Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(6), 88-93
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146303

Hans汉斯

基于一题多解的数学分析思维拓展路径研究

——以第二型曲面积分的计算为例

张玉芳，唐美燕，吴小莉

桂林学院信息工程学院，广西 桂林

收稿日期：2025年5月17日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月18日

摘 要

本文采用案例分析法，给出了一道经典第二型曲面积分的多种解法(如直接投影法、二化一法(合项法)、归一法、高斯公式法、参数方程法、轮换对称性法、物理意义法等)，并构建了第二型曲面积分计算方法的决策树，给出了一题多解的教学启示。

关键词

一题多解，数学分析，思维拓展，第二型曲面积分

Research on the Path of Expanding Mathematical Analysis Thinking Based on Multiple Solutions to a Single Problem

—Taking the Calculation of the Second-Type Surface Integral as an Example

Yufang Zhang, Meiyan Tang, Xiaoli Wu

College of Information Engineering, Guilin University, Guilin Guangxi

Received: May 17th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 18th, 2025

Abstract

This paper employs the case analysis method to present multiple approaches to solving a classic

文章引用: 张玉芳, 唐美燕, 吴小莉. 基于一题多解的数学分析思维拓展路径研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 88-93. DOI: 10.12677/aam.2025.146303

second-type surface integral (such as the direct projection method, the "two-to-one" method, the normalization method, the Gauss formula method, the parametric equation method, the rotational symmetry method, and the physical interpretation method). Based on these, a decision tree for calculating second-type surface integrals is constructed, along with pedagogical insights into the multi-solution approach to problem-solving.

Keywords

Multiple Solutions to a Single Problem, Mathematical Analysis, Thinking Expansion, Second-Type Surface Integral

1. 引言

在数学分析课程中，第二型曲面积分(也称对坐标的曲面积分)是研究向量场通过曲面通量的重要工具，广泛应用于物理学(如流体力学、电磁学)和工程学(如热传导、结构力学)等领域。研究第二型曲面积分的一题多解问题，不仅可以揭示不同计算方法(如直接投影法、二化一法(合项法)、归一法、高斯公式法、参数方程法、轮换对称性法、物理意义法等)之间的内在联系，深化对相关理论知识的理解；还能帮助学习者突破思维定式，优化解题策略。本文选择第二型曲面积分为研究对象，通过典型例题展示其不同解法，比较各计算方法的适用性评估。研究意义在于为数学分析的教学提供案例参考，同时促进学习者发散性思维与综合分析能力的提升。

2. 多解方法与思维路径分析

第二型曲面积分通常表示为 $\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为有向光滑曲面，P,Q,R 为定义在 S 上的连续函数。第二型曲面积分的计算通常转化为二重积分来计算。

例[1] 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $S:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧。

解法一　直接投影法——将曲面 S 分别投影至 xy、zx、yz 平面，分项计算

因为 $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，又 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le2\pi,0\le r\le a$，则 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=-\pi\cdot\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2\pi}{3}a^3$；

为了计算 $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，先将 $S:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，分成 2 个曲面片 S_1,S_2，其中 $S_1:x=\sqrt{a^2-y^2-z^2},z\ge0$，取前侧；$S_2:x=-\sqrt{a^2-y^2-z^2},z\ge0$，取后侧。

根据积分曲面片的可加性，$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{S_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，而 $\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}:y^2+z^2\le a^2,z\ge0}\sqrt{a^2-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

令 $\begin{cases}y=r\cos\theta\\z=r\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le\pi,0\le r\le a$，则 $\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}a^3$；同理 $\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi a^3}{3}$；

同理 $\iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi a^3}{3}$，所以 $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot\dfrac{2\pi}{3}a^3=2\pi a^3$。

评注 直接投影法计算第二型曲面积分，要向三个坐标面做投影，计算三个二重积分，计算量繁琐。

解法二 将第二型曲面积分化为第一型曲面积分(二化一法、合项法)

