

Bergman空间上一类斜Toeplitz算子的交换性

刘朝美¹, 刘 文¹, 尚书霞²

¹大连交通大学基础部, 辽宁 大连

²北京物资学院系统科学与统计学院, 北京

收稿日期: 2025年5月23日; 录用日期: 2025年6月16日; 发布日期: 2025年6月23日

摘 要

本文主要研究单位圆盘的Bergman空间上斜Toeplitz算子的交换性问题, 利用Mellin变换得到以径向函数为符号的斜Toeplitz算子与解析斜Toeplitz算子可交换的一个必要条件, 以及以特殊径向函数为符号的斜Toeplitz算子与解析斜Toeplitz算子可交换的充要条件; 并得到以函数 $az^s + b|z|^{2t}$ 为符号的斜Toeplitz算子与解析斜Toeplitz算子可交换的充要条件。

关键词

Bergman空间, 斜Toeplitz算子, 交换性, Mellin变换

Commutativity of a Class of Slant Toeplitz Operators on the Bergman Space

Chaomei Liu¹, Wen Liu¹, Shuxia Shang²

¹Department of Foundational Courses, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

²School of Systems Science and Statistics, Beijing Wuzi University, Beijing

Received: May 23rd, 2025; accepted: Jun. 16th, 2025; published: Jun. 23rd, 2025

Abstract

In this paper, we primarily investigate the commutativity of the slant Toeplitz operator on the Bergman space of the unit disk. Using the Mellin transform, we obtain one necessary condition and some sufficient and necessary conditions for slant Toeplitz operators with radial symbols that commute with slant Toeplitz operators with analytic symbols, and the sufficient and necessary conditions for the commutativity of slant Toeplitz operators with function $az^s + b|z|^{2t}$ and slant Toeplitz operators with analytic symbols.

Keywords

Bergman Space, Slant Toeplitz Operator, Commutativity, Mellin Transform

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要探讨 Bergman 空间上斜 Toeplitz 算子的交换性问题。由于斜 Toeplitz 算子不仅与 Toeplitz 算子等算子有着密切联系,且在量子物理、图像处理、微分方程求解、小波分析等方向中存在着一定的应用,所以对该类算子的研究一直得到人们的关注。对单位圆周的 Lebesgue 空间和 Hardy 空间上斜 Toeplitz 算子的研究最初是由 Mark 给出的[1]-[4],而 Arora 与 Batra 等将斜 Toeplitz 算子推广为广义斜 Toeplitz 算子(k -阶斜 Toeplitz 算子),并研究广义斜 Toeplitz 算子的若干性质[5]-[7]。此后人们又将该类算子推广到各类函数空间上,如: Bergman 空间、加权 Bergman 空间、Dirichlet 空间、Fock 空间以及环面的 Hardy 空间和 Lebesgue 空间等[8]-[28],并探讨该类算子的表达式、判别标准、谱和谱半径、交换性、亚正规性等性质。

对算子交换性的研究有助于人们对算子的深入认识,且对算子具体性质的研究可以由其相关的符号函数给出刻画。在单位圆盘的 Bergman 空间上, Yang 等[9]得到了两个带有解析符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件是它们的符号函数线性相关; Liu 等[13]给出两个带有解析符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件是它们的符号函数线性相关,以及两个以调和多项式函数为符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件是它们的符号函数线性相关;此后 Liu 等[26]将上述结论推广到加权的 Bergman 空间上,且得到以单项式函数 $z^n z^m$ 为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子 B_φ 可交换的充要条件是 φ 是零函数或 $n=0$ 且 φ 与 z^m 线性相关。本文将利用 Mellin 变换和符号函数的性质探讨单位圆盘的 Bergman 空间上以非调和函数为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子的交换性问题,得到以有界径向函数为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子可交换的一个必要条件和两个充要条件,并得到以函数 $az^s + b|z|^{2t}$ 为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子可交换的若干充要条件。

2. 基础知识

在本文中自然数集和正整数集分别记为 N 和 N_+ ,复平面内的单位开圆盘记为 D ,单位圆盘 D 上的正规化面积测度记为 dA ,即 $\int_D 1dA=1$ 且 $dA(z)=\frac{1}{\pi}rdrd\theta$ 。设 $L^\infty(D)$ 是单位圆盘 D 上关于测度 dA 本性有界的复可测函数全体构成的 Banach 空间,且单位圆盘 D 上有界解析函数全体记为 $H^\infty(D)$ 。

设 $L^2(D, dA)$ 是单位圆盘 D 上关于测度 dA 平方可积的复值可测函数全体构成的 Hilbert 空间,且该空间上的内积定义为: $\langle f, g \rangle = \int_D f(z) \overline{g(z)} dA(z)$, $\forall f, g \in L^2(D, dA)$ 。Bergman 空间 $A^2(D)$ 是 $L^2(D, dA)$ 中全体解析函数构成的闭子空间,且该空间的一组正规正交基是 $\{\sqrt{n+1}z^n\}_{n \in N}$ 。Bergman 空间 $A^2(D)$ 是再生核空间,其再生核是 $K_z(w) = \frac{1}{(1-\bar{z}w)^2}$, $z, w \in D$ 。

