 $\int_{\mathbb{R}} k_i(s) ds = 1$ 。

(K2) $k_i(s) = k_i(-s), \forall s \in \mathbb{R}$, 且对于所有 $\mu \in [0, \infty)$, 都有 $\int_{\mathbb{R}} e^{\mu s} k_i(s) ds < \infty$ 。

(K3) $\frac{z_0}{a_2} > w_2, \frac{w_2}{a_1} > z_0 > \frac{w_1}{a_1}$ 。

在生态学上, (K1)表示两个种群扩散到位置 x 的概率大于等于 0, 且扩散到各个位置的概率和是 1, (K2)表示种群扩散到位置 x 和位置 $-x$ 的概率相同, 而(K3)表示本文考虑仅存在唯一正平衡点 E^* 条件下的情况。

3. 空间齐次方程的平衡点及稳定性

系统(1)对应的空间齐次模型为以下差分方程组:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n + a_2 v_n) u_n \\ v_{n+1} = g(a_1 u_n + v_n) v_n \end{cases} \quad (2)$$

定义该系统的递推函数为:

$$\begin{aligned} F(u, v) &:= f(u + a_2 v) u \\ G(u, v) &:= g(a_1 u + v) v \end{aligned}$$

通过求解方程:

$$\begin{cases} u = F(u, v) \\ v = G(u, v) \end{cases}$$

得到系统(2)的四个边界平衡点为:

$$E_1 = (0, 0), E_2 = (z_0, 0), E_3 = (0, w_1), E_4 = (0, w_2)$$

在(K3)条件下, 进一步求解方程组:

$$\begin{cases} f(u + a_2 v) = 1 \\ g(a_1 u + v) = 1 \end{cases}$$

可知系统存在唯一正平衡点:

$$E^* = (u^*, v^*) = \left(\frac{z_0 - a_2 w_2}{1 - a_1 a_2}, \frac{w_2 - a_1 z_0}{1 - a_1 a_2} \right)$$

其中 (u^*, v^*) 是如下线性方程组的唯一正根:

$$\begin{cases} u + a_2 v = z_0 \\ a_1 u + v = w_2 \end{cases}$$

本文在后续研究中进一步假设模型参数满足以下条件:

(K4) $a_1 u^* \geq w^*$, 且对任意 $(u, v) \in [u^*, z_0] \times [0, v^*]$, 有 $F'_u \geq 0$ 且 $G'_v \geq 0$ 。

为了研究顶级种群的入侵传播速度和连接边界平衡点 $E_2 = (z_0, 0)$ 到共存平衡点 $E^* = (u^*, v^*)$ 行波解的存在性, 本文提出技术性条件(K4), 在此条件下系统在所考虑的种群密度范围内是单调的, 从而可以利用单调动力系统理论解决研究问题[7]。

为了确定(K3)~(K4)条件下空间齐次系统五个平衡点的稳定性, 现分析系统在平衡点处雅可比矩阵的特征值:

分别计算 F, G 对 u, v 的偏导数, 可得出:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= f'(u + a_2 v)u + f(u + a_2 v) \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= a_2 f'(u + a_2 v)u \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= a_1 g'(a_1 u + v)v \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= g'(a_1 u + v)v + g(a_1 u + v)\end{aligned}$$

首先验证边界平衡点 E_2 的稳定性, E_2 处的雅可比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} f'(z_0)z_0 + f(z_0) & f'(z_0)a_2 z_0 \\ 0 & g(a_1 z_0) \end{pmatrix}$$

通过条件(K3)~(K4), 可知:

$$\lambda_1 = f'(z_0)z_0 + f(z_0) = f'(z_0)z_0 < 0$$

以及:

$$\lambda_2 = g(a_1 z_0) > 1$$

综上所述, 可知平衡点 E_2 是不稳定的。

接下来验证正平衡点 E^* 处的稳定性, E^* 处的雅可比矩阵为:

$$J^* = \begin{pmatrix} f'(z_0)u^* + 1 & f'(z_0)a_2 u^* \\ g'(w_2)a_1 v^* & g'(w_2)v^* + 1 \end{pmatrix}$$

将雅可比矩阵 J^* 的迹和行列式分别定义为: T 和 D , 通过计算, 易知:

$$\begin{aligned}T &= [f'(z_0)u^* + 1] + [g'(w_2)v^* + 1] \\ D &= [f'(z_0)u^* + 1][g'(w_2)v^* + 1] - a_1 a_2 f'(z_0)g'(w_2)u^* v^*\end{aligned}$$

