Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 412-416
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145271

Hans汉斯

基于半*E*-凸集值映优化问题的Kuhn-Tucker型最优性条件

邹东易

重庆电力高等专科学校人文素质学院，重庆

收稿日期：2025年4月26日；录用日期：2025年5月19日；发布日期：2025年5月30日

摘　要

集值优化是优化理论中的一个重要课题，在经济、管理等领域有着广泛的应用。本文在集值映射的半*E*-凸性假设下，利用择一定理，建立了集值优化问题的Kuhn-Tucker型最优性充分和必要条件。本文获得的结果推广了文献中的一些已知结果。

关键词

E-凸集，半*E*-凸集值映射，弱有效解，最优性条件

Kuhn-Tucker Type Optimality Conditions Based on Semi-*E*-Convex Set-Valued Map Optimization Problem

Dongyi Zou

School of Humanistic Qualities, Chongqing Electric Power College, Chongqing

Received: Apr. 26th, 2025; accepted: May 19th, 2025; published: May 30th, 2025

Abstract

The set-valued optimization, which is widely applied in fields such as economics and management, is an important topic in optimization theory. In this paper, we will establish Kuhn-Tucker type optimality sufficient and necessary conditions for set-valued optimization problems under the assumption of semi-*E*-convexity of the set-valued map by using the alternative theorem. The results obtained in this paper extend some known results in the literature.

文章引用：邹东易．基于半 *E*-凸集值映优化问题的 Kuhn-Tucker 型最优性条件[J]．应用数学进展, 2025, 14(5): 412-416.
DOI: 10.12677/aam.2025.145271

Keywords

***E*-Convex Set, Semi-*E*-Convex Set-Valued Maps, Weakly Efficient Solution, Optimality Conditions**

1. 引言

集值映射的广义凸性在研究集值优化问题的理论和设计集值优化问题解的算法中扮演着十分重要的角色。1999 年，Youness [1]在有限维空间中用映射 $E: X \to X$ 引进了 E-凸集和 E-凸函数。当映射是一个恒等映射时，E-凸集和 E-凸函数就分别退化成凸集和凸函数。2002 年，Chen [2]引进了半 E-凸函数，给出了它的一些性质。2018 年，Zhou 等[3]在局部凸空间中半 E-凸集值映射，研究了集值优化问题弱有效解存在的充分条件。更多关于 E-凸及相关研究结果可见文献[4]-[6]及里面的参考文献。本文将在集值映射半 E-凸性假设下，利用择一性定理，在线性空间中集值优化问题弱有效性意义下，建立集值优化问题 Kuhn-Tucker 型最优性充分和必要条件。本文的主要结构如下，在第二节，我们给出了预备知识，包括一些基本概念和引理。在第三节，在集值映射半 E-凸性假设下，我们建立了 Kuhn-Tucker 型最优性条件。

2. 预备知识

设 X 是线性空间，Y 和 Z 是两个实线性空间。设 A 和 C 分别是 X 和 Y 中的非空集合。0 代表每个线性空间中的零元。C 生成的锥定义为 $coneC := \{\lambda c | \lambda c \in C, \lambda \geq 0, c \in C\}$。$C$ 为凸锥当且仅当

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in K, \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \forall c_1, c_2 \in K.$$

C 为点锥当且仅当 $C \cap (-C) = \{0\}$。C 称为非平凡的当且仅当 $C \neq \{0\}$，且 $C \neq Y$。

Y 和 Z 的代数对偶分别表示为 Y^* 和 Z^*。设 C 和 D 分别是在 Y 和 Z 中的非平凡，点凸锥，且 $corC \neq \varnothing$ 和 $corD \neq \varnothing$。C 的代数对偶锥 C^+ 定义为：

$$C^+ := \{y^* \in Y^* | \langle y, y^* \rangle \geq 0, \forall y \in C\}.$$

C 的严格代数对偶锥 C^{+i} 定义为：

$$C^{+i} := \{y^* \in Y^* | \langle y, y^* \rangle > 0, \forall y \in corC\}.$$

其中，$\langle y, y^* \rangle$ 表示点 y 处线性泛函 y^* 的值。D^+ 与 C^+ 的含义类似。

定义 2.1 [7] 设 M 是 Y 上的非空集合。M 的代数内部是集合 $corM := \{m \in M | \forall h \in Y, \exists \epsilon > 0, \forall \lambda \in [0, \epsilon], m + \lambda h \in M\}$。

定义 2.2 [1] 设 K 是 X 上的非空集合。称 K 是 X 上的 E-凸集当且仅当存在向量映射 $E: X \to X$，使得

$$\lambda E(x) + (1-\lambda) E(y) \in K, \forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1].$$

定义 2.3 [3] 设 A 是 X 上的非空集合。集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 在 A 上是半 E-C-凸的当且仅当存在向量映射 $E: X \to X$，且 A 是 X 上的 E-凸集，使得