设 P 是从 $L^2(D, dA)$ 到 $A^2(D)$ 的投影算子,即对于 $f \in L^2(D, dA)$, $P(f)(z) = \langle f, K_z \rangle$, $z \in D$ 。该算子是有界线性算子且 $\|P\|=1$ 。

对于 $\varphi \in L^\infty(D)$, 定义在 $A^2(D)$ 上以函数 φ 为符号的斜 Toeplitz 算子是 $B_\varphi = WT_\varphi$, 其中 T_φ 是 $A^2(D)$ 上以函数 φ 为符号的 Toeplitz 算子且 $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$ ($f \in A^2(D)$), W 是 $A^2(D)$ 上的有界线性算子且

$$Wz^n = \begin{cases} z^{n/2}, & n \text{ 是偶数} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

关于 Bergman 空间 $A^2(D)$ 、投影算子以及 Toeplitz 算子的性质可以参考[29]。此外, 我们还需要以下的相关理论知识。

引理 1 [26] 对任意的 $p \in N$, 设 $N_{2p+1} = \{(2p+1)2^s | s \in N\}$, 则 $N_+ = \bigcup_{p=0}^{\infty} N_{2p+1}$, 且对任意的 $p, q \in N$,

若 $p \neq q$, $N_{2p+1} \cap N_{2q+1} = \emptyset$ 。

引理 2 设 $\psi(z) = az^s + b|z|^{2t}$, 其中 s, t 均为非负整数, 那么对任意的非负整数 q ,

$$P(\psi z^q) = az^{s+q} + b \frac{q+1}{q+t+1} z^q.$$

证明 由于 s, t 和 q 都是非负整数, 所以由投影算子 P 的定义可得

$$\begin{aligned} P(\psi z^q)(z) &= \langle \psi z^q, K_z \rangle = \int_D \psi(w) w^q \frac{1}{(1-\bar{w}z)^2} dA(w) = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) z^p \int_D \psi(w) w^q \bar{w}^p dA(w) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) z^p \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(ar^{s+q+p+1} e^{i(s+q-p)\theta} + br^{2t+q+p+1} e^{i(q-p)\theta} \right) \frac{1}{\pi} d\theta dr \\ &= az^{s+q} + b \frac{q+1}{q+t+1} z^q. \end{aligned}$$

定义 1 设 $\psi \in L^2(D, dA)$, 如果 $\psi(z) = \psi(|z|)$ ($z \in D$), 那么称 ψ 是径向函数。

定义 2 设 $\varphi \in L^1([0, 1], r dr)$, φ 的 Mellin 变换 $\hat{\varphi}$ 定义为: $\hat{\varphi}(z) = \int_0^1 \varphi(r) r^{z-1} dr$ 。

由上述定义中给出的函数 $\hat{\varphi}(z)$ 在半平面 $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 2\}$ 内是解析的, 且有以下性质。

引理 3 [30] 如果函数 $\hat{\varphi}(z)$ 满足: 存在 $\{n_k\} \subset N$ 使得 $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{n_k} = \infty$ 且 $\hat{\varphi}(n_k) = 0$ ($k \in N$), 那么 φ 是零函数。

定义 3 设 $\varphi, \psi \in L^1([0, 1], r dr)$, 它们的 Mellin 卷积定义为

$$(\varphi *_M \psi)(r) = \int_r^1 \varphi\left(\frac{r}{t}\right) \psi(t) dt, \quad 0 \leq r < 1.$$

由上述定义很容易得到以下关系: $\widehat{\varphi *_M \psi}(r) = \hat{\varphi}(r) \hat{\psi}(r)$ 。

3. 斜 Toeplitz 算子的交换性

在本节中我们首先探讨解析斜 Toeplitz 算子与以径向函数为符号的斜 Toeplitz 算子可交换的必要条件, 接着给出解析斜 Toeplitz 算子与以特殊径向函数为符号的斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件。然后我们讨论以函数 $az^s + b|z|^{2t}$ 为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子的交换性问题, 得到了这两类算子可交换的充要条件。

定理 1 设 $\varphi \in H^\infty(D)$ 是非零函数且 $\psi \in L^\infty(D)$ 是径向函数, 如果算子 B_ψ 和 B_φ 可交换, 那么必有下列情况之一成立: (1) 函数 φ 不是常值函数, 函数 ψ 是零函数; (2) 函数 φ 是常值函数, 且 ψ 满足

$$2r \int_r^1 \psi(x) \frac{1}{x^3} dx = \int_r^1 \psi(x) dx \quad (0 \leq r < 1). \quad (3.1)$$