特征多项式可以表示为:

$$\Gamma(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = 0 \quad (3)$$

显然, $T < 2$, 且由条件(K4)可知, $T \geq 0$ 。进一步可以观察得到:

$$\begin{aligned}T^2 - 4D &= [f'(z_0)u^* + 1]^2 + [g'(w_2)v^* + 1]^2 - 2[f'(z_0)u^* + 1][g'(w_2)v^* + 1] + 4a_1 a_2 f'(z_0)g'(w_2)u^* v^* \\ &= [f'(z_0)u^* - g'(w_2)v^*]^2 + 4a_1 a_2 f'(z_0)g'(w_2)u^* v^* \\ &> 0\end{aligned}$$

这表明了系统(3)有两个不同的实根 $\lambda_1 < \frac{T}{2} < \lambda_2$ 。除此之外，还可通过计算得到：

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1 - T + D \\ &= f'(z_0)g'(w_2)u^*v^* - a_1a_2f'(z_0)g'(w_2)u^*v^* \\ &= (1 - a_1a_2)f'(z_0)g'(w_2)u^*v^* \\ &> 0\end{aligned}$$

以及：

$$\begin{aligned}\Gamma(-1) &= 1 + T + D \\ &= 2[f'(z_0)u^* + 1] + 2[g'(w_2)v^* + 1] + (1 - a_1a_2)f'(z_0)g'(w_2)u^*v^* \\ &> 0\end{aligned}$$

这说明了 $|\lambda_i| < 1, i=1,2$ 。因此，正平衡点 E^* 是稳定的。

类似地，可得出：其余边界平衡点： $E_1 = (0,0), E_3 = (0, w_1), E_4 = (0, w_2)$ 也是不稳定的[4]。

对于空间模型(1)，本文旨在研究顶级种群入侵传播速度的存在性，以及连接边界平衡态 E_2 与共存平衡态 E^* 行波解的存在性。

4. 传播速度和行波解的存在性

基于文献[7]中的理论，设 $\mathcal{C} := C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ 为所有从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R}^2 的有界连续函数集合，并赋予紧开拓扑，即序列 ψ_n 在 \mathcal{C} 中收敛于 ψ 当且仅当 $\psi_n(x)$ 在 \mathbb{R} 的任意紧子集上一致收敛于 $\psi(x)$ 。令 $\mathcal{C}_+ = \{(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{C} : \psi_i(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, i=1,2\}$ ，不难看出， \mathcal{C}_+ 是 \mathcal{C} 上的非空闭锥体，且在 \mathcal{C} 上诱导了一个偏序关系。对任意 $\psi_1 = (\psi_{11}, \psi_{21}), \psi_2 = (\psi_{12}, \psi_{22}) \in \mathcal{C}$ ，定义当 $\psi_2 - \psi_1 \in \mathcal{C}_+$ 时，有 $\psi_2 \geq \psi_1$ ；且当 $\psi_2 - \psi_1 \in \mathcal{C}_+ \setminus \{0\}$ 时，有 $\psi_2 > \psi_1$ 。对于任意 \mathbb{R}^2 上的向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} ，类似可定义 $\mathbf{a} \geq (>) \mathbf{b}$ ，且当 $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ ，有 $\mathbf{a} \gg \mathbf{b}$ 。对任意满足 $\mathbf{r} \gg \mathbf{0}$ 的 $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ ，定义 $\mathcal{C}_r := \{\psi \in \mathcal{C} : \mathbf{r} \geq \psi \geq \mathbf{0}\}$ 和 $[\mathbf{0}, \mathbf{r}] := \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq u \leq r_1, 0 \leq v \leq r_2\}$ 。

为分析方便，我们做如下变量替换： $\tilde{u}_n = z_0 - u_n, \tilde{v}_n = v_n$ ，省略波浪号，原系统(1)转换为如下系统：

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - u_n(y) + a_2v_n(y))(z_0 - u_n(y))k_1(x-y)dy \\ v_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(a_1z_0 - a_1u_n(y) + v_n(y))v_n(y)k_2(x-y)dy \end{cases} \quad (4)$$

