

基于实践波利亚解题表的教学案例研究 ——以2023年上海数学中考题为例

晋霞瑞^{1*}, 顾海波^{1#}, 陈奕如²

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆乌鲁木齐市第一中学, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年5月19日; 录用日期: 2025年6月11日; 发布日期: 2025年6月19日

摘 要

随着《义务教育数学课程标准(2022年版)》发布, 上海中考试卷也随之发生改变。中考数学试卷更加注重对于学生思维能力的考查, 其中25题区分度很高, 成为广大师生研究的重点题型。鉴于此, 本文基于波利亚的解题思想, 以2023年上海市中考数学题25题为例, 探讨教师在课堂教学中如何帮助学生提升思维能力, 找到问题切入点及解题方法。

关键词

波利亚解题思想, 中考数学, 解题教学

A Teaching Case Study Based on Polya's Problem-Solving Table in Practice

—Taking the 2023 Shanghai Mathematics High School Entrance Examination Questions as an Example

Xiarui Jin^{1*}, Haibo Gu^{1#}, Yiru Chen²

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²Urumqi No. 1 Senior High School, Urumqi Xinjiang

Received: May 19th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

With the release of the “Compulsory Education Mathematics Curriculum Standards (2022 Edition)”,

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 晋霞瑞, 顾海波, 陈奕如. 基于实践波利亚解题表的教学案例研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 213-221.
DOI: 10.12677/aam.2025.146313

the Shanghai middle school entrance examination papers have also undergone changes. The mathematics papers of the middle school entrance examination now place greater emphasis on the assessment of students' thinking abilities, among which question 25 has a high degree of discrimination and has become a key type of question for both teachers and students to study. In light of this, this article, based on Polya's problem-solving ideas, takes question 25 of the 2023 Shanghai middle school entrance examination mathematics paper as an example, explores how teachers can help students enhance their thinking abilities in classroom teaching, find the entry point of the problem, and discover the solution methods.

Keywords

Polya's Problem-Solving Theory, Mathematics in the High School Entrance Examination, Problem-Solving Instruction

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》明确了义务教育阶段的核心素养,初中阶段的主要表现是:抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识、创新意识[1]。上海市中考数学命题注重对学生分析问题、解决问题能力的考查[2]。其中对于学生数学思维能力要求越来越高,而解题是培养数学思维能力的主要途径,学生需在理解题意的基础上灵活应用所学知识进行思考和解答。在学生日常学习中,学生对于课本基础知识掌握扎实,但在中考遇到陌生问题时不知道从何下手,很多学生在解题时容易出现思路不清晰的情况。追根溯源,教师没有教会学生“学会如何解题”。

2. 波利亚解题表

乔治·波利亚的“怎样解题表”包括“弄清问题”、“拟定计划”、“实现计划”、“回顾”四个步骤[3]:第一,弄清问题。明确已知、未知、条件分别是什么,是理清题意的过程,是解决问题的必要前提;第二,拟定计划。找出已知与未知之间的关系,是在“已有经验”的基础上探寻解题思路并确定具体解题方案的过程,是解题的关键环节;第三,实施计划。实施解题方案,并检验每一个步骤的正确性,是将制定的解题方案具体实施的过程,是解题的核心内容;第四,回顾。及时总结,反思验证并尝试将其应用到其他同类型题目,是解题的必要环节。

波利亚解题理论强调数学思维的教学,教师的首要任务就是帮助学生。在数学教学中,教师要帮助学生学会思考,分析理解题意,提升解题能力,深入解题思想。但思想不是一蹴而就的,这就需要广大教师将“波利亚解题思想”带入课堂。鉴于此,本文基于波利亚的解题思想,以 2023 年上海市数学中考题 25 题为例探讨教师如何帮助学生提升思维能力,学会如何解题。