证明 如果算子 B_ψ 和 B_φ 可交换, 那么 $B_\psi B_\varphi = B_\varphi B_\psi$, 从而可得 $B_\psi^* B_\varphi^* = B_\varphi^* B_\psi^*$, 于是可得对任意的 $n \in N$,

$$T_{\bar{\psi}} W^* T_{\bar{\varphi}}(z^{2n}) = T_{\bar{\varphi}} W^* T_{\bar{\psi}}(z^{2n}). \quad (3.2)$$

既然函数 $\varphi \in H^\infty(D)$ ，那么函数 φ 可以表示为 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ ，从而可得对任意的 $n \in N$ ，

$$\begin{aligned} T_{\bar{\psi}} W^* T_{\bar{\varphi}}(z^{2n}) &= 2 \sum_{p=0}^{2n} \overline{a_p} \frac{(4n-2p+1)^2}{2n+1} \hat{\psi}(8n-4p+2) z^{4n-2p}, \\ T_{\bar{\varphi}} W^* T_{\bar{\psi}}(z^{2n}) &= 2 \sum_{p=0}^{4n} \overline{a_p} (4n-p+1) \hat{\psi}(4n+2) z^{4n-p}, \end{aligned}$$

从而由(3.2)式可得对任意的 $n \in N_+$ ，

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{2n} \overline{a_p} \frac{(4n-2p+1)^2}{2n+1} \hat{\psi}(8n-4p+2) z^{4n-2p} \\ &= \sum_{p=0}^{2n} \overline{a_{2p}} (4n-2p+1) \hat{\psi}(4n+2) z^{4n-2p} + \sum_{p=0}^{2n-1} \overline{a_{2p+1}} (4n-2p) \hat{\psi}(4n+2) z^{4n-2p-1}, \end{aligned}$$

于是由上式可得对任意的 $n \in N_+$ ，

$$\overline{a_{2p+1}} \hat{\psi}(4n+2) = 0, \quad 0 \leq p \leq 2n-1 \text{ 且 } p \in N, \quad (3.3)$$

$$\overline{a_{2p}} \hat{\psi}(4n+2) = \overline{a_p} \frac{4n-2p+1}{2n+1} \hat{\psi}(8n-4p+2), \quad 0 \leq p \leq 2n \text{ 且 } p \in N. \quad (3.4)$$

记 $M_1 = \{2p | p \in N_+\}$ ， $M_2 = \{2p+1 | p \in N\}$ ，则 $N = M_1 \cup M_2 \cup \{0\}$ ，且 $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ 。下面将根据函数 φ 的性质分为三种情况展开讨论。

情况 I 如果存在 $p_0 \in M_2$ 使得 $a_{p_0} \neq 0$ ，那么由(3.3)式可得对任意的 $n \in N_+$ 且 $n \geq p_0$ ， $\hat{\psi}(4n+2) = 0$ ，从而由引理 3 可得函数 $\psi \equiv 0$ 。

情况 II 如果对任意的 $p \in M_2$ ， $a_p = 0$ ，且存在 $q_0 \in M_1$ 使得 $a_{q_0} \neq 0$ ，那么引理 1 可得存在 $s_0 \in N_+$ 及 $p_0 \in M_2$ 使得 $q_0 = p_0 2^{s_0}$ 。而由(3.4)式可得

$$\overline{a_{q_0}} [\hat{\psi}(4n+2)]^{s_0} = \overline{a_{p_0}} \left(\prod_{i=0}^{s_0-1} \frac{4n-2^{i+1}p_0+1}{2n+1} \hat{\psi}(8n-2^{i+1}p_0+2) \right).$$

既然对任意的 $p \in M_2$ ， $a_p = 0$ ，且 $a_{q_0} \neq 0$ ，所以由上式可得对任意的 $n \in N_+$ 且 $n \geq q_0$ ， $\hat{\psi}(4n+2) = 0$ ，从而由引理 3 可得函数 $\psi \equiv 0$ 。

情况 III 如果对任意的 $p \in M_2 \cup M_1$ ， $a_p = 0$ ，那么可得函数 $\varphi(z) = a_0$ ，且由(3.4)式可得对任意的 $n \in N_+$ ， $\overline{a_0} \hat{\psi}(4n+2) = \overline{a_0} \frac{4n+1}{2n+1} \hat{\psi}(8n+2)$ 。既然函数 φ 是非零的，那么可得 $a_0 \neq 0$ ，从而由上式可得对任意的 $n \in N_+$ ，

$$\frac{1}{4n+1} \hat{\psi}(4n+2) = \frac{1}{2n+1} \hat{\psi}(8n+2).$$

而由 Mellin 变换的性质可得

$$\frac{1}{4n+1} \hat{\psi}(4n+2) = \frac{1}{4n+1} - \hat{\psi}_2(4n+1), \quad \hat{\psi}(8n+2) = \frac{1}{2} \hat{\psi}_1(4n+1), \quad \hat{t}(4n+1) = \frac{1}{4n+1},$$