让 $W_n := (u_n, v_n)^T$ ，定义 \mathcal{C} 上的算子 $Q = (Q_1, Q_2)$ ：

$$\begin{aligned}Q_1(\psi_1, \psi_2)(x) &= z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(y) + a_2\psi_2(y))(z_0 - \psi_1(y))k_1(x-y)dy \\ Q_2(\psi_1, \psi_2)(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(a_1z_0 - a_1\psi_1(y) + \psi_2(y))\psi_2(y)k_2(x-y)dy\end{aligned} \quad (5)$$

则系统(4)可表示为如下递归形式：

$$W_{n+1}(x) = Q[W_n](x), n \in \mathbb{Z}_+$$

利用递归形式(5)易知原系统平衡态 E_2 与 E^* 转换为新系统的不动点：

$$\tilde{E}_2 = (0,0), \tilde{E}^* = (z_0 - u^*, v^*) = (a_2v^*, v^*)$$

注意到 $\tilde{E}_2 \ll \tilde{E}^*$ ，且由条件(K3)知，在 \tilde{E}_2 和 \tilde{E}^* 之间不存在其他不动点。现有只需研究系统(4)连接 \tilde{E}_2 与 \tilde{E}^* 的传播速度与行波解的存在性。令

$$C_{E^*} := \{(\psi_1, \psi_2) \in C : 0 \leq \psi_1 \leq z_0 - u^*, 0 \leq \psi_2 \leq v^*\}$$

$$[\tilde{E}_2, \tilde{E}^*] := \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq u \leq z_0 - u^*, 0 \leq v \leq v^*\}$$

对任意 $\psi \in C_{E^*}$, 定义反射算子 $R: R[\psi](x) = \psi(-x)$; 以及平移算子 $T_y: T_y[\psi](x) = \psi(x-y)$ 。

为应用[7]中的一般理论, 我们证明算子 Q 满足以下条件:

(A1) $T_y \circ Q[\psi] = Q \circ T_y[\psi], Q[R[\psi]] = R[Q[\psi]], \forall \psi \in C_{E^*}$ 。

(A2) $Q: C_{E^*} \rightarrow C_{E^*}$ 在紧开拓扑下连续。

(A3) $Q(C_{E^*})$ 在 C_{E^*} 上是预紧的。

(A4) $Q: C_{E^*} \rightarrow C_{E^*}$ 是单调的, 即在 C_{E^*} 上, 当 $\psi \geq \phi$ 时, 有 $Q[\psi] \geq Q[\phi]$ 。

(A5) 令 $\tilde{Q} = Q|_{[\tilde{E}_2, \tilde{E}^*]}$, 则 $\tilde{Q}: [\tilde{E}_2, \tilde{E}^*] \rightarrow [\tilde{E}_2, \tilde{E}^*]$ 仅有两个不动点 \tilde{E}_2 和 \tilde{E}^* , 且对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta \in [\tilde{E}_2, \tilde{E}^*]$ 满足 $\|\eta\| < \epsilon$, 使得 $\tilde{Q}[\eta] \gg \eta$ 。

引理 3.1: 算子 Q 在空间 C_{E^*} 上满足假设条件(A1)~(A5)。

证明: 对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C_{E^*}$, 有:

$$\begin{aligned} Q_1[R[\psi]](x) &= z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(-y) + a_2\psi_2(-y))(z_0 - \psi_1(-y))k_1(x-y)dy \\ &= z_0 + \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(-y) + a_2\psi_2(-y))(z_0 - \psi_1(-y))k_1(-x+y)d(-y) \\ &= z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(y) + a_2\psi_2(y))(z_0 - \psi_1(y))k_1(-x-y)dy \\ &= R[Q_1[\psi]](x) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} T_y[Q_1[\psi]](x) &= T_y\left[z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(y) + a_2\psi_2(y))(z_0 - \psi_1(y))k_1(x-y)dy\right] \\ &= T_y\left[z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(x-y) + a_2\psi_2(x-y))(z_0 - \psi_1(x-y))k_1(y)dy\right] \\ &= z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(x-y-y) + a_2\psi_2(x-y-y))(z_0 - \psi_1(x-y-y))k_1(y)dy \\ &= Q_1[T_y[\psi]](x) \end{aligned} \tag{7}$$