3. 基于波利亚解题表的教学案例

3.1. 问题呈现

如图 1 所示,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, O 在边 AB 上,点 F 为边 OB 中点,以点 O 为圆心, BO 为半径的圆分别交 CB , AC 于点 D 、 E ,联结 EF 交 OD 于点 G 。

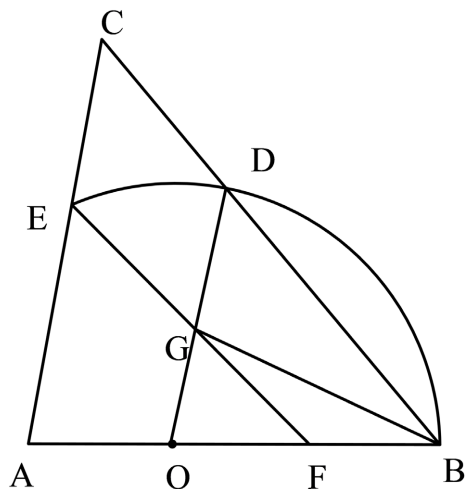


Figure 1. Title example

图 1. 题目示例

- (1) 如果 $OG = DG$ ，求证：四边形 $CEGD$ 为平行四边形；
 (2) 如图 2 所示，联结 OE ，如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle OFE = \angle DOE$ ， $AO = 4$ ，求边 OB 的长；

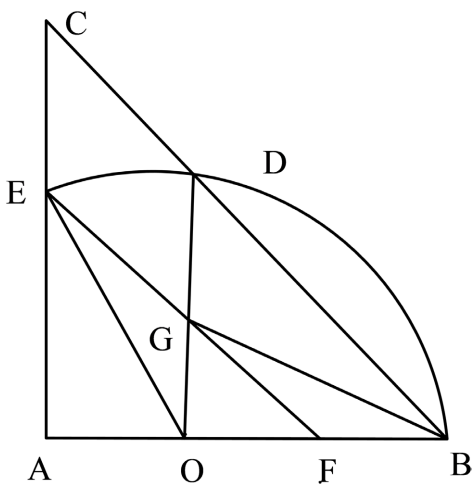


Figure 2. Title example

图 2. 题目示例

- (3) 联结 BG ，如果 $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，且 $AO = OF$ ，求 $\frac{OG}{OD}$ 的值。

3.2. 根据波利亚解题表进行解题思路教学

3.2.1. 第一问解题思路教学

(一) 理解题意

师：请同学们找出求证问题、已知条件，可否由已知条件得出相应的隐藏条件？

生：(1) 求证问题是四边形 $CEGD$ 为平行四边形。

(2) 已知条件是：

条件 1： $AB = AC$ ，由此可知 $\angle ABC = \angle C$ ；

条件 2: 以 O 为圆心, BO 为半径的圆分别交 CB 、 AC 于点 D 、 E , 则 $OB = OE = OD$, 则 $\angle ODB = \angle ABC$, 联系条件 1 可得出 $\angle ODB = \angle C$, 由此可得 $AC \parallel OD$, 则 $CE \parallel GD$;

条件 3: F 为 OB 中点, 由此可知 $OF = FB$;

条件 4: $OG = DG$, 结合条件 3 得出 FG 是 $\triangle OBD$ 的中位线。

(二) 拟定计划

师: 将已知条件标在图(1)上如图 3 所示, 并将题目以及由已知条件和图 3 得出的隐藏条件列出。

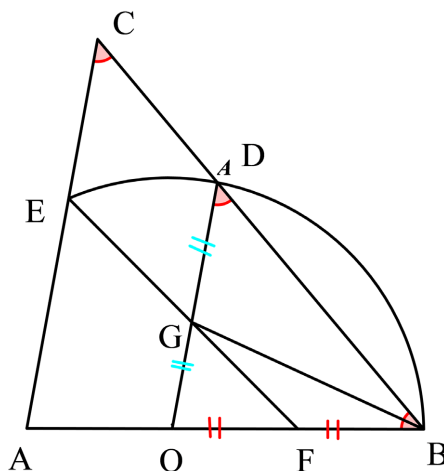


Figure 3. Title example

图 3. 题目示例

师: 观察未知量, 你能说出已知与未知量的关系吗? 你知道一条可能有用的定理吗? 你能重新叙述这道题目吗?

