Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(6), 173-187**
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146310

Hans汉斯

非线性项变号的分数阶微分方程边值问题正解的存在性

马展婷

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年5月19日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月19日

摘　要

本文探讨了一类符号变化的非线性项对分数阶微分方程边值问题正解存在性的影响。首先，求解非线性分数阶微分方程边值问题对应线性问题的Green函数及其性质。这些性质为所研究问题正解的存在性提供了基础。接下来，将所研究问题解的存在性转化为积分方程的可解性。针对非线性项变号的特点，选择一个辅助积分方程，通过该积分方程定义算子。进一步探究算子的性质，我们最终在适当的空间中运用Guo-Krasnoselskii不动点定理，证明了所研究的非线性边值问题至少存在一个正解，并举例说明所得理论结果的正确性。

关键词

变号非线性项，积分边界条件，正解

Existence of Positive Solutions for Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations with Sign-Changing Nonlinearity

Zhanting Ma

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: May 19th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

This paper explores the influence of a class of nonlinear terms with varying symbols on the existence of positive solutions for boundary value problems of fractional differential equations. Firstly, construct

文章引用: 马展婷. 非线性项变号的分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 173-187.
DOI: 10.12677/aam.2025.146310

Green's function associated with the linear case of the given nonlinear fractional differential equation under boundary conditions and study its characteristics. These properties provide a basis for the existence of the positive solution of the studied problem. Next, transform the existence of the solution of the studied problem into the solvability of the integral equation. In view of the characteristic of the change sign of the nonlinear term, construct an auxiliary integral equation, thereby defining the operator through this integral equation. Further exploring the properties of the operator, finally, with the help of the Guo-Krasnoselskii fixed point theorem, the existence of positive solutions to the studied problem is obtained and the correctness of the obtained theoretical results is illustrated with examples.

Keywords

Sign-Changing Nonlinearity, Integral Boundary Condition, Positive Solution

1. 引言

分数阶微积分理论补充了经典微积分中只考虑整数阶导数的局限性，分数阶微积分允许导数和积分的阶次为任意实数，包括分数和小数，从而扩展了传统微积分的应用范围。分数阶微积分和分数阶微分方程之间的联系是通过分数阶导数建立的。分数阶微分方程在信号处理[1]、生物工程[2]、材料科学[3]等领域都有广泛的应用。

边值问题是分数阶微分方程研究中的关键问题类型，近几十年来，边值问题解、多重解的存在性引起了人们的极大关注，而边值问题正解的存在性更具有实际意义，并取得了许多成果。例如，Liu 等人在文献[4]中研究了一类具有 p-Laplacian 算子的耦合分数阶微分系统正解的存在性；Li 等人在文献[5]中研究了一类积分边界条件下非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在性；Zhang 等人在文献[6]中研究了一类分数阶微分方程边值问题正解的存在性；Li 等人在文献[7]中研究了一类非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在性。在上述文献中，边值问题的非线性项都是非负的，那么当非线性项变号时，边值问题正解的存在性该如何解决呢？下面来介绍一些具体的例子：

1998 年，Agarwal 等人[8]利用锥上的不动点定理，研究带有参数和非线性项变号的整数阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases}\left(p(t)u'(t)\right)'+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0,\ 0<t<1,\\ \alpha_1 u(0)-\beta_1 p(0)u'(0)=0,\\ \alpha_2 u(1)+\beta_2 p(1)u'(1)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $p\in C\left([0,1],(0,\infty)\right)$，$\lambda>0$ 是一个参数，$\alpha_i,\beta_i\geq 0, i=1,2$ 且 $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1>0$，$f\in C\left([0,1]\times[0,+\infty),[-M,+\infty)\right)$，$M>0$ 是一个常数。

2009 年，Li 等学者[9]运用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理，t 探究一类带有参数和非线性项变号的整数阶微分方程三点边值问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)u'(t)+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0,\ 0<t<1,\\ u'(0)=0,\ u(1)=\alpha u(\eta)\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\lambda>0$ 是一个参数，
$0<\alpha,\eta<1, a\in C\left([0,1],(-\infty,0)\right), f\in C\left([0,1]\times(-\infty,+\infty),[-M,+\infty)\right)$，$M>0$ 是一个常数。

2011 年，Wang 等人[10]使用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理，研究一类带有参数和非线性项变号的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0, 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $2<\alpha\le 3, \lambda>0$ 是一个参数，$f\in C\left((0,1)\times[0,+\infty),\mathbb{R}\right)$ 且满足 $-r(t)\le f(t,u)\le z(t)g(u)$，其中 $r,z\in C\left((0,1),(0,+\infty)\right)$，$g\in C\left([0,+\infty),(0,+\infty)\right)$，$f$ 在 $t=0,1$ 处可能是奇异的。

