Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(6), 434-443**
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146332

基于三次样条插值和遗传算法的光纤传感器的平面曲线重构

胡登豪，林旭旭*，刘　军，陈展明

湖南科技学院理学院，湖南　永州

收稿日期：2025年5月25日；录用日期：2025年6月17日；发布日期：2025年6月25日

摘　要

随着我国光纤及光通信技术不断发展，光纤传感技术这种新型传感器技术也不断发展起来。本文通过分析处理固定间距传感器的波长测量数据，构建三次样条插值模型来估算平面光栅各个传感点的曲率，并在此基础上通过牛顿法和遗传算法进一步重构平面曲线并分析其特点以及重构曲线与原始曲线出现误差的原因。最后分别对模型进行了检验和灵敏度分析，验证了模型的合理性和有效性。

关键词

平面曲线重构，曲率估计，三次样条插值，牛顿法，遗传算法

Plane Curve Reconstruction of Fiber Optic Sensors Based on Cubic Spline Interpolation and Genetic Algorithm

Denghao Hu, Xuxu Lin*, Jun Liu, Zhanming Chen

College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan

Received: May 25th, 2025; accepted: Jun. 17th, 2025; published: Jun. 25th, 2025

Abstract

With the continuous advancement of fiber and optical communication technologies in China, fiber optic sensing technology, a new type of sensor technology, is also developing rapidly. This paper constructs a cubic spline interpolation model by analyzing and processing the wavelength measurement

*通讯作者。

文章引用: 胡登豪, 林旭旭, 刘军, 陈展明. 基于三次样条插值和遗传算法的光纤传感器的平面曲线重构[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 434-443. DOI: 10.12677/aam.2025.146332

data of sensors with fixed spacing to estimate the curvature at each sensing point on the plane grating. Based on this, the Newton method and genetic algorithm are used to further reconstruct the plane curve, and the characteristics of the curve, as well as the reasons for the errors between the reconstructed curve and the original curve, are analyzed. Finally, the model is tested and sensitivity analysis is conducted to validate the rationality and effectiveness of the model.

Keywords

Plane Curve Reconstruction, Curvature Estimation, Cubic Spline Interpolation, Newton's Method, Genetic Algorithm

1. 引言

近年来，全球步入高速发展的信息化时代，传感技术迎来了需求爆发期，其中曲线重构在诸多应用场合具有不可替代的作用。光纤传感技术是上世纪 70 年代伴随着光纤及光通信技术发展起来的一种新型传感器技术。光纤形状传感已经应用在微创介入手术导航，在航空航天关键结构形态测量，在连体机器人机械臂空间姿态监测等领域。更精确地计算平面光栅各点处的曲率，重构平面曲线能更好地了解光纤传感器在复杂环境下的响应特性，有助于优化传感器的设计，提高其稳定性和灵敏度。

目前，许多科研人员对此进行了深入探究，如田金容[1]介绍了一种基于常规多芯光纤和 OFDR 的三维曲线重构系统基本组成，并提出了曲线重构的方法；程文胜[2]对基于超弱光纤光栅的曲线重构方法进行了研究，分析了各种算法的误差来源和适用条件；冯荻[3]对基于光纤光栅应变传感的结构变形重构技术进行了研究，并优化了现有的测量方式提出了新的变形重构算法等等。综上，我国对光纤传感器的研究发展非常迅速，涉猎范围越来越大，目前对光纤传感器的平面曲线重构已经取得了一定的进展。

因此，本文建立基于三次样条插值[4]的曲率估计模型与基于遗传算法[5]的平面曲线重构模型，从而以连续曲率或者平面曲线方程为基础重构出平面曲线，构建出一个实用的重构平面曲线模型，这对现有的离散曲率信息建立连续曲率估计模型对平面曲线重构算法具有重要的实现意义。

2. 基于三次样条插值的曲率估算模型构建

2.1. 问题背景

本文采用的数据来源于 2024 年第十六届“华中杯”大学生数学建模挑战赛，题目中规定光纤在平面内受力后在初始位置的切线与水平方向的夹角为 45°，并给出了两组不同初始状态下受力前后的波长值，由此来计算出测量点的曲率，并在此基础上对给出的平面曲线方程进行重构并分析出现误差的原因，具体数据见表 1。