生: 未知量是求证四边形 $CEGD$ 为平行四边形, 可依据以下五条平行四边形的判定定理[4]:

定理 1: 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形;

定理 2: 一组对边平行且相等的平行四边形叫做平行四边形;

定理 3: 两组对边分别相等的四边形叫做平行四边形;

定理 4: 两组对角分别相等的四边形叫做平行四边形;

定理 5: 两条对角线互相平分的四边形叫做平行四边形[4]。

生: 由条件 2 可得 “ $CE \parallel GD$ ”, 因为已经有了一组对边平行, 所以判定四边形 $CEGD$ 为平行四边形就可以考虑用定理 1 和定理 2。

师: 只能用定理 1 和定理 2 吗?

生: 不是, 由条件 4 $OG = DG$ 结合条件 3 得出 FG 是 $\triangle OBD$ 的中位线, 根据中位线可以得出 $\angle ABC = \angle OFG = \angle OGF$, 又因为 $\angle ABC = \angle C$ 和 $\angle OGF = \angle EGD$, 得出 $\angle C = \angle EGD$ 。现在已经有了一组对角相等, 所以判定四边形 $CEGD$ 为平行四边形就可以考虑用定理 3。但是由于这样步骤麻烦, 我们考虑第一种情况。关于定理 4 和定理 5 则需要做辅助线连接对角线, 暂不考虑。

师: 我们应该选用定理 1 还是定理 2 呢?

生: 应该选用定理 1, 由条件 2 得出 $CE \parallel GD$, 只需再证出 $CE = GD$ 或者 $CD \parallel EG$ 即可, 根据已知条件 3 与条件 4 我们很容易得出 $CD \parallel EG$, 具体过程如下: 由条件 1 得出 $\angle ABC = \angle C$, 由条件 2 得出 $CE \parallel GD$, 由条件 3: F 为 OB 中点, 则 $OF = FB$, 又 $OG = DG$, 则 FG 是 $\triangle OBD$ 的中位线, 则 $FG \parallel BC$, 即可得证。

(三) 实施计划

证明: $\because AC = AB$, $\therefore \angle ABC = \angle C$;
 $\because OD = OB$, $\therefore \angle ODB = \angle ABC$;
 $\therefore \angle ODB = \angle C \therefore AC \parallel OD$, 即 $CE \parallel GD$;
 $\because F$ 是 OB 的中点, $OG = DG$,
 $\therefore FG$ 是 $\triangle OBD$ 的中位线,
 $\therefore FG \parallel BC$, 即 $GE \parallel CD$,
 $\therefore$ 四边形 $CEGD$ 是平行四边形;

(四) 回顾

证明平行四边形我们可以采用不同的方法, 上述采用的是“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”, 我们也可以采用“两组对角分别相等的四边形是平行四边形”, 但是这种两组对角相等的证明方法需要通过另外一组对边平行来证明。在实际题目中我们应该选择合适的判定定理: 情况 1, 优先选择“边”的判定: 在题目中边的条件(平行、相等)更易直接观察或计算, 建议优先尝试基于边的判定方法。例如: 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB = 8\text{ cm}$, $CD = 8\text{ cm}$, $AD = 5\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, 可直接用“两组对边相等”判定。情况 2, 复杂问题用“对角线”判定:

当题目涉及中点、对称性或坐标系时, 利用对角线互相平分更高效。例如: 已知四边形顶点坐标 $A(0,0)$ 、 $B(2,4)$ 、 $C(6,4)$ 、 $D(4,0)$, 通过计算对角线中点均为 $(3,2)$ 可判定为平行四边形。情况 3, 角的条件作为辅助工具: 对角相等通常需结合其他条件使用, 单独应用较少, 但可用于验证结论的一致性。例如本题中对角相等需由两直线平行得出。总之, 平行四边形判定需要紧扣其本质属性, 灵活选择边、角、对角线的条件。

3.2.2. 第二问解题思路教学

(一) 理解题意

师: 请同学们找出求证问题、已知条件, 可否由已知条件得出相应的隐藏条件?