其中 $\psi_2(t) = \int_0^t \psi(x) dx (0 \leq t \leq 1)$ ， $\psi_1(t) = \psi(\sqrt{t}) (0 \leq t < 1)$ ， $C_0 = \int_0^1 \psi(x) dx$ ，所以由 Mellin 卷积的性质可得对任意的 $n \in N_+$ ， $\overline{C_0 - \psi_2 - \psi_1 *_{\mathcal{M}} t}(4n+1) = 0$ ，从而由引理 3 可得 $C_0 - \psi_2 = \psi_1 *_{\mathcal{M}} t$ 。而由 Mellin 卷积定义计算可得函数 ψ 满足以下方程：

$$2r \int_r^1 \psi(x) \frac{1}{x^3} dx = \int_r^1 \psi(x) dx (0 \leq r < 1).$$

推论 1 设 $\varphi \in H^\infty(D)$ 是非零函数且 $\psi(z) = b_0 + b_1|z|^m$ ($m \in N_+$)，那么算子 B_ψ 和 B_φ 可交换的充要条件是下列情况之一成立：(1) 函数 φ 不是常值函数，函数 ψ 是零函数；(2) 函数 φ 和函数 ψ 均是常值函数。

证明 如果算子 B_ψ 和 B_φ 可交换，那么由定理 1 可得函数 φ 不是常值函数且函数 ψ 是零函数，或者函数 φ 是常值函数，且函数 ψ 满足(3.1)式。既然 $\psi(z) = b_0 + b_1|z|^m$ ($m \in N_+$)，那么将分为 $m=1$ 、 $m=2$ 和 $m \geq 3$ 三种情况展开讨论。若 $m=1$ ，那么将该函数代入(3.1)式可得

$$b_0(1-r) + 2b_1(\sqrt{r}-r) = b_0(1-r) + \frac{b_1}{2}(1-r^2), 0 \leq r < 1,$$

从而可得 $b_1 = 0$ ，于是可得 $\psi(z) = b_0$ 。若 $m=2$ ，那么将该函数代入(3.1)式可得

$$b_0(1-r) - b_1 r \ln r = b_0(1-r) + \frac{b_1}{3}(1-r^3), 0 < r < 1,$$

$$b_0 = b_0 + \frac{b_1}{3},$$

从而可得 $b_1 = 0$ ，于是可得 $\psi(z) = b_0$ 。若 $m \geq 3$ ，那么将该函数代入(3.1)式可得

$$b_0(1-r) + \frac{2}{m-2}b_1(r-r^{m/2}) = b_0(1-r) + \frac{1}{m+1}b_1(1-r^{m+1}), 0 \leq r < 1,$$

从而可得 $b_1 = 0$ ，于是可得 $\psi(z) = b_0$ 。于是可得如果函数 $\psi(z) = b_0 + b_1|z|^m$ ($m \in N_+$) 满足(3.1)式，那么该函数必是常值函数。

反之，如果函数 ψ 是零函数，那么算子 B_ψ 是零算子，所以显然可得算子 B_ψ 和 B_φ 可交换。如果函数 φ 和函数 ψ 均是常值函数，那么显然有算子 B_ψ 和 B_φ 可交换。

推论 2 设 $\varphi \in H^\infty(D)$ 是非零函数且 $\psi(z) = b_0 + b_1|z| + b_2|z|^2$ ，那么算子 B_ψ 和 B_φ 可交换的充要条件是下列情况之一成立：(1) 函数 φ 不是常值函数，函数 ψ 是零函数；(2) 函数 φ 和函数 ψ 均是常值函数。

证明 如果算子 B_ψ 和 B_φ 可交换，那么由定理 1 可得函数 φ 不是常值函数且函数 ψ 是零函数，或者函数 φ 是常值函数，且函数 ψ 满足(3.1)式。既然 $\psi(z) = b_0 + b_1|z| + b_2|z|^2$ ，那么将该函数代入(3.1)式可得

$$b_0(1-r) + 2b_1(\sqrt{r}-r) - b_2 r \ln r = b_0(1-r) + \frac{b_1}{2}(1-r^2) + \frac{b_2}{3}(1-r^3), 0 < r < 1, \quad b_0 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3},$$

从而可得 $b_2 = \frac{3}{2}b_1$ ， $b_1 \left(2\sqrt{r} - 2r + \frac{3}{2}r \ln r + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^3 \right) = 0, 0 < r < 1$ 。既然函数在

$$2\sqrt{r} - 2r + \frac{3}{2}r \ln r + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^3 > 0, 0 < r < 1,$$

所以可得 $b_1 = 0$ ， $b_2 = 0$ ，从而可得 $\psi(z) = b_0$ 。

反之，如果函数 ψ 是零函数，那么算子 B_ψ 是零算子，所以显然可得算子 B_ψ 和 B_φ 可交换。如果函数 φ 和函数 ψ 均是常值函数，那么显然有算子 B_ψ 和 B_φ 可交换。

定理 2 设 $\varphi \in H^\infty(D)$ 且 $\psi(z) = az^2 + b|z|^{2t}$ ，其中 t 为正整数，那么算子 B_φ 与 B_ψ 是可交换的充分必要条件是下列条件之一成立：(1) φ 是零函数；(2) ψ 是解析函数且存在不全为零的常数 α, β 使得 $\alpha\psi + \beta\varphi = 0$ 。