我们可以类似得出 $Q_2[R[\psi]] = R[Q_2[\psi]]$, 以及 $T_y[Q_2[\psi]] = Q_2[T_y[\psi]]$ 。

引理 3.2: 设 Q 由(5)定义, 那么 Q 在 $\beta = \tilde{E}^*$ 时满足假设(A2)~(A5)。

证明: 对于任意的 $x, \delta \in \mathbb{R}, (\phi_1, \phi_2) \in C_{E^*}$, 有:

$$\begin{aligned} &|Q_1(\phi_1, \phi_2)(x+\delta) - Q_1(\phi_1, \phi_2)(x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \phi_1(y) + a_2\phi_2(y))(z_0 - \phi_1(y)) [k_1(x-y) - k_1(x+\delta-y)] dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} z_0 u^* |k_1(x-y) - k_1(x+\delta-y)| dy \end{aligned} \tag{8}$$

由假设(K1)可知, $Q_1[C_\beta]$ 是一族等度连续的函数, 且 $Q_2[C_\beta]$ 也有类似的结果。根据 Arzela-Ascoli 定理可知, $Q_1[C_\beta]$ 是预紧的, 类似可以证明 $Q_2[C_\beta]$ 也是预紧的。因此, 假设(A3)成立。

现验证算子 Q 在 C_{E^*} 上是单调的, 即在 C_{E^*} 上:

对任意 $(\psi_1, \psi_2) \geq (\phi_1, \phi_2)$, 都有 $Q(\psi_1, \psi_2) \geq Q(\phi_1, \phi_2)$ 。

定义系统(4)的迭代函数如下:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, v) &:= z_0 - f(z_0 - u + a_2v)(z_0 - u) \\ \tilde{G}(u, v) &:= g(a_1z_0 - a_1u + v)v \end{aligned}$$

对于任意 $(u, v) \in [\tilde{E}_2, \tilde{E}^*]$, 由条件(K4)可得:

$$a_1 z_0 - a_1 u + v \geq a_1 z_0 - a_1 (z_0 - u^*) = a_1 u^* \geq w^*$$

进一步可得出:

$$\begin{aligned}\tilde{F}'_v(u, v) &= -a_2 (z_0 - u) f'(z_0 - u + a_2 v) \geq 0 \\ \tilde{G}'_u(u, v) &= -a_1 g'(a_1 z_0 - a_1 u + v) v \geq 0\end{aligned}$$

易知:

$$\tilde{F}'_u(u, v) \geq 0, \tilde{G}'_v(u, v) \geq 0$$

因此, 算子 Q 在 C_{E^*} 上是单调的. 此外, 对于任意 $(\phi_1, \phi_2) \in C_{E^*}$, 有:

$$0 \leq z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - \psi_1(y) + a_2 \psi_2(y))(z_0 - \psi_1(y)) k_1(x-y) dy \leq z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0) u^* k_1(x-y) dy = z_0 - u^*$$

和

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} g(a_1 z_0 - a_1 \psi_1(y) + \psi_2(y)) \psi_2(y) k_2(x-y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} g(w_2) v^* k_2(x-y) dy = v^*$$

因此, $Q(C_{E^*}) \subseteq C_{E^*}$, 且条件(A4)成立. 注意, 利用 Q 的单调性和(8)式, 条件(A2)和(A5)容易验证, 我们在此处省略验证过程, 证明结束.

由引理 3.2 和 [7] 中的定理 3.1 知: 存在常数 $c^* > 0$, 使得 c^* 是系统(4)的传播速度, 即下面结论成立.

定理 3.3:

假设条件(K4)成立. 设 $(u_n(x), v_n(x))$ 是(4)具有初始条件 $(u_0(x), v_0(x)) \in C_{E^*}$ 的解, 则以下结论成立:

(1) 对于任意 $c > c^*$, 若 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 在所有足够大的 x 处均为零, 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, |x| \geq cn} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty, |x| \geq cn} v_n(x) = 0$$

(2) 对于任意 $0 < c < c^*$ 和 $\sigma \in [0, \tilde{E}^*]$, 且满足 $\sigma \gg 0$, 若存在 $r_\sigma > 0$, 使得在长度为 $2r_\sigma$ 的区间上, 有 $(u_0(x), v_0(x)) \gg \sigma$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty, |x| \leq cn} u_n(x) = z_0 - u^*, \lim_{n \rightarrow \infty, |x| \leq cn} v_n(x) = v^*$$

下面进一步说明 c^* 是系统(4)连接 \tilde{E}_2 到 \tilde{E}^* 行波解的最小波速. 行波解是系统(4)的形如 $u_n(x) = U(x+cn)$, $v_n(x) = V(x+cn)$ 的解, 且满足以下渐近边界条件:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (U, V)(t) = (0, 0), \lim_{t \rightarrow +\infty} (U, V)(t) = (z_0 - u^*, v^*)$$