生: (1) 求证问题是: OB 的长度。

(2) 已知条件是:

条件 1: $\angle BAC = 90^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AEF$ 、 $\triangle AOE$ 是直角三角形, 又因为 $AB = AC$, 可得出 $\angle ABC = \angle C = 45^\circ$ 。

条件 2: $\angle OFE = \angle DOE$, 由 $AC \parallel OD$ 可得出 $\angle OEA = \angle DOE$, 所以 $\angle OFE = \angle OEA$ 。

条件 3: $AO = 4$ 。

(二) 拟定计划

师: 将已知条件标在图 2 上如图 4 所示, 并将题目以及由已知条件和图 2 得出的隐藏条件列出。

师: 观察未知量, 你能说出已知条件与未知量的关系吗? 你知道一条可能有用的定理吗? 你能重新叙述这道题目吗?

生 1: 未知量是求 OB 的长度, 已知条件有一个直角以及两个相等的角, 从已知直角的角度出发我们可以考虑解直角三角形或者勾股定理, 已知两个相等的角我们可以考虑相似三角形。

师: 那我们应该采用哪一种呢?

生 2: 首先从勾股定理角度讨论, 我们已知 $AO = 4$, 求 OB , 在 $\triangle OBD$ 中, $OB = \sqrt{BD^2 - OD^2}$, 同样的, 在 $\triangle OBG$ 中, $OB = \sqrt{GB^2 - GO^2}$; 又因为 $OB = OE$, $OE = \sqrt{AE^2 + OA^2}$, 未知量就转化成了求 GB 和 GO 或求 AE 和 OA 或 OD 和 BD ; 其次从解直角三角形角度讨论, 解直角三角形一般情况需要一个直

角和一个特殊角以及一条边, 现在已知 $\angle ABC = \angle C = 45^\circ$, $\angle BAC = \angle BOD = 90^\circ$, OB 和 $\angle OBD$ 所在的直角三角形是 $\triangle OBD$, 未知量就转化成了求 OD 或 BD ; 最后我们讨论用相似三角形求 OB 的方法, 因为 $\angle OFE = \angle OEA$, $\angle OAE = \angle EAF$, 由此可得 $\triangle OAE \sim \triangle EAF$, 由此可得 $\frac{AE}{AF} = \frac{AO}{AE}$, 因为 $AO = 4$, 则, $AF = 4 + OF$ $AE^2 = 4(4 + OF)$ ①, 未知量就转化为求 AE 的长度, 在直角 $\triangle OAE$ 中, $AE^2 = OE^2 - AO^2$, 已知 $OE = OB = 2OF$, 则可得 $AE^2 = 4OF^2 - 4^2$ ②, 由①式、②式等量代换可得 $4(4 + OF) = 4OF^2 - 4^2$, 可以求出 OF 从而得出 OB 。最后我们用了相似三角形和勾股定理综合的方法。