2.2. 各个传感点的曲率估算

结合两组初始状态下不同测试点受力前后的波长值以及波长曲率关系建立传感点的曲线波长曲率公式：

$$\kappa_{ij} = \frac{c\left(\lambda_{ij} - \lambda_{0i}\right)}{\lambda_{0i}} \tag{1}$$

上式中 κ_{ij} 为第 i 个初始状态下的第 j 个测量点的曲率，c 为常数，λ_{ij} 为光纤在第 i 个初始状态下的第 j 个测量点受到外力后测量的波长值，λ_{0i} 为第 i 个初始状态下测量的波长。由上述模型计算得出结果见表 2。

Table 1. Wavelength (Nanometer) measurement data
表 1. 波长(纳米)测量数据

测量点	初始状态 1	测试 1	初始状态 2	测试 2
FBG1	1529	1529.808	1540	1541.095
FBG2	1529	1529.807	1540	1541.092
FBG3	1529	1529.813	1540	1541.090
FBG4	1529	1529.812	1540	1541.093
FBG5	1529	1529.814	1540	1541.094
FBG6	1529	1529.809	1540	1541.091

Table 2. Curvature values at each sensing point of the planar grating under two initial states
表 2. 两次初始状态下平面光栅各个传感点的曲率值

测量点	初始状态 1	初始状态 2
FBG1	2.2195	2.9864
FBG2	2.2167	2.9782
FBG3	2.2332	2.9727
FBG4	2.2305	2.9809
FBG5	2.2360	2.9836
FBG6	2.2222	2.9755

2.3. 三次样条插值法求解结果

2.3.1. 三次样条插值法概述

三次样条插值是一种分段插值方法，其实质是将插值区间分为若干子区间，然后在每个子区间生成一个不高于 3 次的多项式函数，并且满足插值连续性以及一阶和二阶可导连续性，该方法能保证每个点都是平滑连续的，经比较，其拟合误差远小于多项式拟合等方法。三次样条函数如下：

$$S\left(x\right) = \sum_{i=1}^{6} P_i\left(x\right) \tag{2}$$

$$P_i\left(x\right) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \tag{3}$$

上式中全局函数 $S\left(x\right)$ 中将区间划分为 n 个子区间，能有效避免高阶多项式的震荡，经交叉验证，$n = 6$ 时 AIC 准则最优。$P_i\left(x\right)$ 为三次多项式通式的表达式，a_i、b_i、c_i、d_i 为多项式系数。

2.3.2. 模型求解

收集两组不同初始状态下的测量点的曲率，根据测量点的自变量将整个插值区间分割为多个小区间，对每个小区间进行三次插值，求解每个小区间的三次多项式系数，根据每个小区间的三次多项式系数，将整个插值区间上的函数定义为一个分段函数，将横坐标代入得到曲率。所求的结果见表 3。

Table 3. Results obtained by cubic spline interpolation
表 3. 三次样条插值法求解结果

横坐标 x (米)	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
测试 1 曲率 k	2.2467	2.2350	2.2260	2.2195	2.2152
测试 2 曲率 k	2.9853	2.9863	2.9866	2.9864	2.9857

