

对一类猴痘模型的最优控制

刘蓓燕

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年5月26日; 录用日期: 2025年6月18日; 发布日期: 2025年6月27日

摘 要

作为一类以动物宿主接触及性传播为主要途径的病毒性传染病, 猴痘在2022~2023年全球范围内呈现出突发性和快速传播特征。本研究聚焦于无动物宿主输入的国家中, 女性与男性患者感染特征的异质性, 进而构建性别分组的SEIR动力学模型以解析病毒传播动态。通过引入庞特里亚金极大值原理(Pontryagin's maximum principle), 系统推导了模型的最优控制策略。基于美国疫情数据的参数化数值模拟表明, 干预措施需优先针对高风险人群——尤其是男性群体, 且疫苗早期覆盖率对疫情控制具有显著敏感性。研究结果为政府防控策略提供了理论依据, 强调在疫情初期即需优化男性群体疫苗接种优先级, 以有效抑制传播链。

关键词

垂直传播, 疫苗, 最优控制

Optimal Control of One Kind of Mpox Model

Beiyang Liu

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: May 26th, 2025; accepted: Jun. 18th, 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

As a viral infectious disease primarily transmitted through animal-to-human contact and sexual transmission, monkeypox exhibited sudden and rapid global spread characteristics during 2022~2023. This study focuses on the heterogeneity of infection characteristics between female and male patients in countries without animal host introduction and subsequently constructs a gender-stratified SEIR dynamic model to analyze the transmission dynamics of the virus. By applying Pontryagin's maximum principle, the study systematically derives the model's optimal control strategies. Parameterized numerical simulations based on U.S. outbreak data indicate that intervention measures should prioritize high-risk populations—particularly the male group—and that early vaccine coverage

rates are highly sensitive in controlling the epidemic. The findings provide theoretical support for government prevention and control policies, emphasizing the need to optimize vaccine prioritization for the male population in the early stage of the epidemic to effectively curb transmission chains.

Keywords

Vertical Transmission, Vaccination, Optimal Control

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2022 年, 多国暴发的猴痘疫情使这一沉寂多年的病毒重新引发关注[1]。作为痘病毒科正痘病毒属的双链 DNA 人畜共患病原体, 猴痘病毒可分为西非分支与刚果盆地分支[2]。该病毒最早于 1958 年在实验猴群痘样疾病暴发研究中被发现, 故得名 monkeypox (简称 Mpox) [3]。首例人类感染病例发现于刚果民主共和国, 患者曾被误诊为天花。2021 年前, 猴痘主要在中西非地区呈地方性流行, 通过接触感染动物传播, 人际传播链较短, 以儿童及青少年的散发病例和聚集性病例为主, 偶尔通过家庭或旅行方式扩散至其他国家和地区[4]。自 2022 年 5 月起, 全球多国出现以男男性行为者(MSM)间性接触为主要传播途径的疫情, 病例多通过大型集会及后续社区 MSM 网络传播, 并扩散至其他国家。2022 年后各国猴痘患者症状普遍较轻, 死亡病例多见于未接受抗逆转录病毒治疗的 HIV 感染者等免疫缺陷人群[5]。

目前认为猴痘病毒宿主主要为非洲啮齿类动物, 感染啮齿类、猴类及猿类等灵长类动物均可成为传染源[6]。该病毒通过黏膜及破损皮肤侵入人体, 主要传播途径包括: 直接接触病例病变皮肤或黏膜、接触病毒污染物品、长时间近距离吸入病例呼吸道飞沫, 以及接触感染动物呼吸道分泌物、病灶渗出液、血液等体液或被其抓咬伤[7]。此外, 猴痘病毒对干燥与低温具有较强抗性, 可在痂皮、土壤及衣物寝具等物体表面存活数月, 存在通过污染寝具感染的案例。T. T. Pattiyakumbura 等研究表明, 猴痘存在垂直传播风险, 需重视孕妇健康管理[8]。人群普遍易感, 但天花疫苗接种者可能获得一定交叉保护。

猴痘潜伏期为 5~21 天(多为 6~13 天) [9]。患者在出现症状至皮疹自然脱痂形成新皮肤期间均具有传染性。早期症状以发热、头痛、背痛、肌痛为主, 可伴淋巴结肿大, 皮肤黏膜皮疹多出现于热退后, 少数可先于全身症状[10]。皮疹通常经历斑疹、丘疹、水疱、脓疱、结痂至脱落等阶段, 不同形态皮疹可同时存在, 常伴明显瘙痒疼痛。脱痂后可遗留红斑或色素沉着甚至瘢痕, 瘢痕可持续数年。症状持续约 2~4 周, 免疫缺陷患者病程可能延长[10]。作为自限性疾病, 多数病例可自愈, 但存在重症及死亡病例, 主要集中于儿童、孕妇及免疫缺陷人群[8]。现有 JYNNEOS® (Imvamune/Imvanex)与 ACAM2000 两种疫苗可降低感染风险, 但尚未实现全球普及[11][12]。

在数学模型研究方面, C. P. Bhunu 与 S. Mushayabasa [13]于 2011 年建立包含人-人及啮齿类-人传播的 SIR 模型, 揭示人群免疫状态与感染后恢复方式的关系。2012 年, C. P. Bhunu 等[14]通过 HIV/AIDS 与猴痘共感染研究, 发现两种感染的相互促进效应。2017 年, S. Usman 与 I. I. Adamu [15]构建考虑潜伏期的 SEIR 模型, 将疫苗接种与外科干预作为控制策略。2018 年, P. C. Emeka 等[16]通过 SVIR 模型探讨免疫系统差异、感染效应及接种率对传播的影响。2022 年非流行国突发疫情后, 相关研究显著增加: O. J. Peter 与 F. A. Oguntolu 等既考虑病例隔离[17]又采用分数阶模型分析传播动力学[17]; 2023 年 Yang 等