证明 如果算子 B_φ 与 B_ψ 是可交换的，即 $B_\varphi B_\psi = B_\psi B_\varphi$ ，从而可得对任意非负整数 q ，

$$B_\varphi B_\psi(z^q) = B_\psi B_\varphi(z^q). \quad (3.5)$$

由于 $\varphi \in H^\infty(D)$, 所以函数 φ 可表示为 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ 。

当 $q=1$ 时, 根据引理 2 可得 $B_\psi(z) = W\left(az^3 + b\frac{2}{t+2}z^1\right) = 0$, 故可得 $B_\varphi B_\psi(z) = 0$ 。而

$$B_\psi B_\varphi(z) = ba_3 \frac{3}{t+3} z + \sum_{p=0}^{\infty} \left(aa_{4p+3} + ba_{4p+7} \frac{2p+5}{2p+t+5} \right) z^{p+2},$$

从而由(3.5)式可得 $ba_3 = 0$, 且对任意的非负整数 p ,

$$aa_{4p+3} + ba_{4p+7} \frac{2p+5}{2p+t+5} = 0. \quad (3.6)$$

既然 $ba_3 = 0$, 那么必有 $b=0$ 或 $a_3=0$ 。下面将根据常数 b 的取值不同分为两种情况展开讨论。

如果 $b=0$, 既然 $\psi(z) = az^2 + b|z|^{2t}$, 所以 $\psi(z) = az^2$ 是有界解析函数。既然 B_φ 与 B_ψ 是可交换的, 所以可得 φ 与 ψ 是线性相关的, 即存在不全为零的常数 α, β 使得 $\alpha\psi + \beta\varphi = 0$ 。

如果 $b \neq 0$, 那么必有 $a_3 = 0$ 。而由(3.6)式可得对任意的非负整数 p ,

$$a_{4p+7} = a_3 \left(-\frac{a}{b}\right)^{p+1} \prod_{i=0}^p \left(1 + \frac{t}{2i+5}\right),$$

所以可得对任意的非负整数 p , $a_{4p+3} = 0$ 。

当 $q=3$ 时, 根据引理 2 可得 $B_\psi(z^3) = W\left(az^5 + b\frac{4}{t+4}z^3\right) = 0$, 故可得 $B_\varphi B_\psi(z) = 0$ 。而

$$B_\psi B_\varphi(z) = ba_1 \frac{3}{t+3} z + \sum_{p=0}^{\infty} \left(aa_{4p+1} + ba_{4p+5} \frac{2p+5}{2p+t+5} \right) z^{p+2}, \text{ 从而由(3.5)式可得 } ba_1 = 0, \text{ 且对任意的非负整数 } p,$$

$$aa_{4p+1} + ba_{4p+5} \frac{2p+5}{2p+t+5} = 0. \quad (3.7)$$

既然 $b \neq 0$, $ba_1 = 0$, 那么必有 $a_1 = 0$ 。而由(3.7)式可得对任意的非负整数 p ,

$$a_{4p+5} = a_1 \left(-\frac{a}{b}\right)^{p+1} \prod_{i=0}^p \left(1 + \frac{t}{2i+5}\right),$$

所以可得对任意的非负整数 p , $a_{4p+1} = 0$ 。于是可得对任意的非负整数 p , $a_{2p+1} = 0$, 从而可得

$$\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} z^{2p}.$$

当 $q=4s(s \in \mathbb{N})$ 时, 根据引理 2 可得 $B_\psi B_\varphi(z^{4s}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4s+1}{4s+1+t} ba_{2p} z^{p+s}$, 且

$$B_\psi B_\varphi(z^{4s}) = ba_0 \frac{2s+3}{2s+3+t} z^s + \sum_{p=0}^{\infty} \left(aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+2s+3}{2p+2s+3+t} \right) z^{p+s+1},$$

从而由(3.5)式可得 $\frac{4s+1}{4s+1+t} ba_0 = ba_0 \frac{2s+3}{2s+3+t}$, 且对任意的非负整数 p ,

$$\frac{4s+1}{4s+1+t} ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+2s+3}{2p+2s+3+t}. \quad (3.8)$$

当 $s=0$ 时, 由上面的两个式子可得 $\left(\frac{1}{1+t} - \frac{3}{3+t}\right) ba_0 = 0$, 且对任意的非负整数 p ,

$$\frac{1}{1+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4}\frac{2p+3}{2p+3+t}. \quad (3.9)$$

既然 $b \neq 0$ ，且对任意的正整数 t ， $\frac{1}{1+t} - \frac{3}{3+t} \neq 0$ ，所以可得 $a_0 = 0$ 。当 $s=1$ 时，由(3.8)式可得对任意的非负整数 p ，

$$\frac{5}{5+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4}\frac{2p+5}{2p+5+t}. \quad (3.10)$$