$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)\subseteq F(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))+C,\forall x,y\in A,\forall\lambda\in[0,1].$$

引理 2.1 [8] 设 $corC\neq\varnothing$，设 A 是 X 上的 E-凸集。若集值映射 $F:X\rightrightarrows Y$ 在 A 上是半 E-C-凸的，那么当且仅当满足下列条件只有一个成立：

1) 存在 $x\in A$，使得 $F(x)\cap(-corC)\neq\varnothing$；

2) 存在 $y^*\in C^+\setminus\{0\}$，使得

$$\langle y,y^*\rangle\geq 0,\forall y\in F(A).$$

3. Kuhn-Tucker 型最优性条件

设 $F:X\rightrightarrows Y$ 和 $G:X\rightrightarrows Z$ 是两个从 X 分别映射到 Y 和 Z 的集值映射。现在我们考虑具有约束条件的最小化集值优化问题：

$$\text{(VP)}\quad \min F(x)\quad \text{s.t.}\quad x\in K:=\{x\in A|G(x)\cap(-D)\neq\varnothing\}$$

定义 3.1 [9] 设 $x_0\in K$，$y_0\in F(x_0)$，(x_0,y_0) 是(VP)的弱有效解当且仅当 $(F(K)-y_0)\cap(-corC)=\varnothing$。

定理 3.1 设 K 是 X 上的 E-凸集。假设下列条件成立：

1) (x_0,y_0) 是(VP)的弱有效解；

2) 集值映射 (F,G) 在 K 上是半 E-C-凸的。

则存在 $(y^*,z^*)\in(C^+\times D^+)\setminus\{(0,0)\}$，使得

$$\inf_{x\in K}(\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle)=\langle y_0,y^*\rangle, \tag{1}$$

且

$$\inf_{x\in K}\langle G(x_0),z^*\rangle=0. \tag{2}$$

证明 通过条件 1)，我们知道

$$(F(M)-y_0)\cap(-corC)=\varnothing \tag{3}$$

显然，我们有

$$(F(x)-y_0)\times G(x)=F(x)\times G(x)-(y_0,0),\forall x\in K \tag{4}$$

从(4)式和条件 2)可知 $(F-y_0,G)$ 在 K 上是半 E-C-凸的。根据(3)式，我们易证

$$((F(x)-y_0)\times G(x))\cap cor(C\times D)=\varnothing,\forall x\in K$$

由引理 2.1 可知，存在 $(y^*,z^*)\in(C^+\times D^+)\setminus\{(0,0)\}$，使得

$$\langle F(x),y^*\rangle+\langle G(x),z^*\rangle\geq\langle y_0,y^*\rangle,\forall x\in K \tag{5}$$

因为 $x_0\in K$，存在 $p\in G(x_0)$，使得 $p\in -D$。因此

$$\langle p,z^*\rangle\leq 0 \tag{6}$$

让(5)式中的 $x=x_0$，我们得到

$$\langle y_0,y^*\rangle+\langle p,z^*\rangle\geq\langle y_0,y^*\rangle,$$

即

$$\langle p,z^*\rangle\geq 0 \tag{7}$$

由(6)式和(7)式，我们有

$$\left\langle p,z^{*}\right\rangle =0 \tag{8}$$

通过(8)式，我们得到

$$\left\langle y_{0},y^{*}\right\rangle \in\left\langle F\left(x_{0}\right),y^{*}\right\rangle +\left\langle G\left(x_{0}\right),z^{*}\right\rangle \tag{9}$$

由(5)式和(9)式可知(1)式成立。

我们再次让(5)式中的 $x=x_{0}$，可以得到

$$\left\langle y_{0},y^{*}\right\rangle +\left\langle G\left(x_{0}\right),z^{*}\right\rangle \geq\left\langle y_{0},y^{*}\right\rangle$$

从而，

$$\left\langle G\left(x_{0}\right),z^{*}\right\rangle \geq0 \tag{10}$$

由(8)式和(10)式可知(2)式成立。

注 3.1 在定理 3.1 中，当附加条件存在 $x_{0}\in M$ 使得 $G\left(x'\right)\cap\left(-corC\right)\neq\varnothing$ 成立，那么结论中 $\left(y^{*},z^{*}\right)\in\left(C^{+}\times D^{+}\right)\backslash\left\{\left(0,0\right)\right\}$ 可以替换为 $\left(y^{*},z^{*}\right)\in\left(C^{+}\backslash\left\{0\right\}\right)\times D^{+}$。若向量映射 $E:K\to K$ 是恒等映射，则定理 3.1 退化为文献[9]中的推理 3.2。

定理 3.2 设 $x_{0}\in K,y_{0}\in F\left(x_{0}\right)$。假设下列条件成立：

1) 存在向量映射 $E:K\to K$，使得

$$F\left(x\right)\subseteq F\left(E\left(x\right)\right)+C,\forall x\in K\,, \tag{11}$$