[18]研究高风险人群(主要为 MSM)与普通人群间的传播差异, Batiha 等[19]同时考虑休假模式与分数阶模型, Al-Shomrani 等[20]建立包含继发感染的模型, O. C. Collins 与 K. J. Duffy [21]则分析传播过程中的随机性。

本文结构如下: 第二节构建包含垂直传播的无动物宿主国家猴痘传播模型; 第三节引入最优控制理论探讨疫苗干预效应; 第四节基于美国 2022 年 6 月 13 日至 2024 年 1 月 29 日疫情数据进行数值模拟; 最后总结研究结论。

2. 具有垂直传播的猴痘模型

本文构建的猴痘传播模型基于 O. J. Peter 等[22]与 F. B. Agosto 等[23]的研究框架。根据世界卫生组织(WHO)数据[1], 尽管女性患者数量显著少于男性, 但其临床症状更为严重。为此, 本研究将人群划分为两个独立群体: 女性(标记为 f)与男性(标记为 m)。模型中定义以下状态变量: S_f (S_m)表示女性(男性)易感人群, E_f (E_m)人群, I_f (I_m)表示女性(男性)易感人群, R_f (R_m)表示女性(男性)易感人群。基于 WHO 数据[1], 模型设定以下关键假设:

- (1) 新生儿性别比恒定为 1:1;
- (2) 现有证据未显示恢复率存在性别差异, 故模型中两群体恢复率参数设为一致。

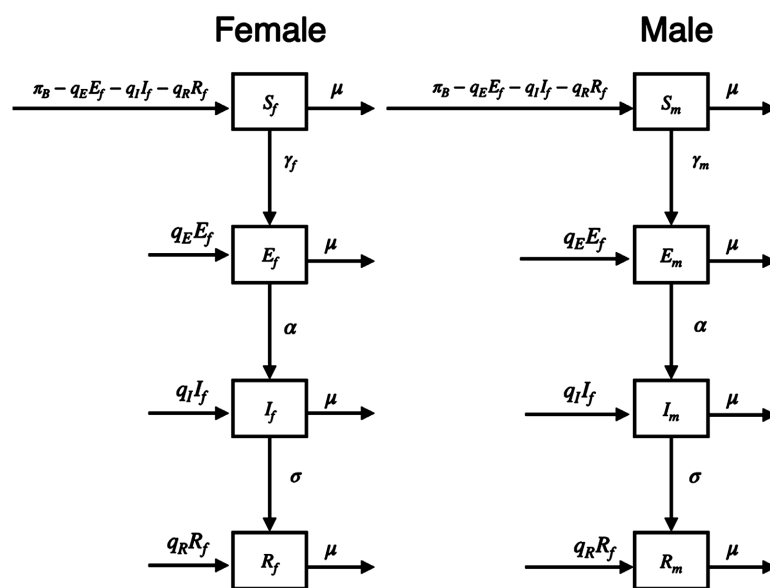


Figure 1. Schematic of Mpox transmission

图 1. 猴痘传播的流程图

图 1 中, γ_f 和 γ_m 分别代表女性和男性的感染力度, 有

$$\begin{aligned}\gamma_f(t) &= \frac{\beta_{fm} I_m(t) + \beta_{ff} I_f(t)}{N_f(t)}, \\ \gamma_m(t) &= \frac{\beta_{mm} I_m(t) + \beta_{mf} I_f(t)}{N_m(t)}.\end{aligned}\quad (1)$$

且 N_f, N_m 代表女性和男性的总人口。

$$N_f(t) = S_f(t) + E_f(t) + I_f(t) + R_f(t),$$

$$N_m(t) = S_m(t) + E_m(t) + I_m(t) + R_m(t).$$

图 1 中的模型的微分方程形式由下面的系统(2)给出。

$$\begin{aligned} \frac{dS_f}{dt} &= (\pi_B - q_E E_f - q_I I_f - q_R R_f) - \gamma_f(t) S_f - \mu S_f, \\ \frac{dE_f}{dt} &= q_E E_f + \gamma_f(t) S_f - (\mu + \alpha) E_f, \\ \frac{dI_f}{dt} &= q_I I_f + \alpha E_f - (\mu + \sigma) I_f, \\ \frac{dR_f}{dt} &= q_R R_f + \sigma I_f - \mu R_f, \\ \frac{dS_m}{dt} &= (\pi_B - q_E E_f - q_I I_f - q_R R_f) - \gamma_m(t) S_m - \mu S_m, \\ \frac{dE_m}{dt} &= q_E E_f + \gamma_m(t) S_m - (\mu + \alpha) E_m, \\ \frac{dI_m}{dt} &= q_I I_f + \alpha E_m - (\mu + \sigma) I_m, \\ \frac{dR_m}{dt} &= q_R R_f + \sigma I_m - \mu R_m. \end{aligned} \tag{2}$$