因为光滑曲面 $S:z=z(x,y)$，取上侧，则

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

所以

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\left(x\cdot\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}+y\cdot\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}+z\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)\mathrm{d}S$$

又 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，且 $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

$$\begin{aligned}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le a^2}\left(x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a^2\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le a$，则 $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\dfrac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi a^3$。

评注 “二化一法”通过方向余弦将第二型曲面积分的计算问题转化为第一型曲面积分的计算，统一了分量计算，适用于任何可定向曲面。但其计算效率较低，需显式求法向量和面积微元，且对定向敏感度高，易引发符号错误。适合简单曲面的情形，对分片复杂曲面或对称性问题不具优势[2]。

解法三 向同一个坐标面做投影法(归一法)

因为曲面 $S:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，且 $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，所以

$$\begin{aligned}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_{xy}}\left[x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le a$，则

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi a^3.$$

评注 “归一法”通过统一投影至单一坐标面可简化计算，避免分片投影的复杂性，适用于显式曲面。但对非单值曲面适应性有限。

解法四 利用高斯公式将第二型曲面积分化为三重积分法

设 S_1 为上半球面的底面，$S_1:z=0,x^2+y^2\le a^2$，取下侧，则 $\iint_{S_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ (因为 S_1 在

yoz, zox 面上的投影等于 0，而在 xoy 面上 $z=0$）。所以

$$\iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdz} + z\mathrm{dxdy} = \oiint_{S+S_1} \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy} - \iint_{S_1} \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdz} + z\mathrm{dxdy}$$
$$= \oiint_{S+S_1} \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy}$$

令 $P(x,y,z)=x, Q(x,y,z)=y, R(x,y,z)=z$，则 P,Q,R 在有向曲面 S,S_1 所围成的半球域 V 上，满足高斯公式的条件，所以

$$\iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdz} + z\mathrm{dxdy} = \oiint_{S+S_1} \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy} = \iiint_V [1+1+1]\mathrm{dxdydz} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3 \text{。}$$

评注　“高斯公式法”将封闭曲面上的第二型曲面积分的计算转化为三重积分的计算，其优势在于计算高效、避免复杂投影，但严格依赖封闭曲面条件，对非封闭曲面需人工补面，且要求被积函数在有界闭域内连续可微。

解法五　曲面的参数方程法——特殊曲面(如：球面、椭球面、圆柱面等)上的曲面积分计算，可以考虑用曲面的参数方程法。

令 $S:\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = a^2\sin^2\varphi\cos\theta$，则

$$\iint_S \mathrm{x dydz} = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin\varphi\cos\theta\cdot a^2\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi - \int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin\varphi\cos\theta\cdot a^2\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3;$$

同理，$\iint_S y\mathrm{dzdx} = \iint_S z\mathrm{dxdy} = \dfrac{2\pi a^3}{3}$，所以 $\iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy} = 3\cdot\dfrac{2}{3}\pi a^3 = 2\pi a^3$。

评注　“参数方程法”通过曲面的显式参数化直接计算第二型曲面积分，其优势在于统一处理法向量与面积微元，避免投影法的分片复杂性，且定向判断直观。但参数化过程依赖曲面几何特性，对非标准或复杂曲面适应性较差，计算量可能随参数复杂度增加。

解法六　利用轮换对称性——对有特殊结构的积分，可以考虑轮换对称性。

因为 x, y 是对称的，所以 $\iint_S \mathrm{x dydz} = \iint_S y\mathrm{dzdx}$。因此 $\iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy} = 2\iint_S \mathrm{x dydz} + \iint_S z\mathrm{dxdy}$。再利用解法一或解法五计算出 $\iint_S \mathrm{x dydz} = \iint_S z\mathrm{dxdy} = \dfrac{2}{3}\pi a^3$，所以 $\iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy} = 2\pi a^3$。