且

$$G\left(x\right)\subseteq G\left(E\left(x\right)\right)+D,\forall x\in K\,; \tag{12}$$

2) 存在 $\left(y^{*},z^{*}\right)\in C^{+}\times D^{+}$，使得

$$\inf_{x\in K}\left(\left\langle F\left(x\right),y^{*}\right\rangle +\left\langle G\left(x\right),z^{*}\right\rangle \right)\geq\left\langle y_{0},y^{*}\right\rangle ; \tag{13}$$

3) 存在 $x'\in K$，使得 $G\left(x'\right)\cap\left(-corC\right)\neq\varnothing$。

则 $\left(x_{0},y_{0}\right)$ 是(VP)的弱有效解。

证明 通过(13)式，我们知道

$$\left\langle F\left(E\left(x\right)\right),y^{*}\right\rangle +\left\langle G\left(E\left(x\right)\right),z^{*}\right\rangle \geq\left\langle y_{0},y^{*}\right\rangle ,\forall x\in K\,. \tag{14}$$

假设 $\left(x_{0},y_{0}\right)$ 不是(VP)的弱有效解。那么有

$$\left(F\left(M\right)-y_{0}\right)\cap\left(-corC\right)=\varnothing\,. \tag{15}$$

由(15)式可知存在 $\overline{x},\overline{y}\in F\left(\overline{x}\right),\overline{z}\in G\left(\overline{x}\right)$，使得

$$\overline{y}-y_{0}\in-corC\,. \tag{16}$$

且

$$\overline{z}\in-D\,. \tag{17}$$

从(11)式和(12)式可知存在 $\hat{y}\in F\left(E\left(\overline{x}\right)\right),c\in C,\hat{z}\in G\left(E\left(\overline{x}\right)\right),d\in D$，使得

$$\overline{y}=\hat{y}+c\,, \tag{18}$$

且

$$\bar{z} = \hat{z} + d\ . \tag{19}$$

由于(18)式和(19)式，我们有

$$\left\langle \hat{y} - y_0, y^* \right\rangle + \left\langle \hat{z}, z^* \right\rangle = \left\langle \bar{y} - c - y_0, y^* \right\rangle + \left\langle \bar{z} - d, z^* \right\rangle . \tag{20}$$

通过(16)式和(17)式，我们得到

$$\bar{y} - c - y_0 \in -corC\ , \tag{21}$$

且

$$\bar{z} - d \in -D\ . \tag{22}$$

另一方面，很容易看出 $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$，因此条件 2)和条件 3)成立。然而，我们从(20)式、(21)式和(22)式可得

$$\left\langle \hat{y} - y_0, y^* \right\rangle + \left\langle \hat{z}, z^* \right\rangle < 0\ ,$$

即

$$\left\langle \hat{y}, y^* \right\rangle + \left\langle \hat{z}, z^* \right\rangle < \left\langle y_0, z^* \right\rangle ,$$

这与(13)式形成矛盾。因此，(x_0, y_0) 是(VP)的弱有效解。

注 3.2 若向量映射 $E: K \to K$ 是恒等映射，则定理 3.2 退化为文献[9]中的定理 3.3。

基金项目

国家自然科学基金(12171061)。

参考文献

[1] Youness, E.A. (1999) E-Convex Sets, E-Convex Functions, and E-Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **102**, 439-450. https://doi.org/10.1023/a:1021792726715

[2] Chen, X. (2002) Some Properties of Semi-E-Convex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**, 251-262. https://doi.org/10.1016/s0022-247x(02)00325-6

[3] Zhou, Z., Yang, X. and Wan, X. (2017) The Semi-E Cone Convex Set-Valued Map and Its Applications. *Optimization Letters*, **12**, 1329-1337. https://doi.org/10.1007/s11590-017-1169-y

[4] Megahed, A.E.A., Gomma, H.G., Youness, E.A. and El-Banna, A.H. (2013) Optimality Conditions of E-Convex Programming for an E-Differentiable Function. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**, Article No. 246. https://doi.org/10.1186/1029-242x-2013-246

[5] Antczak, T. and Abdulaleem, N. (2019) E-Optimality Conditions and Wolfe E-Duality for E-Differentiable Vector Optimization Problems with Inequality and Equality Constraints. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **12**, 745-764. https://doi.org/10.22436/jnsa.012.11.06

[6] Abdulaleem, N. (2022) *V-E*-Invexity in *E*-Differentiable Multiobjective Programming. *Numerical Algebra, Control & Optimization*, **12**, 427-443. https://doi.org/10.3934/naco.2021014

[7] Jahn, J. (2011) Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. 2nd Edition, Springer.

[8] 邹东易. 线性空间中半 E-凸集值优化问题的最优性条件[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆理工大学, 2023.

[9] Li, Z. (1999) The Optimality Conditions for Vector Optimization of Set-Valued Maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **237**, 413-424. https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6426