系统(2)中的所有参数值由表 1 给出。

Table 1. Definition of parameters
表 1. 参数的定义

参数	定义
π_B	新生女性、男性婴儿的数量
q_E	一个潜伏期女性生出一个潜伏期女性、男性婴儿的概率
q_I	一个感染期女性生出一个感染期女性、男性婴儿的概率
q_R	一个治愈期女性生出一个有抵抗力的女性、男性婴儿的概率
β_{ff}	感染期女性对易感期女性的疾病传播率
β_{fm}	感染期男性对易感期女性的疾病传播率
β_{mm}	感染期男性对易感期男性的疾病传播率
β_{mf}	感染期女性对易感期男性的疾病传播率
σ	恢复率
μ	自然死亡率
α	潜伏期个体到疾病下一阶段的进展率

系统(2)的最优控制

在本节中, 将原系统(2)扩展引入两个控制变量: v_1 和 v_2 。其中 v_1 表示女性群体的人均疫苗接种率, v_2 表示男性群体的人均疫苗接种率。通过这一扩展, 可进一步探讨已实施疫苗接种的国家现状, 以及政府应推行的政策建议。扩展后的模型如系统(3)所示。

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_f}{dt} &= (\pi_B - q_E E_f - q_I I_f - q_R R_f) - \gamma_f S_f - v_1(t) S_f - \mu S_f, \\
 \frac{dE_f}{dt} &= q_E E_f + \gamma_f S_f - (\mu + \alpha) E_f, \\
 \frac{dI_f}{dt} &= q_I I_f + \alpha E_f - (\mu + \sigma) I_f, \\
 \frac{dR_f}{dt} &= q_R R_f + \sigma I_f + v_1(t) S_f - \mu R_f, \\
 \frac{dS_m}{dt} &= (\pi_B - q_E E_f - q_I I_f - q_R R_f) - \gamma_m S_m - v_2(t) S_m - \mu S_m, \\
 \frac{dE_m}{dt} &= q_E E_f + \gamma_m S_m - (\mu + \alpha) E_m, \\
 \frac{dI_m}{dt} &= q_I I_f + \alpha E_m - (\mu + \sigma) I_m, \\
 \frac{dR_m}{dt} &= q_R R_f + \sigma I_m + v_2(t) S_m - \mu R_m.
 \end{aligned} \tag{3}$$

为界定控制策略的边界, 设定 $v_{1,\max}$ 与 $v_{2,\max}$ 分别为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的最大值。基于此可构建策略 $v_1(t)$ 与 $v_2(t)$ 的控制集 U , 其数学定义为:

$$U = \left\{ (v_1, v_2) \in [L^{\text{inf}}(0, T)]^2 \mid 0 \leq v_i(t) \leq v_{i,\max}, i = 1, 2 \right\}. \tag{4}$$

在控制集 U 中, T 表示策略的实施周期。通过将系统(3)的解定义为状态变量, 可构造目标泛函 $J(v_1, v_2)$ 如下:

$$\begin{aligned}
 J(v_1, v_2) &= J(v_1) + J(v_2) \\
 &= \int_0^T \left[b_1 (q_E E_f + q_I I_f + \gamma_f S_f) + A_1 v_1 S_f + \epsilon_1 v_1^2 \right] dt \\
 &\quad + \int_0^T \left[b_2 (q_E E_f + q_I I_f + \gamma_m S_m) + A_2 v_2 S_m + \epsilon_2 v_2^2 \right] dt.
 \end{aligned} \tag{5}$$

其中, 参数 b_i 表示女性或男性群体中每新增病例的成本; A_i 表示女性或男性群体中单次疫苗接种的成本; ϵ_i 表征女性或男性群体疫苗接种的非线性成本系数。根据庞特里亚金极大值原理[22], 为获得满足条件的最优控制向量 (v_1^*, v_2^*) ,

$$J(v_1^*, v_2^*) = \min_U J(v_1, v_2), \tag{6}$$

需构建相应的哈密顿函数:

$$\begin{aligned}
H[x(t), v(t), \lambda(t), t] &\triangleq L[x(t), v(t), t] + \lambda^T(t) f[x(t), v(t), t] \\
&= b_1(q_E E_f + q_I I_f + \gamma_f S_f) + A_1 v_1 S_f + \epsilon_1 v_1^2 \\
&\quad + b_2(q_E E_f + q_I I_f + \gamma_m S_m) + A_2 v_2 S_m + \epsilon_2 v_2^2 \\
&\quad + \lambda_1[(\pi_B - q_E E_f - q_I I_f - q_R R_f) - \gamma_f S_f - v_1(t) S_f - \mu S_f] \\
&\quad + \lambda_2[q_E E_f + \gamma_f S_f - (\mu + \alpha) E_f] \\
&\quad + \lambda_3[q_I I_f + \alpha E_f - (\mu + \sigma) I_f] \\
&\quad + \lambda_4[q_R R_f + \sigma I_f + v_1(t) S_f - \mu R_f] \\
&\quad + \lambda_5[(\pi_B - q_E E_f - q_I I_f - q_R R_f) - \gamma_m S_m - v_2(t) S_m - \mu S_m] \\
&\quad + \lambda_6[q_E E_f + \gamma_m S_m - (\mu + \alpha) E_m] \\
&\quad + \lambda_7[q_I I_f + \alpha E_m - (\mu + \sigma) I_m] \\
&\quad + \lambda_8[q_R R_f + \sigma I_m + v_2(t) S_m - \mu R_m].
\end{aligned} \tag{7}$$

该哈密顿函数 H 需满足伴随方程与状态方程:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}, \quad \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}
x(t) &= (S_f(t), E_f(t), I_f(t), R_f(t), S_m(t), E_m(t), I_m(t), R_m(t)), \\
v(t) &= (v_1(t), v_2(t)), \\
\lambda(t) &= [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8],
\end{aligned} \tag{9}$$