在初始状态 1 下，得到的不同光纤长度下的曲率变化图，见图 1。

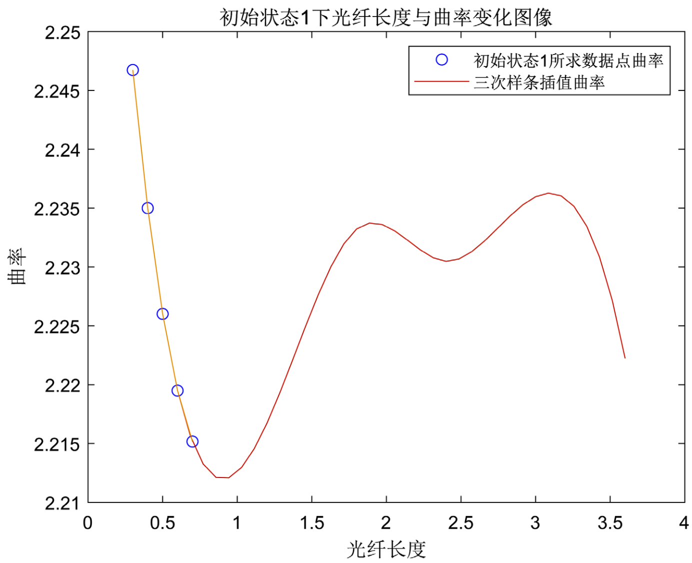

Figure 1. Fiber length and curvature variation under initial state 1
图 1. 初始状态 1 下光纤长度与曲率变化图形

在初始状态 1 下，插值曲线整体呈现出先下降，后上升的趋势，总体呈波动式变化，并且在需要插值的数据点区域保持平滑，没有不自然的波动或尖点，从整体上观察到插值曲线在原始数据点之外的整体形状和趋势也与原曲线衔接得较好，虽然超出部分的曲线随着长度减少，曲率升高的坡度较大，但曲率之差只有 0.03 之内，这表明对于初始状态 1 下的曲率插值模型表现较好。

在初始状态 2 下，得到的不同光纤长度下的曲率变化图，见图 2。

在初始状态 2 下，随光纤长度的增长，曲率大致呈现出 M 型的波动式变化趋势，并且整体曲线光滑，没有间断点和尖点，在超出原数据的插值数据区域没有呈现直线下降趋势，而是呈现弯曲形式较好地保持了原始数据的整体趋势和形状，插值的曲率之差保持在 0.003 范围内，而光纤曲率传感器的测量误差通常要求控制在 0.005 以内，这表明我们对于初始状态 2 下的曲率插值模型构建满足要求。

2.3.3. 模型检验

基于三次样条插值的曲率估算模型求解中，我们使用了三次样条插值法来进行曲率估算，对此我们

就结果精确度来进行分析，对不同插值方法下的结果进行对比，见图 3。

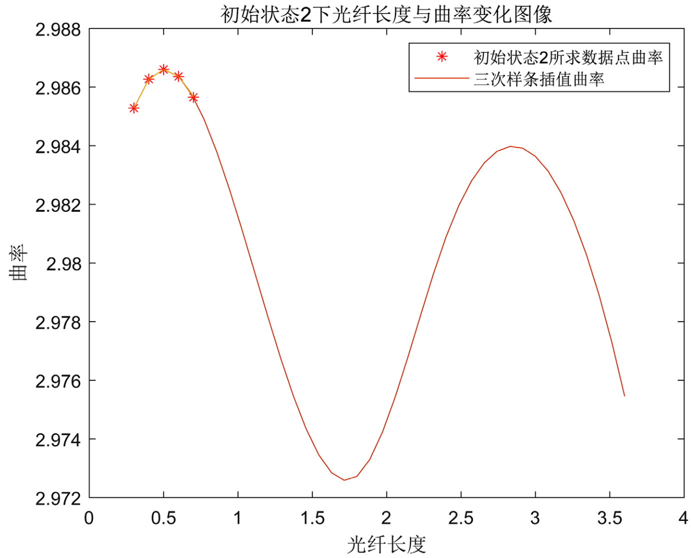

Figure 2. Fiber length and curvature variation under initial state 2
图 2. 初始状态 2 下光纤长度与曲率变化图形