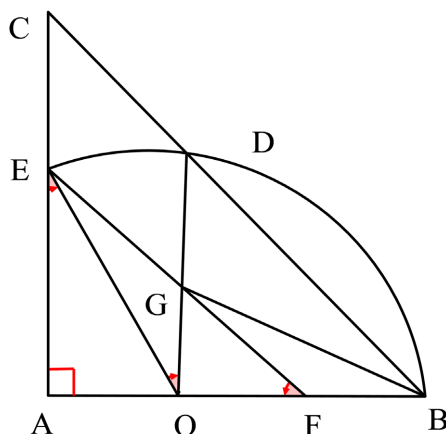


Figure 4. Title example
图 4. 题目示例

(三) 实施计划

$\because F$ 为 OB 中点, $\therefore OF = FB$,
 设 $OF = FB = a$, $OB = OD = OE = 2a$;
 $\because \angle OFE = \angle DOE$,
 由(1)可得 $AC \parallel OD$, $\angle OEA = \angle DOE$,
 所以得 $\angle OFE = \angle OEA$;
 又 $\angle OAE = \angle EAF$, $\therefore \triangle OAE \sim \triangle EAF$,
 则 $AE^2 = AO \times OF$;
 $\because AO = 4$, 则 $AF = 4 + OF$,
 即 $AE^2 = 4(4 + OF)$;
 $\because F$ 为 OB 中点, $\angle BAC = 90^\circ$
 在 $\triangle AOE$ 中, $AE^2 = OE^2 - AO^2$,
 又 $\because AO = 4$, $OE = OB = 2OF = 2a$,
 则 $AE^2 = 4OF^2 - 4^2$; $4 \times (4 + a) = 4a^2 - 4^2$,
 解得: $a = \frac{1 - \sqrt{33}}{2}$ (舍去) 或 $a = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$
 $\therefore OB = 1 + \sqrt{33}$ 。

(四) 回顾

本题考查中考数学中求线段长度, 我们一般从 5 个方面考虑: 勾股定理、全等三角形、相似三角形、等面积、三角函数、建系等。首先勾股定理适用于直角三角形, 教师应提醒学生在解题过程中首先确认

是否存在直角三角形或者可否构造直角三角形。例如已知两直角边求斜边或者通过作高来构造直角三角形；全等三角形通常用于证明边相等或者间接计算边的长度；相似三角形一般是题目中出现平行线或者角度相等或者典型相似模型时用到相似。例如 A 字型、8 字型等；等面积比较巧妙，一个图形的面积用不同面积公式表示，建立方程求解；三角函数一般用于直角三角形中，已知一角与一边长，用正弦、余弦、正切求其他边，一般集中在特殊角(30°、60°、45°)的应用。本题通过已知条件分析可能用勾股定理、相似三角形或者三角函数的方法，对三种方法分别分析，最后采用了勾股定理和相似三角形综合的方法。教师在运用“怎样解题表”模式启发学生解决数学问题时，教师要系统化设计教学，有效解决课时的零散性和知识的孤立性。教师要引导学生对问题解决过程中蕴含的数学思想方法等进行回顾[5]。

3.2.3. 第三问解题思路教学

(一) 理解题意

师：请同学们找出求证问题，已知条件，可否由已知条件得出相应的隐藏条件？

生：(1) 求证问题是 $\frac{OG}{OD}$ 的值；

(2) 已知条件是：

条件 1：由第一问条件分析可知 $\angle ABC = \angle C$ ， $CE \parallel GD$ ， $OF = FB$ ；

条件 2： $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，由此可知有两种情况 $OB = BG$ 或者 $OB = OG$ ；

条件 3： $AO = OF$ ，可得 $AO = OF = FB$ ，以及 $AO:OB = 1:2$ ， $OF:AF = 1:2$ ， $OB:AB = 2:3$ 。

(二) 拟定计划

师：将题目与已知条件和图 1 得出的隐藏条件列出。观察未知量，你能说出已知条件与未知量的关系吗？你能重新叙述这道题目吗？

生：未知是求两个线段的比例，我们就考虑到相似三角形。

师：你能从已知数据中得出有用的信息吗？

生：从第一问中分析可得 $\angle CAB = \angle DOB$ ，又 $AO = OF$ ， $OF = FB$ 得出 $AO = OF = FB$ ，则可以设 $AO = OF = FB = a$ ，所以 $OB = OD = OE = 2a$ 。