2017 年，Henderson 等学者[11]利用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理，探究一类带有参数和非线性项变号的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0, 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0, \\ D_{0^+}^{p}u(1)=\sum_{i=1}^{m}a_i D_{0^+}^{q}u(\xi_i) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $n\ge 3, n-1<\alpha\le n, \lambda>0$ 是一个参数，$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_m<1$，$p\in[1,n-2], q\in[0,p]$，$a_i\ge 0, i=1,2,\cdots,m$，$f\in C\left((0,1)\times[0,+\infty),\mathbb{R}\right)$ 且满足 $-r(t)\le f(t,u)\le z(t)g(t,u)$，其中 $r,z\in C\left((0,1),[0,+\infty)\right)$，$g\in C\left([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty)\right)$，$f$ 在 $t=0,1$ 处可能是奇异的。

同年，Zhang 等人[12]利用巴拿赫压缩映射原理和 u_0-正线性算子定理，获得一类具有非线性项变号的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+f\left(t,u(t)\right)=0, 0\le t\le 1, \\ u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0, \\ D_{0^+}^{\beta}u(1)=\lambda\int_0^{\eta}h(s)D_{0^+}^{\gamma}u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2}$$

解的唯一性，其中 $n\ge 3, n-1<\alpha\le n, \beta\ge 1, \alpha-\beta-1>0, 0<\eta\le 1, \lambda>0$ 是一个参数，$0\le\lambda\Gamma(\alpha-\beta)\int_0^{\eta}h(t)t^{\alpha-\gamma-1}\mathrm{d}s<\Gamma(\alpha-\gamma), f\in C\left([0,1]\times(-\infty,+\infty),(-\infty,+\infty)\right), h\in L^1[0,1]$ 是非负的。

2023 年，Zhang 等人[13]运用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理，探究一类带有参数和非线性项变号的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0, 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=u^{(n-2)}(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性，其中 $n\ge 3, n-1<\alpha<n, \lambda>0$ 是一个参数，$f\in C\left([0,1]\times[0,+\infty),\mathbb{R}\right)$ 且满足 $f(t,u)>-\omega(t)$，其中 $\omega>0, \omega\in C(0,1)\cap L^1(0,1), \int_0^1(1-s)^{\alpha-2}\omega(s)\mathrm{d}s<+\infty$。

本文在以上文献的基础上，使用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理，研究一类带有参数和非线性项变号的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0, 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0, \\ D_{0^+}^{p}u(1)=a\int_0^{\eta}h(s)D_{0^+}^{q}u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性。

假设本文满足以下条件：

(H$_1$) $n\ge 3, n-1<\alpha\le n, \lambda>0$ 是一个参数， $p\in[1,n-2], q\in[0,p], a\ge 0, 0<\eta\le 1, h\in C([0,1],[0,+\infty))$，$\rho=\Gamma(\alpha-q)-a\Gamma(\alpha-p)\int_0^\eta h(s)s^{\alpha-q-1}\mathrm{d}s>0$；

(H$_2$) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),R)$, $f(t,u)>-\omega(t),(t,u)\in[0,1]\times[0,+\infty)$，其中 $\omega\in C([0,1],(0,+\infty))$。

2. 预备知识及引理

为了证明本文主要结果，本节首先给出有关分数阶微积分的基本定义和引理。为此，假设 $\beta>0$，$[\beta]$ 表示 β 的整数部分。

定义 1 [14] $[0,1]$ 上的 β 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分 $I_{0^+}^\beta u$ 和 $I_{1^-}^\beta u$ 分别定义为

$$\left(I_{0^+}^\beta u\right)(t):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\frac{u(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s$$

和

$$\left(I_{1^-}^\beta u\right)(t):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_t^1\frac{u(s)}{(s-t)^{1-\beta}}\mathrm{d}s.$$

定义 2 [14] $[0,1]$ 上的 β 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数 $D_{0^+}^\beta u$ 和 $D_{1^-}^\beta u$ 分别定义为

$$\begin{aligned}\left(D_{0^+}^\beta u\right)(t)&:=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m\left(I_{0^+}^{m-\beta}u\right)(t)\\&=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m\int_0^t\frac{u(s)}{(t-s)^{\beta-m+1}}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\left(D_{1^-}^\beta u\right)(t)&:=\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m\left(I_{1^-}^{m-\beta}u\right)(t)\\&=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m\int_t^1\frac{u(s)}{(s-t)^{\beta-m+1}}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $m=[\beta]+1$。

引理 1 [15] 令 $u, D_{0^+}^\beta u\in C(0,1)\cap L^1(0,1)$，则

$$I_{0^+}^\beta D_{0^+}^\beta u(t)=u(t)+c_1t^{\beta-1}+c_2t^{\beta-2}+\cdots+c_mt^{\beta-m}$$

成立，其中 $c_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,m, m=[\beta]+1, \beta\notin\mathbb{N}^+; m=\beta, \beta\in\mathbb{N}^+$。

其次，给出非线性问题对应线性问题的 Green 函数。

引理 2 [12] 设 $\rho=\Gamma(\alpha-q)-a\Gamma(\alpha-p)\int_0^\eta h(s)s^{\alpha-q-1}\mathrm{d}s\ne 0, z\in C[0,1]$，则线性分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^\alpha u(t)+z(t)=0, 0<t<1,\\u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0,\\D_{0^+}^p u(1)=a\int_0^\eta h(s)D_{0^+}^q u(s)\mathrm{d}s\end{cases}\tag{5}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)z(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,1],$$