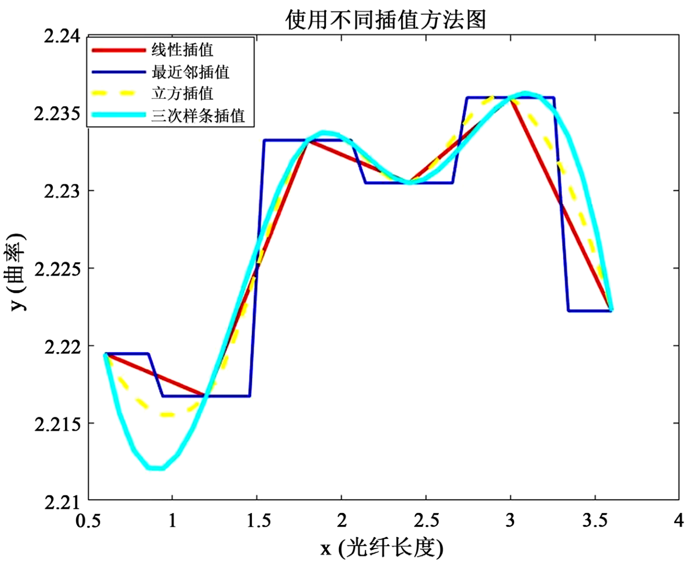

Figure 3. Curvature plots using different interpolation methods
图 3. 不同插值方法下的曲率图

分析该图可知，线性插值的精度相对较低，特别是在函数曲率变化较大的情况下，误差比较严重，并且线性插值的曲线光滑度不高；对于最近邻插值而言，它的插值结果缺乏连续性，从而影响插值结果精度；对于立方插值而言，其插值结果精度较高且平滑度较好，但是其计算量大，容易产生误差；而对于三次样条插值而言，其插值结果平滑性和连续性好，并且其可行性高，有多种计算方法可供选择。

结合以上对比分析，验证了本组使用的三次样条插值法结果精确度相对较高，验证了该模型的可行性。

2.4. 灵敏度分析

在曲率问题的求解中，计算 x 所对应的参数坐标值时，规定初始角度为 45˚，接下来分析初始角度对平面重构曲线的灵敏度。保持其他参数与曲线重构求解时一致，改变初始角度，得到结果见图 4。