其中常数 $c > 0$ 称为波速, 函数 U, V 称为波形. 将 $U(t), V(t), t = x+cn$ 代入(4), 我们得到以下方程:

$$\begin{cases} U(t+c) = z_0 - \int_{\mathbb{R}} f(z_0 - U(s) + a_2 V(s))(z_0 - U(s)) k_1(t-s) ds \\ V(t+c) = \int_{\mathbb{R}} g(a_1 z_0 - a_1 U(s) + V(s)) V(s) k_2(t-s) ds \end{cases} \quad (9)$$

令 $W(t) := (U(t), V(t))^T$. 在 C 上定义一个算子 $Q_c[W] = Q[W](t-c)$. 那么(9)可以表示为:

$$W(t) = Q_c[W](t) \quad (10)$$

由(9)可明确看出, (U, V) 是(4)的行波解当且仅当 W 是 Q_c 的一个不动点.

由[7]中定理 4.3, 4.4 知即 c^* 是(4)的最小波速, 即下面结论成立.

定理 3.4:

假设条件(K4)成立。设 c^* 是定理 3.3 中给出的系统传播速度，则以下陈述有效:

(1) 对于任意 $c \geq c^*$ ，(4) 具有一个连接 \tilde{E}_2 到 \tilde{E}^* 的行波解 $(U(x+cn), V(x+cn))$ ，使得 $U(t)$ 和 $V(t)$ 对于 $t \in \mathbb{R}$ 是连续且非递减的。

(2) 对于任意 $0 < c < c^*$ ，(4) 没有连接 \tilde{E}_2 到 \tilde{E}^* 的行波解。

5. 数值模拟

为了更加直观地展示系统的动力学行为，本节对模型进行数值模拟。取先锋种群和顶级种群的适应函数分别为:

$$f(z) = \frac{R_1}{1+dz}, \quad g(w) = \frac{R_2(1+b_1w)}{1+b_2w^2}$$

将 f, g 代入模型(1)，可以得到以下系统:

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{R_1 u_n(y)}{1+d(u_n(y+a_2 v_n(y)))} k_1(x-y) dy \\ v_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{R_2(1+b_1(a_1 u_n(y)+v_n(y)))}{1+b_2(a_1 u_n(y)+v_n(y))^2} k_2(x-y) dy \end{cases} \quad (11)$$

解方程: $g'(w) = 0$ ，有:

$$w^* = \frac{-1 + \sqrt{1+b_1^2/b_2}}{b_1}$$

此外，由于先锋种群和顶级种群的适应函数 f, g 分别满足:

$$f(z_0) = 1, \quad g(w_{1,2}) = 1$$

将 $z_0, w_{1,2}$ 分别代入方程易得:

$$z_0 = \frac{R_1 - 1}{d}, \quad w_{1,2} = \frac{R_2 b_1 \pm \sqrt{R_2^2 b_1^2 - 4b_2(1-R_2)}}{2b_2}$$

其中 w_1, w_2 分别对应于负平方根和正平方根。

在模型中令参数满足:

$$R_1 = 1.2, \quad R_2 = 0.8, \quad d = 0.3, \quad b_1 = 0.6, \quad b_2 = 0.2, \quad a_1 = 0.67, \quad a_2 = 1.3$$

经过计算，得出:

$$z_0 = 1, \quad w_1 = 0.2, \quad w_2 = 1.382, \quad u^* = 0.51, \quad v^* = 1.23, \quad w^* = 0.1$$

直接代入验证可知，该组参数满足条件(K3)和(K4)。

取核函数为高斯核函数:

$$k_1(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad k_2(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma_2^2}}$$