师：由 $OD \parallel AC$ 和 $AO = OF$ 这两个数据你能想到什么？

生： GO 是 $\triangle AEF$ 的中位线，那就会出现比例关系， $OG:AE = 1:2$ ，设 $OG = b$ ，则 $AE = 2b$ 。

师：由 $OD \parallel AC$ 和 $AO:OB = 1:2$ 这两个数据你能想到什么？

生：构造相似三角形，由第一问知 $\angle DOB = \angle A$ ， $AO:OB = 1:2$ ，目前已知一组对角相等一组对边对应成比例，再找另外一组对角相等构成角角边或者角边角，我们可以通过平行来构造出相等的角，作 $OM \parallel BG$ ，就可以得到 $\angle BGO = \angle OMA$ ，由此可得 $\triangle OBG \sim \triangle AOM$ ，则 $\frac{AM}{OG} = \frac{AO}{OB} = \frac{1}{2}$ ，则 $AM = \frac{1}{2}b$ ， $ME = \frac{3}{2}b$ 。

师：还可以由其他的已知数据得到什么有用的信息？条件 2 呢？

生： $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，由此可知有两种情况 $OB = BG$ 或者 $OB = OG$ 。但是情况 $OB = OG$ 时，点 G 与点 D 重合(舍去)；现在考虑 $OB = BG$ 的情况，由 $OB = BG$ ， $\triangle OBG \sim \triangle AOM$ 得到 $OA = OM = a$ ，所以 $\triangle OAM$ 是等腰三角形。

师：由 $\triangle OAM$ 是等腰三角形你能想到一条可能有用的定理吗？

生：我想到了等腰三角形的三线合一，所以我们考虑过点 O 作 $OP \perp AM$ 交 AM 于点 P ，由此可得 $AP = MP = \frac{1}{4}b$ ，则 $EP = \frac{7}{4}b$ 。

师：到目前为止我们已经把所有已知数据能够得出来的信息全部列出来了，接下来我们回归到未知量当中，去寻找未知量和我们目前所有的已知信息之间的关系。

生：求证 $\frac{OG}{OD}$ 的值， $OD=OB=2a$ ， $OG=b$ ，我们要想办法把 a 和 b 的关系找出来，通过一个中介既能用 a 表示又能用 b 表示，得到 a 和 b 的一个等量关系式，找出来 a 和 b 的关系。

师：我们刚刚去做了垂直，能不能尝试在直角三角形中用勾股定理分别表示出来同一个线段。

生: 在 $\triangle OAP$ 中, $OP^2 = OA^2 - AP^2$, 连接 OE , 在 $\triangle OPE$ 中, $OP^2 = OE^2 - EP^2$, 等量代换由此可得 $OA^2 - AP^2 = OE^2 - EP^2$, $a^2 - \left(\frac{1}{4}b\right)^2 = (2a)^2 - \left(\frac{7}{4}b\right)^2$, 解得 $a = b$, $\frac{OG}{OD} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ 。

(三) 实施计划

- ② 当 $OB = BG$ 时, 如图 5 所示作 $OM \parallel GB$ 交 AC 于 M ;