既然 $b \neq 0$ ，且 t 是正整数，于是(3.10)式与(3.9)式的左右两端分别相减可得对任意的非负整数 p ，

$$\frac{2}{(5+t)(1+t)}a_{2p+2} = \frac{1}{(2p+5+t)(2p+3+t)}a_{4p+4}. \quad (3.11)$$

当 $s=2$ 时，由(3.8)式可得对任意的非负整数 p ，

$$\frac{9}{9+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4}\frac{2p+7}{2p+7+t}. \quad (3.12)$$

既然 $b \neq 0$ ，且 t 是正整数，于是(3.12)式与(3.9)式的左右两端分别相减可得对任意的非负整数 p ，

$$\frac{2}{(9+t)(1+t)}a_{2p+2} = \frac{1}{(2p+7+t)(2p+3+t)}a_{4p+4}. \quad (3.13)$$

于是由(3.11)式和(3.13)式可得对任意的非负整数 p ，

$$a_{4p+4} = \left(\frac{2p}{5+t} + 1\right)\frac{2(2p+3+t)}{1+t}a_{2p+2} \text{ 且 } a_{4p+4} = \left(\frac{2p-2}{9+t} + 1\right)\frac{2(2p+3+t)}{1+t}a_{2p+2},$$

从而可得 $\left[\left(\frac{2p}{5+t} + 1\right) - \left(\frac{2p-2}{9+t} + 1\right)\right]\frac{2(2p+3+t)}{1+t}a_{2p+2} = 0$ 。由于对任意的非负整数 p ，正整数 t ，

$\left[\left(\frac{2p}{5+t} + 1\right) - \left(\frac{2p-2}{9+t} + 1\right)\right]\frac{2(2p+3+t)}{1+t} \neq 0$ ，所以可得对任意的非负整数 p ， $a_{2p+2} = 0$ ，从而可得对任意的

非负整数 p ， $a_{2p} = 0$ 。既然 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}z^{2p}$ ，所以可得 φ 是零函数。

反之，如果函数 φ 是零函数，那么算子 B_φ 是零算子，所以显然可得算子 B_ψ 和 B_φ 可交换。如果 ψ 是解析函数，且 φ 与 ψ 线性相关，那么显然有 B_ψ 和 B_φ 可交换。

定理 3 设 $\varphi \in H^\infty(D)$ 且 $\psi(z) = az + b|z|^{2t}$ ，其中 t 为正整数，那么算子 B_φ 与 B_ψ 是可交换的充分必要条件是下列条件之一成立：(1) φ 是零函数；(2) ψ 是解析函数且存在不全为零的常数 α, β 使得 $\alpha\psi + \beta\varphi = 0$ 。

证明 如果算子 B_φ 与 B_ψ 是可交换的，即 $B_\varphi B_\psi = B_\psi B_\varphi$ ，从而可得对任意非负整数 q ，

$$B_\varphi B_\psi(z^q) = B_\psi B_\varphi(z^q). \quad (3.14)$$

由于 $\varphi \in H^\infty(D)$ ，所以函数 φ 可表示为 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ 。

当 $q = 4s (s \in \mathbb{N})$ 时，根据引理 2 可得 $B_\varphi B_\psi(z^{4s}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4s+1}{4s+1+t} ba_{2p} z^{p+s}$ ，且

$$B_\psi B_\varphi(z^{4s}) = ba_0 \frac{2s+1}{2s+1+t} z^s + \sum_{p=0}^{\infty} \left(aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+2s+3}{2p+2s+3+t} \right) z^{p+s+1},$$

从而由(3.14)式可得 $\frac{4s+1}{4s+1+t}ba_0 = ba_0 \frac{2s+1}{2s+1+t}$, 且对任意的非负整数 p ,

$$\frac{4s+1}{4s+1+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+2s+3}{2p+2s+3+t}. \quad (3.15)$$

当 $s=0$ 时, 由(3.15)式可得对任意的非负整数 p ,

$$\frac{1}{1+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+3}{2p+3+t}. \quad (3.16)$$

当 $s=1$ 时, 由 $\frac{4s+1}{4s+1+t}ba_0 = ba_0 \frac{2s+1}{2s+1+t}$ 可得 $\left(\frac{5}{5+t} - \frac{3}{3+t}\right)ba_0 = 0$ 。既然 $t \in N_+$, 那么 $\frac{5}{5+t} - \frac{3}{3+t} \neq 0$,

所以可得 $ba_0 = 0$, 从而可得 $b=0$ 或 $a_0 = 0$ 。

如果 $b=0$, 既然 $\psi(z) = az + b|z|^{2t}$, 所以 $\psi(z) = az$ 是有界解析函数。既然 B_φ 与 B_ψ 是可交换的, 所以可得 φ 与 ψ 是线性相关的, 即存在不全为零的常数 α, β 使得 $\alpha\psi + \beta\varphi = 0$ 。

如果 $b \neq 0$, 既然 $ba_0 = 0$, 所以可得 $a_0 = 0$ 。由(3.15)式可得对任意的非负整数 p ,

$$\frac{5}{5+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+5}{2p+5+t}. \quad (3.17)$$