$f[x(t), v(t), t] = \dot{x}(t)$ 由系统(3)得到。

依据庞特里亚金极大值原理, 若上述条件成立, 则使目标泛函(5)最小化的 (v_1^*, v_2^*) 在每一时刻均使哈密顿函数关于控制变量取得极小值。因此, 在控制集内域上求解 (v_1^*, v_2^*) 需满足以下最优性条件:

$$\frac{\partial H}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

在计算方程(10)前, 首先通过求解下式检验 H 关于 v_i 的凸性:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v_i^2} = 2\epsilon_i > 0, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

方程(11)保证最优控制 (v_1^*, v_2^*) 确为极小值。继而通过求解方程(10)可获得最优控制向量 (v_1^*, v_2^*) 。

$$A_1 S_f + 2\epsilon_1 v_1 - \lambda_1 S_f + \lambda_4 S_f = 0,$$

$$A_2 S_m + 2\epsilon_2 v_2 - \lambda_5 S_m + \lambda_8 S_m = 0.$$

由此可得

$$v_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4 - A_1) S_f}{2\epsilon_1},$$

$$v_2 = \frac{(\lambda_5 - \lambda_8 - A_2)S_m}{2\epsilon_2}.$$

最终获得最优控制向量表达式为

$$\begin{aligned} v_1^* &= \min \left\{ v_{1,\max}, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_4 - A_1)S_f}{2\epsilon_1} \right\} \right\}, \\ v_2^* &= \min \left\{ v_{2,\max}, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_5 - \lambda_8 - A_2)S_m}{2\epsilon_2} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

为构建系统(12), 需满足方程(8)中给定的伴随方程与状态方程, 其对应的伴随微分方程组为

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= - \left[b_1 \frac{\beta_{fm}I_m + \beta_{ff}I_f}{N_f} + A_1v_1 + \lambda_1 \left(-\frac{\beta_{fm}I_m + \beta_{ff}I_f}{N_f} - v_1 - \mu \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \frac{\beta_{fm}I_m + \beta_{ff}I_f}{N_f} + \lambda_4v_1 \right], \\ \lambda_2' &= - \left[(b_1 + b_2 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6)q_E - \lambda_2(\mu + \alpha) + \lambda_3\alpha \right], \\ \lambda_3' &= - \left[(b_1 + b_2 - \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_5 + \lambda_7)q_I + (b_1 - \lambda_1 + \lambda_2) \frac{\beta_{ff}S_f}{N_f} \right. \\ &\quad \left. + (b_2 - \lambda_5 + \lambda_6) \frac{\beta_{mf}S_m}{N_m} - \lambda_3(\mu + \sigma) + \lambda_4\sigma \right], \\ \lambda_4' &= - \left[(-\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_8)q_R - \lambda_4\mu \right], \\ \lambda_5' &= - \left[b_2 \frac{\beta_{mm}I_m + \beta_{mf}I_f}{N_m} + A_2v_2 + \lambda_5 \left(-\frac{\beta_{mm}I_m + \beta_{mf}I_f}{N_m} - v_2 - \mu \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_6 \frac{\beta_{mm}I_m + \beta_{mf}I_f}{N_m} + \lambda_8v_2 \right], \\ \lambda_6' &= - \left[-\lambda_6(\mu + \alpha) + \lambda_7\alpha \right], \\ \lambda_7' &= - \left[(b_1 - \lambda_1 + \lambda_2) \frac{\beta_{fm}S_f}{N_f} + (b_2 - \lambda_5 + \lambda_6) \frac{\beta_{mm}S_m}{N_m} - \lambda_7(\mu + \sigma) + \lambda_8\sigma \right], \\ \lambda_8' &= \lambda_8\mu, \\ \lambda_j(T) &= 0, j = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (13)$$

3. 对系统(2)的数值模拟

本节采用 MCMC 算法估计系统(2)的未知参数, 并利用四阶龙格-库塔方法求解最优控制值。数据选取方面采用美国 2022 年 6 月至 2024 年 1 月期间的每周新增猴痘病例数据。鉴于美国政府自 2022 年 8 月 16 日起开始实施 Mpox 疫苗接种计划(使用 JYNNEOS® (Imvamune 或 Imvanex)和 ACAM2000 疫苗)[12], 选取 2022 年 6 月至 8 月数据用于系统(2)的参数估计, 并以 2022 年 8 月至 2024 年 1 月数据验证控制策略 v_1 和 v_2 的有效性。

3.1. 数据拟合和参数估计

在应用 MCMC 算法前, 先基于现实数据对部分初始值和参数进行先验估计:

(i) 初始值 S_{f0} 和 S_{m0} 采用美国截至 2021 年末的统计女性及男性总人口数据;

(ii) 参数 π_B 取 2022 年美国周平均新生儿数量, 由当年总出生人口除以 52 周获得;

(iii) 参数 μ , 取 2022 年美国周平均死亡率, 由当年总死亡人数除以 52 周计算;