其中

$$G(t,s)=g_1(t,s)+\frac{t^{\alpha-1}a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
g_1(t,s)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-p-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\le s\le t\le 1,\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-p-1}, & 0\le t\le s\le 1,\end{cases}\\
g_2(t,s)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-q-1}(1-s)^{\alpha-p-1}-(t-s)^{\alpha-q-1}, & 0\le s\le t\le 1,\\ t^{\alpha-q-1}(1-s)^{\alpha-p-1}, & 0\le t\le s\le 1.\end{cases}
\end{aligned} \tag{7}$$

接下来，讨论 Green 函数的性质。

引理 3 [11] 通过式(7)定义的函数 $g_1(t,s),\ g_2(t,s)$ 满足以下性质：

(i) $g_1(t,s),\ g_2(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，并且 $g_1(t,s)\ge 0,\ g_2(t,s)\ge 0$ 对所有 $t,s\in[0,1]$ 成立；

(ii) $t^{\alpha-1}g_1(1,s)\le g_1(t,s)\le g_1(1,s)$ 对所有 $t,s\in[0,1]$ 成立。

引理 4 通过式(6)定义的函数 $G(t,s)$ 满足以下性质：

(i) $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，并且 $G(t,s)\ge 0$ 对所有 $t,s\in[0,1]$ 成立；

(ii) $t^{\alpha-1}G(1,s)\le G(t,s)\le G(1,s)$ 对所有 $t,s\in[0,1]$ 成立。

证明 由 $G(t,s)$ 的定义和引理 3，(i)显然成立。

(ii) 首先，证明 $G(t,s)\le G(1,s)$，由引理 2、引理 3 得到

$$\begin{aligned}
G(1,s)-G(t,s)&=g_1(1,s)+\frac{a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau\\
&\quad-\left[g_1(t,s)+\frac{t^{\alpha-1}a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau\right]\\
&=g_1(1,s)-g_1(t,s)+\frac{\left(1-t^{\alpha-1}\right)a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau\ge 0.
\end{aligned}$$

接下来证明 $t^{\alpha-1}G(1,s)\le G(t,s)$，由引理 2、引理 3 得到

$$\begin{aligned}
G(t,s)&=g_1(t,s)+\frac{t^{\alpha-1}a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau\\
&\ge t^{\alpha-1}g_1(1,s)+\frac{t^{\alpha-1}a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau\\
&=t^{\alpha-1}\left[g_1(1,s)+\frac{a\Gamma(\alpha-p)}{\rho}\int_0^{\eta}h(\tau)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau\right]\\
&=t^{\alpha-1}G(1,s),
\end{aligned}$$

则 $t^{\alpha-1}G(1,s)\le G(t,s)\le G(1,s)$ 对所有 $t,s\in[0,1]$ 成立。 □

本节的最后，给出证明本文结果所需要的不动点定理。

引理 5 [16] 设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥，Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的有界开集，且 $\theta\in\Omega_1,\ \bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，若全连续算子 $T:P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)\to P$ 满足下述条件之一：

(1) $\|Tu\|\le\|u\|,\forall u\in P\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\ge\|u\|,\forall u\in P\cap\partial\Omega_2$；

(2) $\|Tu\|\geq\|u\|,\forall u\in P\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leq\|u\|,\forall u\in P\cap\partial\Omega_2$，

则 T 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 上至少有一个不动点。

3. 主要结果

在本节中，考虑边值问题(4)正解的存在性。下面列出文中必要的假设：

(H_3)存在 $[c,d]\subset(0,1]$，使得

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in[c,d]}\frac{f(t,u)}{u}=+\infty;$$

(H_4)存在 $[c,d]\subset(0,1]$，使得

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in[c,d]}f(t,u)=+\infty,$$

并且

$$\lim_{u\to+\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=0.$$

引理 6 设 $\omega\in C([0,1],(0,+\infty))$，则线性分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\alpha}x(t)+\lambda\omega(t)=0,0<t<1,\\ x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,\\ D_{0^+}^{p}x(1)=a\int_0^{\eta}h(s)D_{0^+}^{q}x(s)\mathrm{d}s\end{cases}\tag{8}$$

有唯一解

$$x(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)\omega(s)\mathrm{d}s,t\in[0,1],\tag{9}$$

并且

$$0\leq x(t)\leq\lambda t^{\alpha-1}H,\tag{10}$$

其中

$$H=\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{a\Gamma(\alpha-p)}{\rho\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}h(\tau)\tau^{\alpha-q-1}\mathrm{d}\tau\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s.$$