既然 $b \neq 0$, 且 t 是正整数, 于是(3.17)式与(3.16)式的左右两端分别相减可得对任意的非负整数 p ,

$$\frac{2}{(5+t)(1+t)}a_{2p+2} = \frac{1}{(2p+5+t)(2p+3+t)}a_{4p+4}. \quad (3.18)$$

当 $s=2$ 时, 由(3.15)式可得对任意的非负整数 p ,

$$\frac{9}{9+t}ba_{2p+2} = aa_{4p} + ba_{4p+4} \frac{2p+7}{2p+7+t}. \quad (3.19)$$

既然 $b \neq 0$, 且 t 是正整数, 于是(3.19)式与(3.16)式的左右两端分别相减可得对任意的非负整数 p ,

$$\frac{2}{(9+t)(1+t)}a_{2p+2} = \frac{1}{(2p+7+t)(2p+3+t)}a_{4p+4}. \quad (3.20)$$

于是由(3.18)式和(3.20)式可得对任意的非负整数 p ,

$$a_{4p+4} = \left(\frac{2p}{5+t} + 1\right) \frac{2(2p+3+t)}{1+t} a_{2p+2} \text{ 且 } a_{4p+4} = \left(\frac{2p-2}{9+t} + 1\right) \frac{2(2p+3+t)}{1+t} a_{2p+2},$$

从而可得 $\left[\left(\frac{2p}{5+t} + 1\right) - \left(\frac{2p-2}{9+t} + 1\right)\right] \frac{2(2p+3+t)}{1+t} a_{2p+2} = 0$ 。由于对任意的非负整数 p , 正整数 t ,

$\left[\left(\frac{2p}{5+t} + 1\right) - \left(\frac{2p-2}{9+t} + 1\right)\right] \frac{2(2p+3+t)}{1+t} \neq 0$, 所以可得对任意的非负整数 p , $a_{2p+2} = 0$, 从而可得对任意的

非负整数 p , $a_{2p} = 0$ 。于是可得函数 φ 可写为 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} z^{2p+1}$ 。

当 $q=2$ 时, 根据引理 2 可得 $B_\varphi(z^2) = W\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} z^{2p+3}\right) = 0$, 故可得 $B_\psi B_\varphi(z^2) = 0$ 。而

$$B_\varphi B_\psi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} ba_{2p+1} \frac{3}{3+t} z^{p+1},$$

从而由(3.14)式可得对任意的非负整数 p , $ba_{2p+1} \frac{3}{3+t} = 0$ 。既然 $b \neq 0$, $\frac{3}{3+t} \neq 0$, 所以可得对任意的

非负整数 p , $a_{2p+1} = 0$ 。既然 $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} z^{2p+1}$, 所以可得 φ 是零函数。

反之, 如果函数 φ 是零函数, 那么算子 B_{φ} 是零算子, 所以显然可得算子 B_{ψ} 和 B_{φ} 可交换。如果 ψ 是解析函数, 且 φ 与 ψ 线性相关, 那么显然有 B_{ψ} 和 B_{φ} 可交换。

4. 总结

本文运用 Mellin 变换和符号函数的性质研究了单位圆盘的 Bergman 空间上以非调和函数为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子的交换性问题, 得到以函数 $\varphi(z) = az^s + b|z|^{2t}$ 为符号的斜 Toeplitz 算子 B_{φ} 与解析斜 Toeplitz 算子 B_{ψ} 可交换的充要条件, 并得到以有界径向函数为符号的斜 Toeplitz 算子 B_{ψ} 与解析斜 Toeplitz 算子 B_{φ} 可交换的一个必要条件及以特殊径向函数为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件。由于 $L^1([0,1], r dr)$ 中函数的 Mellin 变换都存在, 且除径向函数 ψ 的可积性, 定理 1 的证明过程没有用到函数 ψ 的其他特殊性质, 所以对于 $L^{\infty}(D)$ 中的所有径向函数, 定理 1 都成立。但由于方程(3.1)的解不容易给出, 所以本文只给出以特殊径向函数为符号的斜 Toeplitz 算子与解析斜 Toeplitz 算子可交换的充要条件。