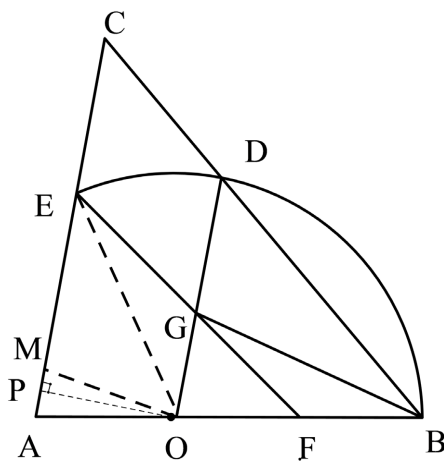


Figure 5. Title example
图 5. 题目示例

$\because F$ 是 OB 中点, $AO=OF$,
 则设 $AO=OF=FB=a$;
 又 $\because OD \parallel AC$, $AO=OF$,
 $\therefore GO$ 是 $\triangle AEF$ 的中位线, 则 $OG:AE=1:2$,
 设 $OG=b$, 则 $AE=2b$;
 $\because OM \parallel GB \therefore \angle BGO=\angle OMA$, 又 $\because OD \parallel AC$, $\therefore \angle DOB=\angle CAB$, $\therefore \triangle OBG \sim \triangle AOM$
 又 $AO:OB=1:2$, 则 $AM:OG=AO:OB=1:2$,
 则 $AM=\frac{1}{2}b, ME=\frac{3}{2}b$;
 $\because OB=BG$, $\triangle OBG \sim \triangle AOM \therefore OA=OM=a$,
 $\therefore \triangle OAM$ 是等腰三角形;
 过点 O 作 $OP \perp AM$ 交 AM 于点 P ,
 $AP=MP=\frac{1}{4}b$, 则 $EP=\frac{7}{4}b$;
 在 $\triangle OAP$ 中, $OP^2=OA^2-AP^2$,

连接 OE ，在 $\triangle OPE$ 中， $OP^2 = OE^2 - EP^2$ ，

则 $OA^2 - AP^2 = OE^2 - EP^2$

即 $a^2 - \left(\frac{1}{4}b\right)^2 = (2a)^2 - \left(\frac{7}{4}b\right)^2$ ，得 $a = b$ ，

则 $\frac{OG}{OD} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ 。

(四) 回顾

对于这道题，我们解题思路是先分析已知条件以及由已知条件得出的隐藏条件，观察未知量，将题目分解成更容易的小题目，中考题最后一题通常是几何综合题，难度较大，而等腰三角形作为重要几何图形，经常出现在压轴题中。题目中 $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形分为两种情况讨论。对于此题我们还可以改变已知条件进行变式训练：比如不规定 OB 为等腰三角形的腰、 $\triangle OBG$ 是等边三角形，改变 OB 与 OA 的比例。

4. 波利亚解题表的应用反思

波利亚解题表是数学解题的经典框架，其中理解问题是从“解题”到“建模”的过程，教师要注意学生因为信息提取不全面或者理解错误而进入误区的情况，及时采用符号化标记、数形结合、数学语言转换等策略引导学生理清题意；拟定计划是构建“解题工具”的过程，这一步骤学生面临的问题主要是面临综合复杂的题目时难以关联知识点，难以选择合适的解题策略，教师应帮助学生建立中考高频考点之间的联系、提问引导帮助学生梳理解题思路；执行计划是解题思路的呈现，这一步骤学生面临的问题是步骤跳跃、计算失误等，教师可引导学生将题目分步拆解，重视每一步的推导与步骤；回顾是深化思维的阶段，这一步骤学生面临的问题是满足于答案正确，忽视反思与总结，教师可采取的教学策略有多解对比、变式训练等。

波利亚解题表为中考大题教学提供了结构化框架，其核心价值在于培养“元认知能力”——让学生不仅会解题，更清楚“如何思考解题”，培养学生的逻辑思维与自主学习能力。教师需在教学中渗透波利亚解题表，通过案例剖析、策略对比与反思实践，帮助学生从“被动模仿”转向“主动探索”，最终实现解题能力的质变。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 方慧佳, 王家正. 上海市近三年中考数学试题整体解读比较剖析[J]. 理科考试研究, 2023, 30(20): 2-5.
- [3] 波利亚. 怎样解题[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 序言.
- [4] 沈威, 陆珺. 培养学生建构知识关系能力的个案研究——以“平行四边形复习课”为例[J]. 数学教育学报, 2024, 33(4): 34-39.
- [5] 孟彩彩, 巩铠玮. 基于波利亚“怎样解题表”的习题教学案例研究——以“函数的零点”为例[J]. 数学教学通讯, 2022(9): 6-8.