证明 令边值问题(5)的 $z(t)=\lambda\omega(t)$，则边值问题(8)有式(9)的唯一解。通过引理 4 得到

$$\begin{aligned}0\leq x(t)=&\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t\left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-p-1}-(t-s)^{\alpha-1}\right)\omega(s)\mathrm{d}s+\int_t^1t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s\right]\\&+\frac{\lambda t^{\alpha-1}a\Gamma(\alpha-p)}{\rho\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^{\eta}\left(\int_0^{\tau}h(\tau)\tau^{\alpha-q-1}(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right.\\&\left.-\int_0^{\eta}\left(\int_0^{\tau}h(\tau)(\tau-s)^{\alpha-q-1}\omega(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau+\int_0^{\eta}\left(\int_{\tau}^1h(\tau)\tau^{\alpha-q-1}(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\}\\&\leq\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s+\frac{\lambda t^{\alpha-1}a\Gamma(\alpha-p)}{\rho\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}\left(\int_0^1h(\tau)\tau^{\alpha-q-1}(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&=\lambda t^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{a\Gamma(\alpha-p)}{\rho\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}h(\tau)\tau^{\alpha-q-1}\mathrm{d}\tau\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha-p-1}\omega(s)\mathrm{d}s\\&=\lambda t^{\alpha-1}H.\end{aligned}\tag{11}$$

通过式(11)得到式(10)成立。 □

下面考虑分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}v(t)+\lambda\left(f\left(t,\left[v(t)-x(t)\right]^+\right)+\omega(t)\right)=0, \quad 0<t<1, \\ v(0)=v'(0)=\cdots=v^{(n-2)}(0)=0, \\ D_{0^+}^{p}v(1)=a\int_0^{\eta}h(s)D_{0^+}^{q}v(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\left[\varphi(t)\right]^+=\max\left\{\varphi(t),0\right\}$。

接下来将证明边值问题(12)存在一个解 v，满足 $v(t)\ge x(t), t\in[0,1]$ 和 $v(t)>x(t), t\in(0,1)$。在这种情况下，$u=v-x$ 是边值问题(4)的正解。因此，在下面的内容中，将研究边值问题(12)。

通过引理 2 可以得到边值问题(12)有一个解

$$v(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\left(f\left(s,\left[v(s)-x(s)\right]^+\right)+\omega(s)\right)\mathrm{d}s, \quad t\in[0,1].$$

考虑赋予范数 $\|v\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|v(t)|$ 的巴拿赫空间 $B=C[0,1]$，并且定义

$$P=\left\{v\in B: v(t)\ge t^{\alpha-1}\|v\|, t\in[0,1]\right\},$$

显然，P 是 B 上的一个锥。

通过 $v(t)\ge t^{\alpha-1}\|v\|$，可以保证 $v(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负，且在 $t\in(0,1)$ 时严格为正。这种选择与边值问题解的性质直接相关，确保解的正性。边值问题的解需要满足 $v(t)\ge x(t)$，而 P 的定义通过 $t^{\alpha-1}$ 的权重保证 $v(t)$ 的下界控制。通过 P 的构造，可以将问题转化为在锥上寻找不动点，从而应用不动点定理。而后文中对集合 $\Omega_i, i=1,2$ 的选择，用于控制解的范围，配合参数约束，确保 Guo-Krasnoselskii 不动点定理的条件成立。

引入算子 $T:B\to B$，定义

$$Tv(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\left(f\left(s,\left[v(s)-x(s)\right]^+\right)+\omega(s)\right)\mathrm{d}s, \quad t\in[0,1], v\in B.$$

显然，如果 v 是算子 T 的一个不动点，则 v 是边值问题(12)的一个解。

引理 7 算子 $T:P\to P$ 是全连续的。

证明 对于 $v\in P$，通过引理 4 得到对所有的 $t\in[0,1]$ 有

$$0\le Tv(t)\le\lambda\int_0^1 G(1,s)\left(f\left(s,\left[v(s)-x(s)\right]^+\right)+\omega(s)\right)\mathrm{d}s,$$

$$Tv(t)\ge\lambda t^{\alpha-1}\int_0^1 G(1,s)\left(f\left(s,\left[v(s)-x(s)\right]^+\right)+\omega(s)\right)\mathrm{d}s.$$

因此，$Tv(t)\ge t^{\alpha-1}\|Tv\|$ 对所有的 $t\in[0,1]$ 成立，可推断出 $Tv\in P$，综上，$T(P)\subset P$。

通过 Arzela-Ascoli 定理，得到 $T:P\to P$ 是全连续算子。 □

定理 1 假设(H_1)、(H_2)和(H_3)成立，则存在 $\lambda_1>0$，使得对于任意 $\lambda\in(0,\lambda_1]$，边值问题(4)至少有一个正解。

证明 定义函数 $J(t,u)=f(t,u)+\omega(t), t\in[0,1], u\in[0,+\infty)$，通过($H_2$)可得到 $J(t,u)>0$。

定义

$$\tilde{J}(k)=\sup_{t\in[0,1],u\in[0,k]} J(t,u),\ k>0.$$

通过(H$_3$)得到

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in[c,d]}\frac{J(t,u)}{u}=+\infty,$$