基金项目

国家自然科学基金项目(No: 11301046); 辽宁省教育厅科学研究经费项目(JDL2019026); 北京物资学院青年基金项目(2018XJQN01)。

参考文献

- [1] Ho, M. (1996) Properties of Slant Toeplitz Operators. *Indiana University Mathematics Journal*, **45**, 843-862. <https://doi.org/10.1512/iumj.1996.45.1973>
- [2] Ho, M.C. (1997) Spectra of Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbols. *Michigan Mathematical Journal*, **44**, 157-166. <https://doi.org/10.1307/mmj/1029005627>
- [3] Ho, M.C. (1997) Adjoints of Slant Toeplitz Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **29**, 301-312. <https://doi.org/10.1007/bf01320703>
- [4] Ho, M.C. (2001) Adjoints of Slant Toeplitz Operators II. *Integral Equations and Operator Theory*, **41**, 179-188. <https://doi.org/10.1007/bf01295304>
- [5] Arora, S.C. and Batra, R. (2003) On Generalized Slant Toeplitz Operators. *Indian Journal of Mathematics*, **45**, 121-134.
- [6] Arora, S.C. and Batra, R. (2004) On Generalized Slant Toeplitz Operators with Continuous Symbols. *Yokohama Mathematical Journal*, **51**, 1-9.
- [7] Arora, S.C. and Batra, R. (2005) Generalized Slant Toeplitz Operators on H^2 . *Mathematische Nachrichten*, **278**, 347-355. <https://doi.org/10.1002/mana.200310244>
- [8] 安恒斌, 蹇人宜. Bergman 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 数学学报, 2004, 47(1): 103-110.
- [9] Yang, J., Leng, A. and Lu, Y. (2007) K-Order Slant Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Northeastern Mathematical Journal*, **23**, 403-412.
- [10] Lu, Y., Liu, C. and Yang, J. (2010) Commutativity of K^{th} -Order Slant Toeplitz Operators. *Mathematische Nachrichten*, **283**, 1304-1313. <https://doi.org/10.1002/mana.200710100>
- [11] 章国凤, 于涛. Dirichlet 空间上的斜 Toeplitz 算子[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2011, 29(2): 50-55.
- [12] 朱洪敏. 单位多圆盘上 Bergman 空间上的 k 阶斜 Toeplitz 算子的一些研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2012.
- [13] Liu, C. and Lu, Y. (2013) Product and Commutativity of K^{th} -Order Slant Toeplitz Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **45**, 900-914.
- [14] Liu, C. and Lu, Y. (2013) Product and Commutativity of Slant Toeplitz Operators. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **33**, 122-126.
- [15] 刘朝美, 倪维丹. Bergman 空间上 k 阶斜 Toeplitz 算子的正规性及亚正规性[J]. 大连交通大学学报, 2016, 37(1):

- 113-116.
- [16] 刘朝美, 高娇娇. 双圆盘的 Bergman 空间上 k 阶斜 Toeplitz 算子的交换性[J]. 大连交通大学学报, 2017, 38(5): 115-117+120.
 - [17] Singh, S.K.K. and Gupta, A. (2017) k th-Order Slant Toeplitz Operators on the Fock Space. *Advances in Operator Theory*, **2**, 318-333.
 - [18] Datt, G. and Ohri, N. (2018) Properties of Slant Toeplitz Operators on the Torus. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, **12**, 195-209.
 - [19] Datt, G. and Ohri, N. (2019) Slant Toeplitz operators on the Lebesgue Space of the Torus. *Khayyam Journal of Mathematics*, **5**, 65-76.
 - [20] Datt, G. and Pandey, S.K. (2020) Compression of Slant Toeplitz Operators on the Hardy Space of n -Dimensional Torus. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **70**, 997-1018. <https://doi.org/10.21136/cmj.2020.0088-19>
 - [21] Hazarika, M. and Marik, S. (2020) Reducing and Minimal Reducing Subspaces of Slant Toeplitz Operators. *Advances in Operator Theory*, **5**, 336-346. <https://doi.org/10.1007/s43036-019-00022-z>
 - [22] 杜巧玲, 许安见. Hardy 空间上的斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2021, 35(8): 224-229.
 - [23] Pandey, S.K. and Datt, G. (2021) Multivariate Version of Slant Toeplitz Operators on the Lebesgue Space. *Asian-European Journal of Mathematics*, **14**, Article 2150152. <https://doi.org/10.1142/s1793557121501527>
 - [24] Hazarika, M. and Marik, S. (2021) Toeplitz and Slant Toeplitz Operators on the Polydisk. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **27**, 73-93. <https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.02.003>
 - [25] Łanucha, B. and Michalska, M. (2022) Compressions of k th-Order Slant Toeplitz Operators to Model Spaces. *Lithuanian Mathematical Journal*, **62**, 69-87. <https://doi.org/10.1007/s10986-021-09548-3>
 - [26] 刘朝美, 张文婷, 蒋志娟. 加权 Bergman 空间上一类斜 Toeplitz 算子的交换性[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1693-1701. <https://doi.org/10.12677/PM.2022.1210183>
 - [27] 赵彩竹, 许安见. 单位圆周 Lebesgue 空间的 3 阶斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2023, 40(4): 117-121.
 - [28] 刘朝美, 蒋志娟. 加权 Bergman 空间上具有调和符号的斜 Toeplitz 算子的正规性及亚正规性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1620-1633. <https://doi.org/10.12677/AAM.2023.124167>
 - [29] Zhu, K.H. (1990) *Operator Theory in Function Spaces*. M. Dekker.
 - [30] Louhichi, I. and Zakariasy, L. (2005) On Toeplitz Operators with Quasihomogeneous Symbols. *Archiv der Mathematik*, **85**, 248-257. <https://doi.org/10.1007/s00013-005-1198-0>