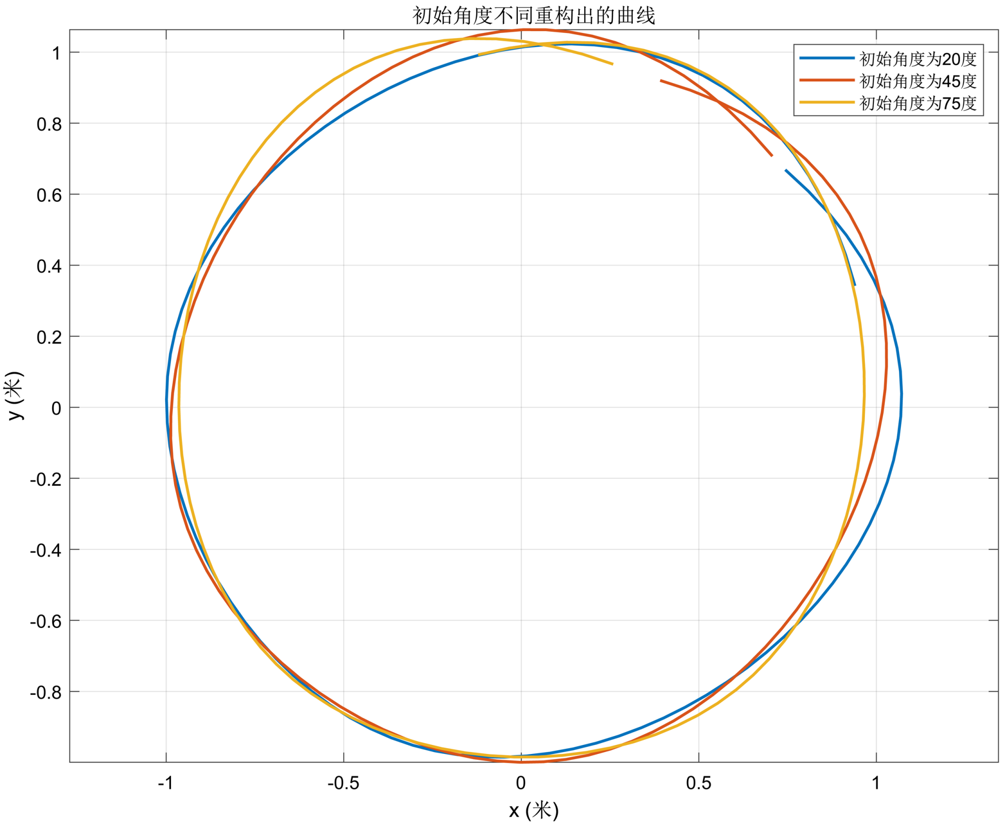

Figure 4. Reconstructed curves at different initial angles
图 4. 不同初始角度下的重构曲线

分析该图可得，初始角度对平面重构曲线的灵敏度较低。说明初始角度的取值对平面重构曲线的影响较小，系统结果稳定。说明规定初始角度为 45˚较为合理，为后面模型构造提供了有力支撑条件。

3. 基于遗传算法的平面曲线重构模型构建

3.1. 题目背景

题目中规定需要根据平面曲线方程 $y = x^3 + x\left(0 \le x \le 1\right)$，以适当的等间距弧长采样，计算采样点的曲率。然后以采样的曲率为基础，构建数学模型，重构平面曲线，并分析重构曲线与原始曲线出现误差的原因。

3.2. 模型简介

3.2.1. 牛顿法概述

牛顿法[6]是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。牛顿法之所以适用于这个问题，是因为它利用了函数图像上的切线来迅速逼近零点。在求解与弧长对应的 x 值时，我们实际上是在寻找函数的零点，即 $f\left(x\right)$ 在这一点上的值为 0。由于弧长可以通过函数值的变化来逼近，我们可以通过找到函数值

的零点来确定与特定弧长相对应的 x 值。牛顿法的基本思想是使用函数的导数来估计函数的零点，对于给定的初始估计值 x_0，牛顿法迭代公式为：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

3.2.2. 遗传算法概述

遗传算法是一种基于自然原理的启发式算法，它的本质是通过群体搜索技术，根据适者生存的原则逐代进化，最终得到最优解或准最优解。该特性符合我们要求解的平面重构曲线优化模型，故采用遗传算法求解该模型。遗传算法的一般流程分为求初始种群、确定目标函数、交叉操作、变异操作和选择。最终得到最佳系数构建曲线模型：

$$y = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \tag{5}$$

若增加更高次项会导致过拟合，而减少项会丧失对斜率变化的描述能力，所以利用 4 个系数来构建此次的曲线模型是最优的。

3.3. 等间距弧长采样点的曲率计算

3.3.1. 等距弧长采样

根据题目要求，要进行等间距弧长采样，首先要确定好等间距弧长，这里我们引入曲线弧长公式[7]：

$$L = \int_{f(t_1)}^{f(t_2)} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

在确定等间距弧长采样点时，结合弧长公式(6)和牛顿法迭代公式(4)，将总弧长分为 16 等分，取得 15 个采样点。

3.3.2. 曲率计算

得到 15 个采样点之后，使用曲率公式(1)计算得到各个采样点曲率。求解结果如下：

求解得总弧长为：2.2707 m。

求解得平均弧长为：0.1514 m。

求解得 15 个采样点的曲率结果见表 4。

Table 4. Curvature values at 15 sampling points
表 4. 15 个采样点的曲率值

采样点	1	2	3	4	5	6	7	8
曲率	0.119	0.3004	0.4068	0.4318	0.4049	0.3563	0.3043	0.2571
采样点	9	10	11	12	13	14	15	-
曲率	0.2172	0.1843	0.1575	0.1356	0.1178	0.1031	0.0909	-

3.4. 重构曲线与原始曲线对比

基于所求的 15 个采样点的曲率，求得三次多项式系数见表 5。

代入到最佳系数构建曲线模型(5)得到重构曲线方程为：

$$y = -0.9519x^3 + 0.5137x^2 + 0.8248x - 0.2891$$

Table 5. Cubic polynomial coefficients optimized by genetic algorithm
表 5. 基于遗传算法的三次多项式系数