这表明 $J(t,u)$ 在 $u\to+\infty$ 时，满足超线性增长，结合 $\tilde{J}(k)$ 的定义，得到

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{\tilde{J}(k)}=0,$$

当 $k\to0^+$ 时，此时 $\tilde{J}(k)>0$ 且为有界量，则满足

$$\lim_{k\to0^+}\frac{k}{\tilde{J}(k)}=0,$$

由于 $J\in C([0,1]\times[0,+\infty),(0,+\infty))$，则 $\tilde{J}(k)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，进一步得到 $\frac{k}{\tilde{J}(k)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，结合以上 $k\to0^+$ 和 $k\to+\infty$ 的极限行为，可以得到存在 $\gamma_1>0$，使得

$$\frac{\gamma_1}{\tilde{J}(\gamma_1)}=\max_{k>0}\left\{\frac{k}{\tilde{J}(k)}\right\}.$$

令 $\lambda_1=\min\left\{\frac{\gamma_1}{2H},\frac{\gamma_1}{\tilde{J}(\gamma_1)\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s}\right\}$，其中 H 由式(10)表示。

接下来使用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理来证明定理 1，过程如下：

(a) 令 $\lambda\in(0,\lambda_1]$，定义 $\Omega_1=\{v\in B:\|v\|<\gamma_1\}$，则对于任意的 $v\in P\cap\partial\Omega_1, t\in[0,1]$，这里 $\|v\|=\gamma_1$，通过引理 4 和引理 6 得到

$$\begin{aligned}\gamma_1&\ge v(t)-x(t)\\&\ge t^{\alpha-1}\|v\|-\lambda t^{\alpha-1}H\\&\ge t^{\alpha-1}\|v\|-\lambda_1 t^{\alpha-1}H\\&\ge t^{\alpha-1}\gamma_1-\frac{\gamma_1}{2H}t^{\alpha-1}H\\&=\frac{t^{\alpha-1}\gamma_1}{2}\ge0,\end{aligned}$$

使得

$$J\left(t,[v(t)-x(t)]^+\right)=J(t,v(t)-x(t))\le\tilde{J}(\gamma_1),$$

并且

$$\begin{aligned}Tv(t)&=\lambda\int_0^1 G(t,s)J\left(s,[v(s)-x(s)]^+\right)\mathrm{d}s\\&\le\lambda\int_0^1 G(1,s)J(s,v(s)-x(s))\mathrm{d}s\\&\le\lambda_1\int_0^1 G(1,s)\tilde{J}(\gamma_1)\mathrm{d}s\\&=\lambda_1\tilde{J}(\gamma_1)\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\le\gamma_1,\end{aligned}$$

则

$$\|Tv\|\le\|v\|,\quad \forall v\in P\cap\partial\Omega_1.$$

(b) 通过(H_3)，得到

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in[c,d]}\frac{J(t,u)}{u}=+\infty.$$

接下来选择一个$\sigma>0$，使得

$$\sigma\lambda c^{2(\alpha-1)}\int_c^d G(1,s)\mathrm{d}s\ge 4.$$

存在一个常数$M_0>0$，当$t\in[c,d],u\ge M_0$时，使得

$$J(t,u)\ge\sigma u.$$

令$\gamma_2=\max\left\{2\gamma_1,\frac{4M_0}{c^{\alpha-1}}\right\}$，定义$\Omega_2=\{v\in B:\|v\|<\gamma_2\}$，则对于任意的$v\in P\cap\partial\Omega_2,t\in[c,d]$，这里$\|v\|=\gamma_2$，通过引理4和引理6得到

$$\begin{aligned}v(t)-x(t)&\ge t^{\alpha-1}\gamma_2-\lambda t^{\alpha-1}H\\&\ge t^{\alpha-1}\gamma_2-\lambda_1 t^{\alpha-1}H\\&\ge t^{\alpha-1}\gamma_2-t^{\alpha-1}\frac{\gamma_1}{2}\\&\ge\frac{c^{\alpha-1}}{2}(\gamma_2-\gamma_1)\\&\ge\frac{\gamma_2 c^{\alpha-1}}{4}\ge M_0,\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}Tv(t)&=\lambda\int_0^1 G(t,s)J\left(s,[v(s)-x(s)]^+\right)\mathrm{d}s\\&\ge\lambda\int_c^d G(t,s)J(s,v(s)-x(s))\mathrm{d}s\\&\ge\lambda\int_c^d G(t,s)\sigma(v(s)-x(s))\mathrm{d}s\\&\ge\lambda\int_c^d G(t,s)\sigma\frac{\gamma_2 c^{\alpha-1}}{4}\mathrm{d}s\\&\ge\lambda\sigma\frac{\gamma_2 c^{\alpha-1}}{4}\int_c^d G(t,s)\mathrm{d}s\\&\ge\lambda\sigma\frac{\gamma_2 c^{\alpha-1}}{4}\int_c^d t^{\alpha-1}G(1,s)\mathrm{d}s\\&\ge\lambda\sigma\frac{\gamma_2 c^{2(\alpha-1)}}{4}\int_c^d G(1,s)\mathrm{d}s\ge\gamma_2,\end{aligned}$$