并在有界区间 $[-30, 30]$ 上，用将 E_2 连接到 E^* 的数据来模拟系统(11)的解。

先锋种群和顶级种群随时间的演化图像如图 1 所示。

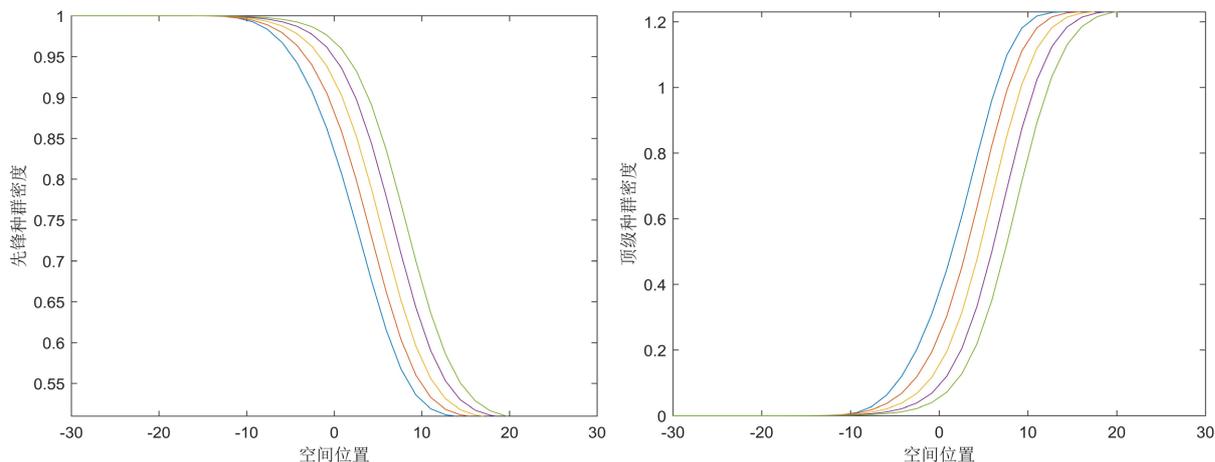


Figure 1. The observed traveling waves for species u and v
图 1. 种群 u 和 v 的行波

通过图像可以观察到，波形是单调的，并且以相同的形状和恒定的速度从右向左扩散。

6. 结语

本文利用积分差分方程研究了先锋 - 顶级竞争系统的空间传播动力学，计算出先锋种群和顶级种群空间齐次系统的边界平衡点和唯一共存平衡点，并分析它们的稳定性。在此基础上，确定了先锋种群入侵传播速度和行波解的存在性。入侵传播速度的大小决定了物种入侵的速度和范围，在生态学中具有重要意义。对竞争系统而言，传播速度的估计是一个比较困难的数学问题。由于篇幅的限制，本文并没有估计波速的大小，读者可参考文献[8]中的理论，利用上下解方法和比较原理来确定系统传播速度线性确定的条件，并给出波速的计算公式。由于这部分内容较长，相关结果将在后续文章中发表。基于目前的工作，作者将在以后的研究中进一步探索先锋 - 顶级种群的入侵动力学行为。

基金项目

天津职业技术师范大学科研启动项目(KYQD202324)。

参考文献

- [1] Brown, S., Dockery, J. and Pernarowski, M. (2005) Traveling Wave Solutions of a Reaction Diffusion Model for Competing Pioneer and Climax Species. *Mathematical Biosciences*, **194**, 21-36. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2004.10.001>
- [2] Buchanan, J. (1999) Asymptotic Behavior of Two Interacting Pioneer-Climax Species, *Fields Institute Communications*, **21**, 51-63.
- [3] Franke, J. and Yakubu, A. (1994) Pioneer Exclusion in a One-Hump Discrete Pioneer-Climax Competitive System. *Journal of Mathematical Biology*, **32**, 771-787. <https://doi.org/10.1007/bf00168797>
- [4] Gilbertson, N.M. and Kot, M. (2021) Dynamics of a Discrete-Time Pioneer-Climax Model. *Theoretical Ecology*, **14**, 501-523. <https://doi.org/10.1007/s12080-021-00511-z>
- [5] Selgrade, J.F. (1993) Planting and Harvesting for Pioneer-Climax Models. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **24**, 293-310. <https://doi.org/10.1216/rmj/1181072467>
- [6] Selgrade, J.F. and Namkoong, G. (1990) Stable Periodic Behavior in a Pioneer-Climax Model. *Natural Resource Modeling*, **4**, 215-227. <https://doi.org/10.1111/j.1939-7445.1990.tb00098.x>
- [7] Liang, X. and Zhao, X. (2006) Asymptotic Speeds of Spread and Traveling Waves for Monotone Semiflows with Applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 1-40. <https://doi.org/10.1002/cpa.20154>
- [8] Song, H. and Zhang, Y. (2024) Travelling Waves and Speed Selection for the Integrodifference Pioneer-Climax Competition System. *Journal of Difference Equations and Applications*, **30**, 789-810. <https://doi.org/10.1080/10236198.2024.2330951>