(iv) 由于女性平均妊娠周期约为 40 周, 超过美国 Mpox 疫情的持续时间, 在模拟过程中我们将垂直传播参数 q_E, q_I, q_R 设为 0。

下面使用 MCMC 方法来估计其余的初始值和参数。参数的先验区间根据其生物学意义进行设置, 时间步长为 1 周。对于参数 β_{ff} , β_{fm} , β_{mf} 和 β_{mm} , 它们代表了猴痘通过性接触传播的概率, 以 β_{fm} 为例, 其范围选择 $0 \leq \beta_{fm} \leq 10$ 以捕捉广泛的传播情景, 从无传播($\beta_{fm} = 0$)到高效传播($\beta_{fm} = 10$)。这个范围考虑了病原体传播性和接触模式的变化, 同时确保了模型在不同条件下动态的稳健性。参数 σ 代表恢复率, 根据世界卫生组织的报告, 猴痘病毒的恢复期从 2 周到 4 周不等, 因此将 σ 的范围设为 $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{4}$ 。此外, 根据美国疾病控制和预防中心(CDC)的报告, 美国猴痘病毒的潜伏期从 3 天到 17 天不等, 因此取 α 的范围为 $\frac{7}{17} \leq \alpha \leq \frac{7}{3}$ 。考虑到美国直到 2022 年 6 月 13 日的总计病例为 240, 为了确保模型具有足够的灵活度, 模拟时将其他初值的上限设为 1000, 最终模拟得到的值如表 2 所示。

Table 2. Values of initial values and parameters estimated from MCMC and the reality

表 2. 从 MCMC 中获得的以及根据真实数据估算的初始值和参数值

参数	数值	标准差	范围	来源
π_B	70,534	-	-	(ii)
q_E	0	-	-	(iv)
q_I	0	-	-	(iv)
q_R	0	-	-	(iv)
β_{ff}	0.120188866	0.057988	[0,10]	MCMC
β_{fm}	0.208074914	0.09142	[0,10]	MCMC
β_{mm}	1.379101637	0.22812	[0,10]	MCMC
β_{mf}	0.031029074	0.02861	[0,10]	MCMC
σ	0.278073917	0.12085	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	MCMC
μ	0.0048575	-	[0,1]	(iii)
α	0.823686743	0.15905	$\left[\frac{7}{17}, \frac{3}{7}\right]$	MCMC
S_{f0}	168×10^8	-	-	(i)
E_{f0}	2	176.34	[0,1000]	MCMC

续表

I_{f0}	4	30.86	[0,1000]	MCMC
R_{f0}	0	3.16	[0,1000]	MCMC
S_{m0}	165.37×10^8	-	-	(i)
E_{m0}	120	191.98	[0,1000]	MCMC
I_{m0}	97	24.787	[0,1000]	MCMC
R_{m0}	4	253.38	[0,1000]	MCMC

图 2 展示了 MCMC 模拟后的拟合结果，可以看到模型得到的数值解和数据拟合得较好。

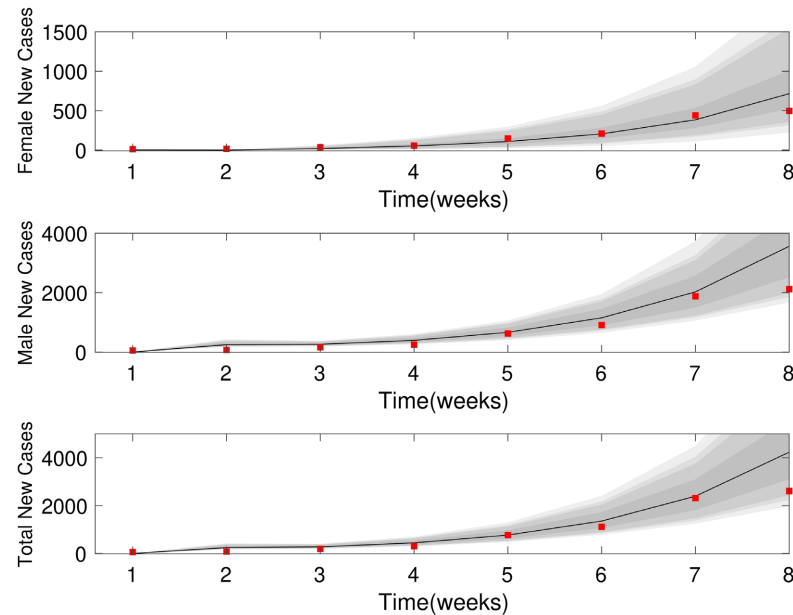


Figure 2. MCMC fitting result
图 2. MCMC 拟合结果

3.2. 最优控制

本节为契合美国实际情况，将控制变量(v_1, v_2)于 2022 年 6 月 13 日 8 周后投入应用。初始值与参数均取自表 2。根据 E. Howerton 等[3]的研究，设定各成本系数为：单例病例成本 $b_1 = b_2 = 1$ ，单次疫苗接种成本 $A_1 = A_2 = 0.125$ ，疫苗接种非线性成本 $c_1 = c_2 = 5 \times 10^8$ ，女性与男性最大疫苗接种率分别为 $v_{1,max} = 0.35$ 和 $v_{2,max} = 0.55$ 。图 3 中曲线表示应用不同控制策略后模型的输出结果，红点代表美国 2022 年 6 月 13 日至 2024 年 1 月 29 日实际新增病例数据。图中展示了美国 2022 年 6 月至 2024 年 1 月猴痘实际新增病例数据(红点)与系统(3)自 2022 年 8 月起应用不同控制策略 v_1, v_2 的模拟结果(曲线)。控制策略选取了四种形式： $v_1 = \frac{1}{2}v_{1,max}$ 且 $v_2 = \frac{1}{2}v_{2,max}$ ； $v_1 = v_{1,max}$ 且 $v_2 = \frac{1}{4}v_{2,max}$ ； $v_1 = 0$ 且 $v_2 = \frac{1}{2}v_{2,max}$ ； $v_1 = v_{1,max}$ 且 $v_2 = v_{2,max}$ 。图 3(a)、图 3(c)、图 3(e)显示固定控制策略的结果，图 3(b)、图 3(d)、图 3(f)展示第 3 节计算所得最优控制策略的结果。