则

$$\|Tv\| \ge \|v\|, \quad \forall v \in P \cap \partial\Omega_2.$$

综上，通过引理 5，可以推断出算子 T 有一个不动点 $v \in P \cap \left(\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$，且满足 $\gamma_1 \le \|v\| \le \gamma_2$，则

$$\begin{aligned} v(t)-x(t) &\ge t^{\alpha-1}\|v\| - \lambda t^{\alpha-1}H \\ &\ge t^{\alpha-1}\|v\| - \lambda_1 t^{\alpha-1}H \\ &\ge t^{\alpha-1}\gamma_1 - \frac{\gamma_1}{2H}t^{\alpha-1}H \\ &= \frac{t^{\alpha-1}\gamma_1}{2} \ge 0, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

令 $u(t)=v(t)-x(t), t\in[0,1]$，则 u 是边值问题(4)的一个正解。 □

定理 2 假设(H_1)、(H_2)和(H_4)成立，则存在 $\lambda_2 > 0$，使得对于任意 $\lambda \in [\lambda_2, +\infty)$，边值问题(4)至少有一个正解。

证明 对于函数 $J(t,u)$ 的定义同定理 1。接下来使用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理来证明定理 2，过程如下：

(a) 通过(H_4)，得到

$$\lim_{u\to+\infty} \inf_{t\in[c,d]} J(t,u) = +\infty.$$

存在 $L > 0$，对所有 $t \in [c,d]$，当 $u \ge L$ 时，使得

$$J(t,u) \ge \frac{2H}{c^{\alpha-1}\int_c^d G(1,s)\mathrm{d}s},$$

其中 H 由式(10)表示。

定义

$$\lambda_2 = \frac{L}{c^{\alpha-1}H}.$$

令 $\lambda \in [\lambda_2, +\infty), \gamma_1 = 2\lambda H$，定义 $\Omega_1 = \{v \in B : \|v\| < \gamma_1\}$，则对于任意的 $v \in P \cap \partial\Omega_1, t \in [c,d]$，这里 $\|v\| = \gamma_1$，通过引理 4 和引理 6 得到

$$\begin{aligned} v(t)-x(t) &\ge t^{\alpha-1}\|v\| - \lambda t^{\alpha-1}H \\ &\ge t^{\alpha-1}(\gamma_1 - \lambda H) \\ &= t^{\alpha-1}(2\lambda H - \lambda H) \\ &\ge c^{\alpha-1}\lambda H \\ &\ge c^{\alpha-1}\lambda_2 H = L > 0, \end{aligned}$$

使得

$$J\left(t,\left[v(t)-x(t)\right]^{+}\right)=J\left(t,v(t)-x(t)\right)\geq\frac{2H}{c^{\alpha-1}\int_{c}^{d}G(1,s)\mathrm{d}s},$$

并且

$$\begin{aligned}Tv(t)&=\lambda\int_{0}^{1}G(t,s)J\left(s,\left[v(s)-x(s)\right]^{+}\right)\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\int_{c}^{d}G(t,s)J\left(s,v(s)-x(s)\right)\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\int_{c}^{d}t^{\alpha-1}G(1,s)J\left(s,v(s)-x(s)\right)\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\frac{2H}{c^{\alpha-1}\int_{c}^{d}G(1,s)\mathrm{d}s}\int_{c}^{d}t^{\alpha-1}G(1,s)\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\frac{2Hc^{\alpha-1}}{c^{\alpha-1}\int_{c}^{d}G(1,s)\mathrm{d}s}\int_{c}^{d}G(1,s)\mathrm{d}s\\&=2\lambda H=\gamma_{1},\end{aligned}$$

则

$$\|Tv\|\geq\|v\|,\quad\forall v\in P\cap\partial\Omega_{1}.$$

(b) 通过(H_4)，得到

$$\lim_{u\to+\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{J(t,u)}{u}=0.$$

存在 $\varepsilon=\dfrac{1}{2\lambda\int_{0}^{1}G(1,s)\mathrm{d}s}>0,\delta>0$，对所有 $t\in[0,1]$，当 $u\geq\delta$ 时，使得

$$J(t,u)\leq\varepsilon u.$$

因此，对所有 $t\in[0,1]$，当 $u\geq0$ 时，使得

$$J(t,u)\leq M_{1}+\varepsilon u,$$

其中 $M_{1}=\max\limits_{t\in[0,1],u\in[0,\delta]}J(t,u)$。

令 $\gamma_{2}>\max\left\{\gamma_{1},2\lambda M_{1}\int_{0}^{1}G(1,s)\mathrm{d}s\right\}$，定义 $\Omega_{2}=\left\{v\in B:\|v\|<\gamma_{2}\right\}$，则对于任意的 $v\in P\cap\partial\Omega_{2},t\in[0,1]$，这里 $\|v\|=\gamma_{2}$，通过引理 4 和引理 6 得到

$$\begin{aligned}v(t)-x(t)&\geq t^{\alpha-1}\|v\|-\lambda t^{\alpha-1}H\\&\geq t^{\alpha-1}(\gamma_{2}-\lambda H)\\&\geq t^{\alpha-1}(\gamma_{1}-\lambda H)\\&=t^{\alpha-1}(2\lambda H-\lambda H)\\&=t^{\alpha-1}\lambda H\geq0,\end{aligned}$$