a_1	a_2	a_3	a_4
−0.9519	0.5137	0.8248	−0.2891

为了验证重构曲线的准确性，分析出现误差的原因和重构过程的质量和效果，我们将重构曲线与原始曲线进行了对比，见图 5。

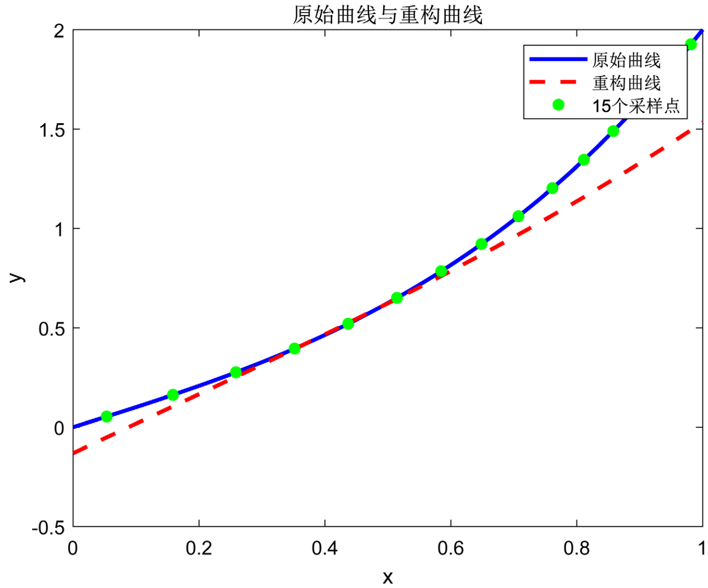

Figure 5. Comparison between original and reconstructed curves
图 5. 原始曲线与重构曲线对比图

为了防止单一误差指标掩盖问题，我们对原始曲线和重构曲线进行了多种误差指标的分析得到结果见表 6。

Table 6. Error metrics analysis between original and reconstructed curves
表 6. 原始曲线与重构曲线的误差指标分析

	MAE	MSE	Max Error	RMSE
15 采样点	0.018	0.0009	0.07	0.030

当采样点数量为 15 个时，方案的误差指标呈现协调分布的特征：

MAE = 0.018 反映整体拟合精度良好，MSE = 0.0009 与 RMSE = 0.030 的严格平方关系($0.03^2 = 0.0009$)验证了计算过程的严谨性，而 Max Error = 0.07 (为 MAE 的 3.9 倍)表明高曲率区域存在优化空间。

通过以上分析可得，重构曲线与原始曲线出现误差的原因有以下几点：

(1) 由于遗传算法中的初始解是随机生成，所以每次优化后的多项式系数会不同，导致重构曲线与原始曲线有偏差。

(2) 遗传算法本身就容易陷入局部最优解，而且交叉操作中产生的子代可能一个适应度很高，一个很低，低的个体含有好的基因但是会被淘汰，最后，依靠简单的交叉，变异操作很容易产生不可行解。