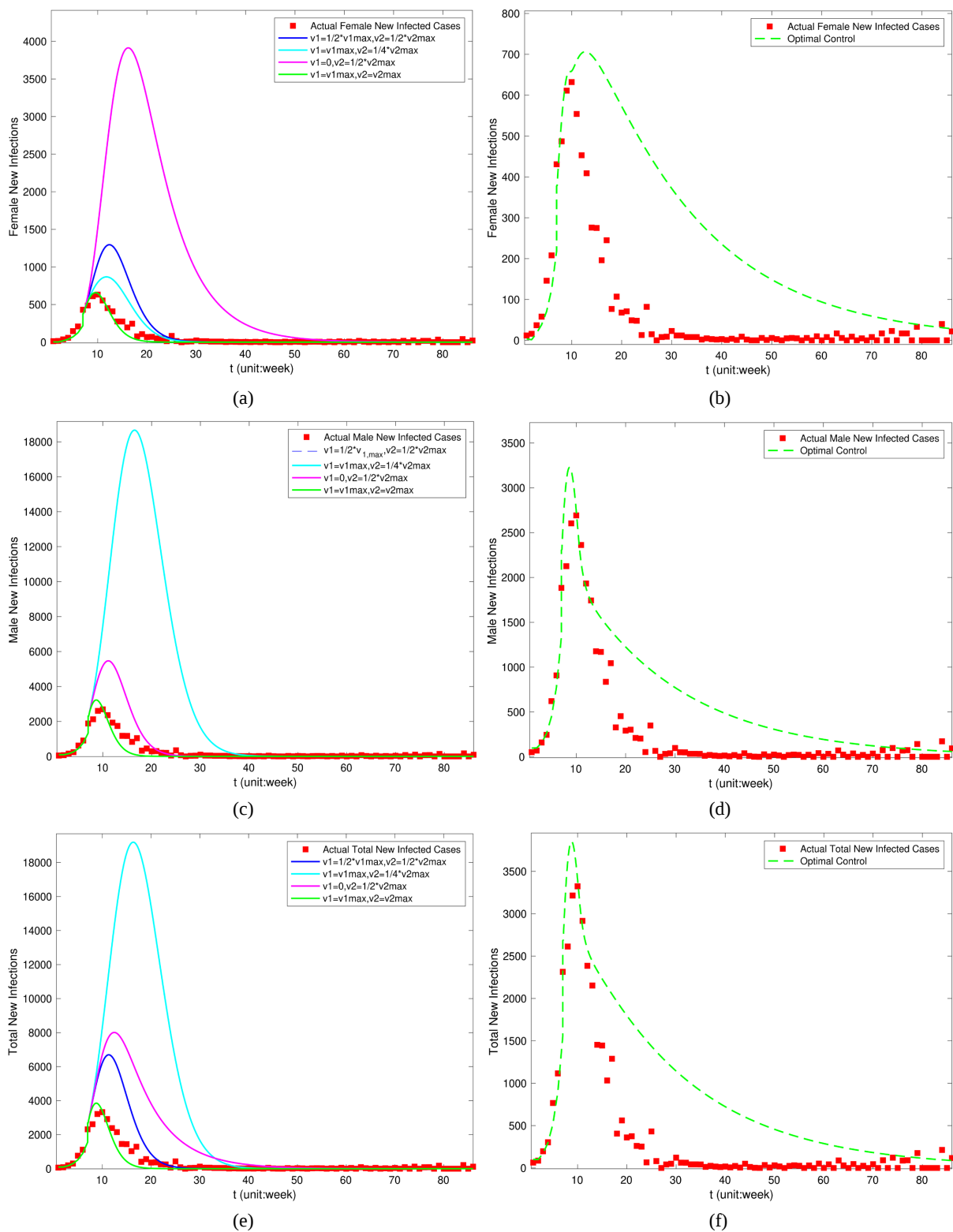


Figure 3. Different levels of control

图 3. 不同水平下的控制

图 3(a)显示, 当固定女性周接种率 v_1 时, 调整男性周接种率 v_2 对女性群体中猴痘病毒传播具有显著

影响。而图 3(c) 中深蓝色虚线(对应 $v_1 = \frac{1}{2}v_{1,\max}, v_2 = \frac{1}{2}v_{2,\max}$)与紫色实线(对应 $v_1 = 0, v_2 = \frac{1}{2}v_{2,\max}$)基本重合, 表明调整女性接种率 v_2 对男性群体中病毒传播影响甚微。值得注意的是, 采用 $v_1 = v_{1,\max}, v_2 = v_{2,\max}$ 策略的模拟结果与实际数据最为接近, 而最优控制结果在 2 周后的下降速率较实际数据更为平缓。

图 4(a) 显示最优控制强度的时间演化过程, 其中红色曲线表征女性接种率 v_1 , 绿色曲线表征男性接种率 v_2 ; 图 4(b) 对比不同控制策略的实施成本。其中 J 表示最优控制总成本, Jb 对应 $v_1 = \frac{1}{2}v_{1,\max}$ 且 $v_2 = \frac{1}{2}v_{2,\max}$ 策略, Jc 对应 $v_1 = v_{1,\max}$ 且 $v_2 = \frac{1}{4}v_{2,\max}$ 策略, Jd 对应 $v_1 = 0$ 且 $v_2 = \frac{1}{2}v_{2,\max}$ 策略, Jmax 对应 $v_1 = v_{1,\max}$ 且 $v_2 = v_{2,\max}$ 策略。图 4(a) 表明, 在最优控制策略下, v_1 仅需维持最大值至 2.6 周后, v_2 则需维持至 3.3 周后, 随后均衰减至零。图 4(b) 显示, 虽然最优控制对疫情抑制效果弱于实际情况, 但其成本显著降低。这一现象提示政府仅需在疫情初期集中资源推进疫苗接种。