使得

$$J\left(t,\left[v(t)-x(t)\right]^{+}\right)=J\left(t,v(t)-x(t)\right)\le M_1+\varepsilon\left(v(t)-x(t)\right),$$

并且

$$\begin{aligned}Tv(t)&=\lambda\int_0^1 G(t,s)J\left(s,\left[v(s)-x(s)\right]^{+}\right)\mathrm{d}s\\&=\lambda\int_0^1 G(t,s)J\left(s,v(s)-x(s)\right)\mathrm{d}s\\&\le\lambda\int_0^1 G(1,s)\left[M_1+\varepsilon\left(v(s)-x(s)\right)\right]\mathrm{d}s\\&\le\lambda\int_0^1 G(1,s)\left[M_1+\varepsilon v(s)\right]\mathrm{d}s\\&\le\lambda M_1\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s+\lambda\varepsilon\gamma_2\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\\&\le\lambda M_1\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2\lambda\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s}\lambda\gamma_2\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\\&\le\frac{\gamma_2}{2}+\frac{\gamma_2}{2}=\gamma_2,\end{aligned}$$

则

$$\|Tv\|\le\|v\|,\quad\forall v\in P\cap\partial\Omega_2.$$

综上，通过引理 5，可以推断出算子 T 有一个不动点 $v\in P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$，且满足 $\gamma_1\le\|v\|\le\gamma_2$，则

$$\begin{aligned}v(t)-x(t)&\ge t^{\alpha-1}\|v\|-\lambda t^{\alpha-1}H\\&\ge t^{\alpha-1}\left(\gamma_1-\lambda H\right)\\&=t^{\alpha-1}\left(2\lambda H-\lambda H\right)\\&\ge t^{\alpha-1}\lambda H\\&\ge t^{\alpha-1}\lambda_2 H\\&=\frac{Lt^{\alpha-1}}{c^{\alpha-1}}\ge 0,\ t\in[0,1].\end{aligned}$$

令 $u(t)=v(t)-x(t),t\in[0,1]$，则 u 是边值问题(4)的一个正解。 □

4. 例子

考虑如下边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{7}{2}}u(t)+\lambda f\left(t,u(t)\right)=0,\ 0<t<1,\\u(0)=u'(0)=u''(0)=0,\\D_{0^+}^{\frac{4}{3}}u(1)=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}(s+1)D_{0^+}^{\frac{1}{2}}u(s)\mathrm{d}s.\end{cases}\tag{13}$$

因为 $n=4,\alpha=\frac{7}{2},p=\frac{4}{3},q=\frac{1}{2},a=\frac{1}{3},\eta=\frac{1}{3},h(s)=s+1,s\in[0,1]$，经过计算得到 $\rho=\Gamma(3)-\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{13}{6}\right)$ $\int_0^{\frac{1}{3}}(s+1)s^2\mathrm{d}s\approx 1.99443241$，则($H_1$)成立。

接下来得到

$$g_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\begin{cases}t^{\frac{5}{2}}(1-s)^{\frac{7}{6}}-(t-s)^{\frac{5}{2}}, & 0\le s\le t\le 1,\\ t^{\frac{5}{2}}(1-s)^{\frac{7}{6}}, & 0\le t\le s\le 1,\end{cases}$$

$$g_2(t,s)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\begin{cases}t^{2}(1-s)^{\frac{7}{6}}-(t-s)^{2}, & 0\le s\le t\le 1,\\ t^{2}(1-s)^{\frac{7}{6}}, & 0\le t\le s\le 1,\end{cases}$$

进一步可以得到

$$G(t,s)=g_1(t,s)+\frac{t^{\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{13}{6}\right)}{3\rho}\int_0^{\frac{1}{3}}(\tau+1)g_2(\tau,s)\mathrm{d}\tau$$

对所有的$t,s\in[0,1]$成立。

例 1 考虑函数

$$f(t,u)=u^2+\mathrm{e}^{-\sin t}-(t+1)^{\frac{1}{2}},t\in[0,1],u\ge 0,$$

并且$\omega(t)=(t+1)^{\frac{1}{2}}$，则($H_2$)成立。

令$c=\frac{1}{3},d=\frac{1}{2}$，接下来得到函数

$$J(t,u)=f(t,u)+\omega(t)=u^2+\mathrm{e}^{-\sin t},t\in[0,1],u\ge 0,$$

可以得到

$$\tilde{J}(k)=\sup_{t\in[0,1],u\in[0,k]}J(t,u)=k^2+1,$$

并且

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{\tilde{J}(k)}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{k^2+1}=0,$$

$$\lim_{k\to 0^+}\frac{k}{\tilde{J}(k)}=\lim_{k\to 0^+}\frac{k}{k^2+1}=0,$$

得到$\gamma_1=1$，$\tilde{J}(\gamma_1)=2$，$H\approx 0.15917008$，$\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\approx 0.05395837$，$\frac{\gamma_1}{2H}\approx 3.14129389$，$\frac{\gamma_1}{\tilde{J}(\gamma_1)\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s}\approx 9.26640297$，$\lambda_1\approx 3.14129389$，经验证($H_3$)成立。