(3) 用于重构平面曲线的采样点数过少，容易出现精度降低，缺乏细节，使曲线不稳定等误差。

3.5. 初始角度对重构曲线的灵敏度分析

我们在进行等间距弧长采样时，取了 15 个采样点，接下来分析采样点数量对曲率计算结果灵敏度。保持其他参数与问题求解时一致，改变采样点数量，得到结果如下列图示。

以 10 个采样点为例，见图 6。

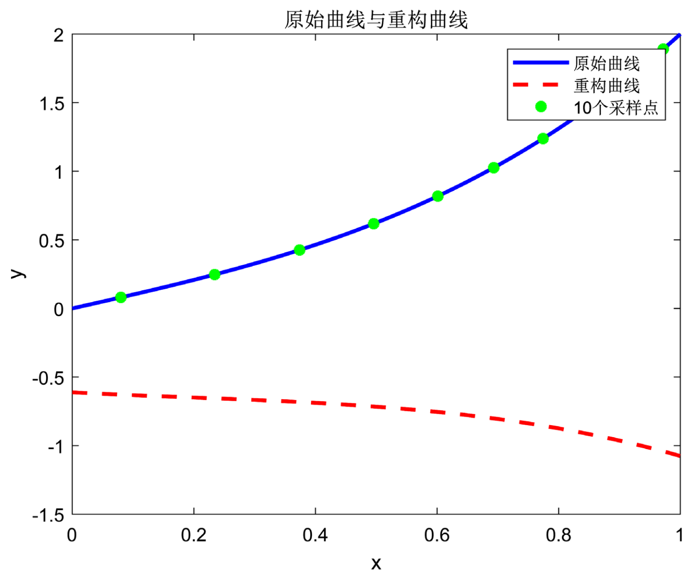

Figure 6. Reconstructed curve at 10 sampling points
图 6. 10 个采样点下的重构曲线图

分析上图可知，当取 10 个采样点时，重构曲线与原始曲线曲率差别不断增大，且曲线图像差异较大。

以 20 个采样点为例，见图 7。

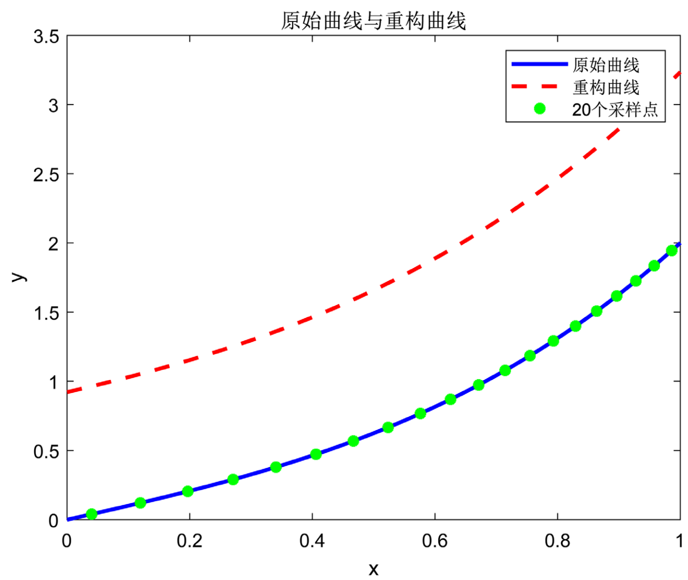

Figure 7. Reconstructed curve at 20 sampling points
图 7. 20 个采样点下的重构曲线图

分析上图可知，当取 20 个采样点时，重构曲线与原始曲线曲率较为相似，但曲线图像重合度较低，误差较大。

根据以上分析可得，采样点数量对曲率计算结果灵敏度较高，随着采样点数量不断增多，重构曲线与原始曲线的误差先减小后增大。由此我们判断，在重构平面曲线时，采样点的数量取值是一个关键参数，其精确度应进一步根据真实统计得出，以提高模型的准确性。

4. 结论

本文围绕光纤传感器的曲率估算与平面曲线重构，通过构建基于三次样条插值的曲率估算模型来进行曲率估算，构建基于遗传算法的平面曲线重构模型进行了平面曲线的重构与优化，并进行了模型对比和灵敏度分析，科学论证了模型的有效性，预期成果有一定的研究价值和实际指导作用。

基金项目

湖南省教育厅科学研究一般项目(22C0542)；

永州市指导性科技计划项目(2024 年度)；

湖南科技学院科学研究项目(21XKY038)。

参考文献

[1] 田金容. 基于多芯光纤和光频域反射的三维曲线重构方法研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2022.

[2] 程文胜. 基于超弱光纤光栅的曲线重构方法研究[D]: [硕士学位论文]. 宜昌: 三峡大学, 2021.

[3] 冯荻. 基于光纤光栅应变传感的结构变形重构技术研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2020.

[4] 陶婷. 三次样条插值函数稳定性分析及其应用[D]: [硕士学位论文]. 成都: 成都理工大学, 2021.

[5] 王雪峰. 用于函数优化问题的实数编码遗传算法的改进及并行化实现[D]: [硕士学位论文]. 保定: 河北大学, 2019.

[6] 王乐成, 赫亚兰, 韩新丽, 等. 对牛顿迭代法的改进[J]. 高师理科学刊, 2020, 40(3): 23-26.

[7] 孙玉泉. 平面曲线弧长计算中的近似问题[J]. 兰州文理学院学报, 2014, 28(4): 26-29.