评注　轮换对称性通过变量轮换简化特定对称结构的第二型曲面积分计算，适用于被积函数和曲面具有高度对称性的情形。此法可减少重复计算，提升解题效率，但须严格验证对称条件，且对非对称问题失效。

解法七　利用第二型曲面积分的物理意义计算——向量场通过曲面的通量。

因为曲面 $S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 是上半球面，则其上侧对应的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{y}{a},\dfrac{z}{a}\right)$。且 $\boldsymbol{F}=(x,y,z)$ 径向向量场，则 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a}=a$，且 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy}$ 表示向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 S 磁场的通量。所以

$$\Phi = \iint_S \mathrm{x dydz} + y\mathrm{dzdx} + z\mathrm{dxdy} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_S a\mathrm{d}S = a\times\text{上半球面的面积} = 2\pi a^3.$$

评注　利用第二型曲面积分的物理意义计算第二型曲面积分适用于具有明确物理背景的问题。其优

势在于直观性强，但需准确理解场与曲面几何的相互作用。该方法体现了数学与物理的交叉融合，是理论应用结合的典范。

小结：高斯公式是求解第二型曲面积分的“最优路径”，但其他解法训练价值不可替代，对称性分析是简化计算的关键思维。

3. 思维路径模式与教学启示

3.1. 思维路径模式的构建

第二型曲面积分的计算问题是数学分析课程中的重难点问题，其关键在于将第二型曲面积分的计算转化为投影域或参数域上的二重积分计算、或空间区域上的三重积分计算。通过一题多解的实践，构建如图 1 的思维路径模型。