综上，存在$\lambda_1>0$，使得对于任意$\lambda\in(0,\lambda_1]$，边值问题(13)至少有一个正解。

例 2 考虑函数

$$f(t,u)=u^{\frac{1}{2}}+\mathrm{e}^{-t}-\cos t,t\in[0,1],u\ge 0,$$

并且$\omega(t)=\cos t$，则(H_2)成立。

令 $c=\frac{1}{3}, d=1$，接下来得到函数

$$J(t,u)=f(t,u)+\omega(t)=u^{\frac{1}{2}}+\mathrm{e}^{-t},\ t\in[0,1],\ u\geq 0,$$

得到 $H\approx 0.12903597$，$\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\approx 0.05395837$，$\int_c^d G(1,s)\mathrm{d}s\approx 0.03689130$，$\frac{2H}{c^{\alpha-1}\int_c^d G(1,s)\mathrm{d}s}\approx 109.04856724$，$\lambda_2\approx 1.42\times 10^6$，$\gamma_1\approx 3.67\times 10^5$，经验证$(H_4)$成立。

综上，存在 $\lambda_2>0$，使得对于任意 $\lambda\in[\lambda_2,+\infty)$，边值问题(13)至少有一个正解。

5. 总结

本文主要基于 Guo-Krasnoselskii 不动点定理研究了一类边值问题正解的存在性。与已有文献相比，本研究在以下几个方面进行了拓展和创新：首先，文献[12]研究了边值问题(2)解的唯一性，而本文则探讨了更一般的非局部边值问题(4)正解的存在性；其次，文献[11]获得了 m 点边值问题(1)正解的存在性结果，本文则进一步研究了具有积分边界条件的边值问题(4)。通过将局部问题(3)转化为非局部问题(4)进行研究，使得本文的模型具有更广泛的适用性。

然而，本研究也存在一定的局限性：在研究方法上，仅采用了一种不动点定理，使得研究方法体系相对单一。未来研究可以考虑综合运用多种不动点定理或结合最新发展的非线性分析方法，以进一步丰富和完善相关理论结果。

参考文献

[1] Sheng, H., Chen, Y. and Qiu, T. (2011) Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing: Techniques and Applications. Springer Science & Business Media.

[2] Magin, R.L. (2004) Fractional Calculus in Bioengineering, Part 1. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, **32**, 1-104. https://doi.org/10.1615/critrevbiomedeng.v32.i1.10

[3] Alaimo, G. and Zingales, M. (2015) Laminar Flow through Fractal Porous Materials: The Fractional-Order Transport Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **22**, 889-902. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.10.005

[4] Liu, Y., Zhao, X. and Pang, H. (2019) Positive Solutions to a Coupled Fractional Differential System with p-Laplacian Operator. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2019**, Article ID 3543670. https://doi.org/10.1155/2019/3543670

[5] Li, M., Sun, J. and Zhao, Y. (2020) Existence of Positive Solution for BVP of Nonlinear Fractional Differential Equation with Integral Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 177. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02618-9

[6] Zhang, S. (2008) Existence Results of Positive Solutions to Boundary Value Problem for Fractional Differential Equation. *Positivity*, **13**, 583-599. https://doi.org/10.1007/s11117-008-2260-5

[7] Li, C.F., Luo, X.N. and Zhou, Y. (2010) Existence of Positive Solutions of the Boundary Value Problem for Nonlinear Fractional Differential Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 1363-1375. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.029

[8] Agarwal, R.P., Hong, H. and Yeh, C. (1998) The Existence of Positive Solutions for the Sturm-Liouville Boundary Value Problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **35**, 89-96. https://doi.org/10.1016/s0898-1221(98)00060-1

[9] Li, G., Liu, X. and Jia, M. (2009) Positive Solutions to a Type of Nonlinear Three-Point Boundary Value Problem with Sign Changing Nonlinearities. *Computers & Mathematics with Applications*, **57**, 348-355. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.10.093

[10] Wang, Y., Liu, L. and Wu, Y. (2011) Positive Solutions for a Class of Fractional Boundary Value Problem with Changing Sign Nonlinearity. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 6434-6441. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.026

[11] Henderson, J. and Luca, R. (2017) Existence of Positive Solutions for a Singular Fractional Boundary Value Problem. *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **22**, 99-114. https://doi.org/10.15388/na.2017.1.7

[12] Zhang, X. and Zhong, Q. (2017) Uniqueness of Solution for Higher-Order Fractional Differential Equations with Conjugate Type Integral Conditions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **20**, 1471-1484. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0077

[13] Zhang, L., Liu, X., Yu, Z. and Jia, M. (2023) The Existence of Positive Solutions for High Order Fractional Differential Equations with Sign Changing Nonlinearity and Parameters. *AIMS Mathematics*, **8**, 25990-26006. https://doi.org/10.3934/math.20231324

[14] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science B.V.

[15] Bai, Z. and Lü, H. (2005) Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**, 495-505. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.02.052

[16] Krasnoselskii, M.A. (1964) Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon Press.