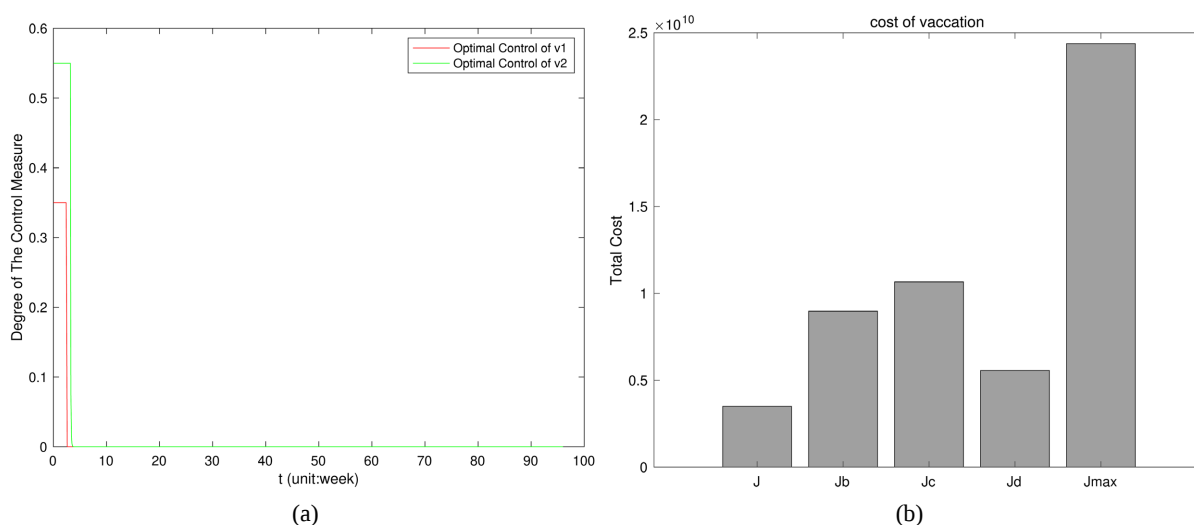


Figure 4. Level of optimal control and cost

图 4. 最优控制强度和成本

4. 讨论

本文构建了包含女性与男性群体的 SEIR 模型, 用以研究无动物宿主国家猴痘病毒的传播动力学。基于庞特里亚金极大值原理, 建立以新增病例成本与疫苗接种成本为目标泛函 J , 推导出政府可采取的最优控制策略。选择美国 2022 年 6 月至 2024 年 1 月的数据进行验证(猴痘疫苗自 2022 年 8 月起可获得), 马尔可夫链蒙特卡洛模拟结果表明: 若无干预措施, 猴痘病毒将在美国持续流行; 控制策略分析建议政府应重点针对男性群体, 且在疫情初期即需全力推进疫苗接种。

作为曾局限于非洲的地方性传染病, 猴痘在 2022~2023 年间于无动物宿主国家的突发性流行值得警惕。本文虽探讨了性别因素与疫苗接种的影响, 但年龄结构、人口流动、自我隔离等其他因素仍需深入研究。唯有纳入最关键的影响因子, 方能准确刻画猴痘病毒的真实传播动态。

参考文献

- [1] WHO (2023) Multi-Country Outbreak of Mpox. https://worldhealthorg.shinyapps.io/mpx_global/
- [2] de Clercq, E., Jiang, Y. and Li, G. (2023) Therapeutic Strategies for Human Poxvirus Infections: Monkeypox (Mpox), Smallpox, Molluscipox, and Orf. *Travel Medicine and Infectious Disease*, 52, Article 102528.