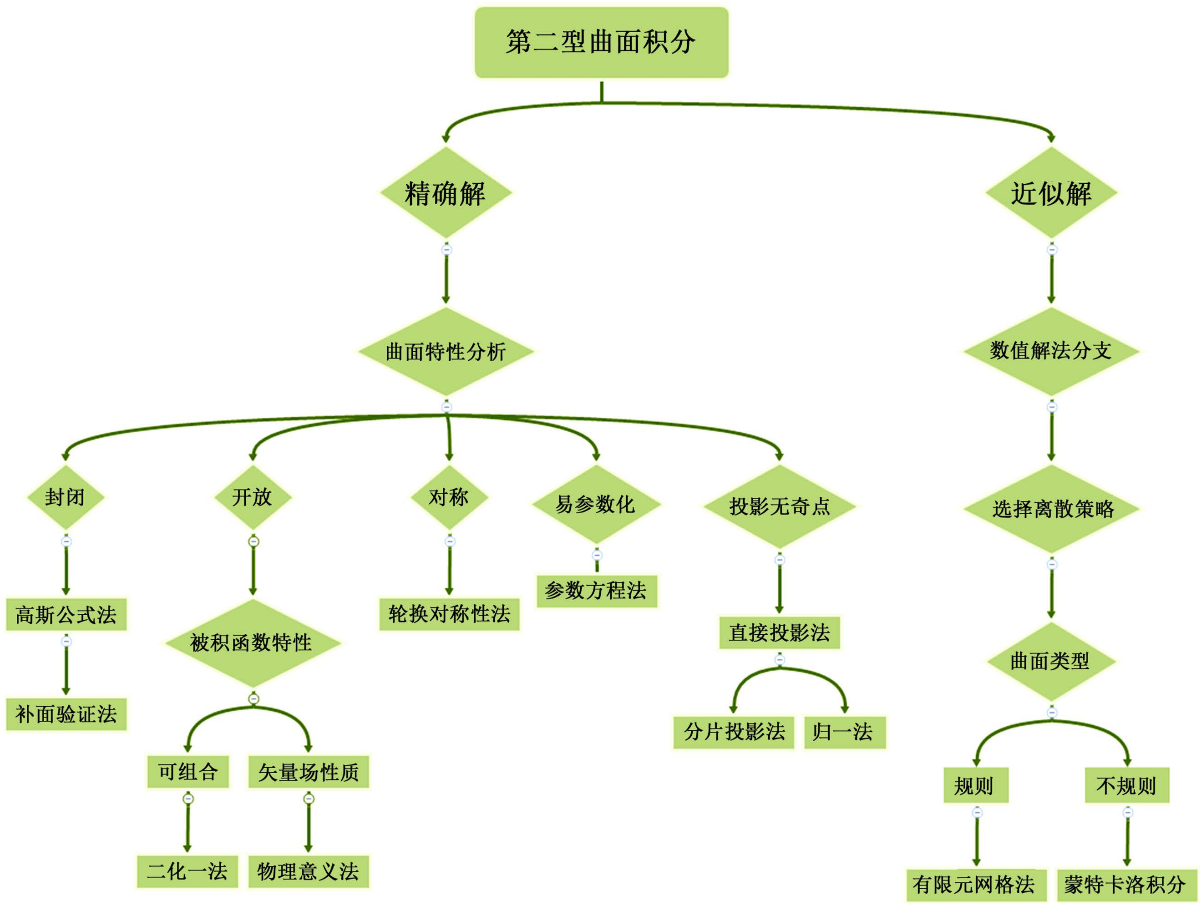

Figure 1. Decision tree for type 2 surface integral calculation method
图 1. 第二型曲面积分计算方法决策树

3.2. 教学启示

一题多解不仅能巩固知识，还能提升问题解决能力，教学中应注重方法比较与思维训练[3]。使得数学分析课程的培养目标应从“计算熟练度”转向“思维可塑性”。(1) 强化多维度知识联结，培养整体性思维：第二型曲面积分作为数学分析的终极积分，其计算方法灵活多样。在教学实践中，教师应引导学生建立“第二型曲面积分计算的方法决策树”，在课堂中穿插“错解辨析”环节，培养学生的辩证思维

能力；(2) 渗透数学思想方法，提升解题灵活性：一题多解的关键在于数学知识、数学方法、数学思想的融会贯通。在教学实践中，可以布置“解法迁移”作业，要求学生一题多解，并比较效率；(3) 构建分层教学体系，适配学生认知差异：不同解法对学生的数学能力要求不同(如直接投影法需较强几何直观，而高斯公式更依赖代数运算能力)，在教学实践中，建立设置基础层、提高层、拓展层适配不同层次的学生；(4) 融入信息技术工具，辅助几何直观：曲面积分的难点源于空间结构的抽象性，动态可视化可帮助学生理解曲面定向、法向量变化等核心概念。在教学实践中，可设计“交互式投影实验”；(5) 优化评价机制，鼓励创新思维：传统评价方法侧重结果的准确性，而一题多解更关注思维过程的合理性。在教学实践中，可考虑“思维导图 + 口头答辩”的考核方式，要求学生阐述不同解法的逻辑链；(6) 跨学科问题驱动，凸显应用价值：通过利用第二型曲面积分的物理意义计算第二型曲面积分，增强学生的学习动机。在教学实践中，设计“电场通量计算”案例，将数学工具与物理定律结合讲解。总之，一题多解不仅是技巧训练，更是数学思维的锤炼。教师需通过方法对比、错解辨析及跨领域联系，帮助学生构建灵活而扎实的知识体系。

基金项目

桂林学院 2023 年校级课程思政专项教改项目：《数学分析》课程思政元素的挖掘与实践；

2024 年广西高等教育本科教学改革项目：数学分析内容与思政元素的有机结合及创新教学方法(2024JGB456)；

2024 年度广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(自然科学类)：《对角有序幻方的存在性及组合构造》(2024KY1678)。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(第五版(下册)) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 陈丹丹. 简化积分计算的一类方法[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2018, 34(8): 14-16.

[3] 杨雯靖. 第二类曲面积分的计算方法探讨[J]. 数学学习与研究, 2015(17): 93-94.