- <https://doi.org/10.1016/j.tmaid.2022.102528>
- [3] Howerton, E., Dahlin, K., Edholm, C.J., Fox, L., Reynolds, M., Hollingsworth, B., *et al.* (2023) The Effect of Governance Structures on Optimal Control of Two-Patch Epidemic Models. *Journal of Mathematical Biology*, **87**, Article No. 74. <https://doi.org/10.1007/s00285-023-02001-8>
 - [4] Karagoz, A., Tombuloglu, H., Alsaeed, M., Tombuloglu, G., AlRubaish, A.A., Mahmoud, A., *et al.* (2023) Monkeypox (Mpox) Virus: Classification, Origin, Transmission, Genome Organization, Antiviral Drugs, and Molecular Diagnosis. *Journal of Infection and Public Health*, **16**, 531-541. <https://doi.org/10.1016/j.jiph.2023.02.003>
 - [5] Nguyen, P., Ajisegiri, W.S., Costantino, V., Chughtai, A.A. and MacIntyre, C.R. (2021) Reemergence of Human Monkeypox and Declining Population Immunity in the Context of Urbanization, Nigeria, 2017-2020. *Emerging Infectious Diseases*, **27**, 1007-1014. <https://doi.org/10.3201/203569>
 - [6] Suvvari, T.K., Sandeep, M., Kumar, J., Satapathy, P., Chenchula, S., Gandhi, A.P., *et al.* (2023) A Meta-Analysis and Mapping of Global Mpox Infection among Children and Adolescents. *Reviews in Medical Virology*, **33**, e2472. <https://doi.org/10.1002/rmv.2472>
 - [7] Velázquez-Cervantes, M.A., Ulloa-Aguilar, J.M. and León-Juárez, M. (2023) La viruela del mono y el embarazo: Una enfermedad olvidada y su impacto en la salud perinatal. *Revista Clínica Española*, **223**, 32-39. <https://doi.org/10.1016/j.rce.2022.09.002>
 - [8] Pattiyakumbura, T.T., Ruwan, D.V.R.G., Munasinghe, J.M., Chathuranga, G.D.D. and Abeynayake, J.I. (2023) The First Laboratory-Confirmed Neonatal Mpox Infection in Sri Lanka. *Infectious Medicine*, **2**, 237-240. <https://doi.org/10.1016/j.imj.2023.08.003>
 - [9] Li, S., Samreen Ullah, S., AlQahtani, S.A., Tag, S.M. and Akgül, A. (2023) Mathematical Assessment of Monkeypox with Asymptomatic Infection: Prediction and Optimal Control Analysis with Real Data Application. *Results in Physics*, **51**, Article 106726. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106726>
 - [10] Zhang, X., Mandal, S., Mohammed, H., Turner, C., Florence, I., Walker, J., *et al.* (2024) Transmission Dynamics and Effect of Control Measures on the 2022 Outbreak of Mpox among Gay, Bisexual, and Other Men Who Have Sex with Men in England: A Mathematical Modelling Study. *The Lancet Infectious Diseases*, **24**, 65-74. [https://doi.org/10.1016/s1473-3099\(23\)00451-6](https://doi.org/10.1016/s1473-3099(23)00451-6)
 - [11] Silva, S.J.R.D., Kohl, A., Pena, L. and Pardee, K. (2023) Clinical and Laboratory Diagnosis of Monkeypox (Mpox): Current Status and Future Directions. *I Science*, **26**, Article 106759. <https://doi.org/10.1016/j.isci.2023.106759>
 - [12] Owens, L.E., Currie, D.W., Kramarow, E.A., Siddique, S., Swanson, M., Carter, R.J., *et al.* (2023) JYNNEOS Vaccination Coverage among Persons at Risk for Mpox—United States, May 22, 2022-January 31, 2023. *Morbidity and Mortality Weekly Report*, **72**, 342-347. <https://doi.org/10.15585/mmwr.mm7213a4>
 - [13] Bhunu, C.P. and Mushayabasa, S. (2011) Modelling the Transmission Dynamics of Pox-Like Infections. *International Journal of Applied Mathematics*, **41**, 141-149.
 - [14] Bhunu, C.P., Mushayabasa, S. and Hyman, J.M. (2012) Modelling HIV/AIDS and Monkeypox Co-Infection. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 9504-9518. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.042>
 - [15] Usman, S. and Isa Adamu, I. (2017) Modeling the Transmission Dynamics of the Monkeypox Virus Infection with Treatment and Vaccination Interventions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **5**, 2335-2353. <https://doi.org/10.4236/jamp.2017.512191>
 - [16] Emeka, P.C., Ounorah, O.M., Eguda, F.Y., *et al.* (2018) Mathematical Model for Monkeypox Virus Transmission Dynamics. *Epidemiology: Open Access*, **8**, Article 348.
 - [17] Peter, O.J., Oguntolu, F.A., Ojo, M.M., Olayinka Oyeniyi, A., Jan, R. and Khan, I. (2022) Fractional Order Mathematical Model of Monkeypox Transmission Dynamics. *Physica Scripta*, **97**, Article 084005. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac7ebc>
 - [18] Yang, S., Guo, X., Zhao, Z., Abudunaibi, B., Zhao, Y., Rui, J., *et al.* (2023) Possibility of Mpox Viral Transmission and Control from High-Risk to the General Population: A Modeling Study. *BMC Infectious Diseases*, **23**, Article No. 119. <https://doi.org/10.1186/s12879-023-08083-5>
 - [19] Batiha, I.M., Abubaker, A.A., Jebri, I.H., Al-Shaikh, S.B., Matarnah, K. and Almuzini, M. (2023) A Mathematical Study on a Fractional-Order SEIR Mpox Model: Analysis and Vaccination Influence. *Algorithms*, **16**, Article 418. <https://doi.org/10.3390/a16090418>
 - [20] Al-Shomrani, M.M., Musa, S.S. and Yusuf, A. (2023) Unfolding the Transmission Dynamics of Monkeypox Virus: An Epidemiological Modelling Analysis. *Mathematics*, **11**, Article 1121. <https://doi.org/10.3390/math11051121>
 - [21] Collins, O.C. and Duffy, K.J. (2023) Dynamics and Control of Mpox Disease Using Two Modelling Approaches. *Modeling Earth Systems and Environment*, **10**, 1657-1669. <https://doi.org/10.1007/s40808-023-01862-8>
 - [22] Peter, O.J., Kumar, S., Kumari, N., Oguntolu, F.A., Oshinubi, K. and Musa, R. (2021) Transmission Dynamics of

Monkeypox Virus: A Mathematical Modelling Approach. *Modeling Earth Systems and Environment*, **8**, 3423-3434. <https://doi.org/10.1007/s40808-021-01313-2>

- [23] Augusto, F.B., Bewick, S. and Fagan, W.F. (2017) Mathematical Model of Zika Virus with Vertical Transmission. *Infectious Disease Modelling*, **2**, 244-267. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.05.003>