Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(6), 498-509**
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146338

关于Benjamin-Bona-Mahony方程在无界域中全局吸引子存在性的注记

徐玉莹

中国地质大学(武汉)数学与物理学院，湖北 武汉

收稿日期：2025年5月25日；录用日期：2025年6月17日；发布日期：2025年6月27日

摘　要

本文证明了广义Benjamin-Bona-Mahony方程在三维通道中全局吸引子的存在性。该文处理了非线性项的增长阶数$0 \le m < 2$的情形，特别是证明解半群的渐近紧性时，运用高阶正则性，将解半群分解成两部分，从而获得解半群的渐近紧性。本文使用了不同的方法得到了证明了Wang-Fussner-Bi (J. Phys. A 40 (2007), no. 34, 10491-10504)中的结果。

关键词

Benjamin-Bona-Mahony，全局吸引子，渐近紧性，高阶正则性

A Note to the Existence of Global Attractors for the Benjamin-Bona-Mahony Equation in Unbounded Domains

Yuying Xu

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan Hubei

Received: May 25th, 2025; accepted: Jun. 17th, 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

This paper proves the existence of a global attractor for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation in a three-dimensional channel. The paper deals with the case of the growth order of the nonlinear term $0 \le m < 2$, especially when proving the asymptotic compactness of the solution semi-group, it decomposes the solution semigroup into two parts by using higher-order regularity, thereby

文章引用: 徐玉莹. 关于 Benjamin-Bona-Mahony 方程在无界域中全局吸引子存在性的注记[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 498-509. DOI: 10.12677/aam.2025.146338

obtaining the asymptotic compactness of the solution semigroup. This paper re-proves the results in Wang-Fussner-Bi (J. Phys. A 40 (2007), no. 34, 10491-10504).

Keywords

Benjamin-Bona-Mahony, Global Attractor, Asymptotic Compactness, Higher-Order Regularity

1. 引言

本文考虑定义在无界域 $Q=\Omega\times\mathbb{R}$ 中的本杰明－博纳－马奥尼方程(Benjamin-Bona-Mahony equation)的全局吸引子的存在性，简称 BBM 方程，即

$$u_t-\Delta u_t-\upsilon\Delta u+\nabla\cdot\vec{F}(u)=g(x),\ \ x\in Q,\ t>0. \tag{1.1}$$

其中 $u(x,t)$ 是未知函数，$\vec{F}(s)=\left(F_1(s),F_2(s),F_3(s)\right),\ s\in\mathbb{R}$ 是非线性向量满足某些增长条件的函数，$g(x)\in L^2(Q)$ 是一个给定的函数，与时间变量 t 无关，ν 是一个正常数。

上述的 BBM 方程(1.1)赋予边界条件

$$u|_{\partial Q}=0,\ t>0, \tag{1.2}$$

和初始条件

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in Q. \tag{1.3}$$

另外，BBM 方程(1.1)中的函数 $F_k(s)(k=1,2,3)$ 是光滑函数，满足如下假设

$$F_k(0)=0,\ \left|F_k'(s)\right|\le c_1+c_2|s|^m,\ 0\le m<2,\ s\in\mathbb{R}. \tag*{【K】}$$

给定 $G_k(s)=\int_0^s F_k(t)\mathrm{d}t,\ f(s)=F_k'(s)$，则上述条件【K】满足：对于 $k=1,2,3$，有

$$\begin{aligned}&\left|f_k(s)\right|\le c_1+c_2|s|^m,\left|F_k(s)\right|\le c_1|s|+c_2|s|^{m+1},\\&\left|G(s)\right|\le c_1|s|^2+c_2|s|^{m+2}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

BBM 方程最早是 Benjamin、Bona 和 Mahony 在 1972 年[1]提出来，用于描述长波的传播问题，包含非线性色散和耗散效应的 BBM 方程。注意，对于原始的 BBM 方程，空间是一维的，非线性项 $F(u)=u+\frac{1}{2}u^2,g\equiv 0$。在这个意义上，本文研究的 BBM 方程也被称为文献中的广义 BBM。对于广义的 BBM 方程解的适定性问题，如解的存在性和唯一性问题，已得到了广泛的研究，并被应用于长波方程的初边值问题和非线性色散方程的弱解，见[2]-[11]。而对于基于一些不同的约束条件，研究了 BBM 方程的全局吸引子的存在性问题，比如非线性项的增长阶数，在一些适当的边界条件，或者在空间变量 x 所属的有界或无界域上。如果域是有界的，研究了 BBM 方程的全局吸引子方程的存在性，见[12]-[19]。如果域是无界的，则证明了 BBM 方程的全局吸引子的存在性，见[20]-[25]。

在[24]中，Wang、Fussner 和 Bi 证明了对于任意 $g\in L^2(Q)$，BBM 方程存在一个全局吸引子，其中非线性项的增长阶严格小于 2，即条件【K】。本文旨在对[24]中证明解半群的渐近进紧性的方法进行修

正，采用不同的方法来证明结论成立。其中[24]中运用的尾端估计和高阶正则性的方法都可以证明非线性项小于 2 的情形，只是方法不同。本文中，首先，根据先验能量有界法建立解的适定性，通过 Gronwall 引理等技巧证明有界吸收集的存在性，见[26]-[29]。这是标准方法，在[24]和[30]中已有体现。其次，证明解半群的渐近紧性。因 Sobolev 紧性的缺失，加深半群渐近紧性的困难性，此时能量方法比较适用。在[24]中，关于解的尾部的均匀估计在证明渐近紧性方面发挥了重要作用。Ball 等人研究了 BBM 方程解的适定性和渐近行为，见[26]-[31]。本文受[32] [33]的启发，采用高阶正则性去证明渐近紧性，通过证明 BBM 方程的解半群在比已知空间更高阶的空间内有界，进而得到在原空间中的收敛性，从而证明解半群是渐近紧性的。

1.1. 全局吸引子的存在性

在本文中，我们将研究三维通道中 BBM 方程的全局吸引子的存在性。为了证明一个全局吸引子的存在性，我们采用高阶正则性的方法，依据如下：

命题 1.1. [31]-[33] 假设 $\mathcal{H}$ 是 Banach 空间及 $S(t)$ 是 $\mathcal{H}$ 上的非线性 C_0-半群，满足以下条件：

(i) 存在有界吸收集 $\mathcal{B}_0$；

(ii) 对于任意 $t \geq 0$，$S(t)$ 可以写成

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t), \tag{1.5}$$

其中 $S_1(t)$ 满足引理 2.1，$S_2(t)$ *是* $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 的连续映射，并且满足

$$\mathrm{r}_K(t)=\sup_{\varnothing\in K}\left\|S_2(t)\varnothing\right\|_{\mathcal{H}} \to 0,\ t \to +\infty, \tag{1.6}$$

其中 K 是 $\mathcal{H}$ 中任一个有界吸收集。从而 $\mathcal{A}$ 是全局吸引子。

本文主要结论如下。

定理 1.1. 假设 $g \in L^2(Q)$ 和条件【K】满足，则初边值问题(1.1)~(1.3)在 $H_0^1(Q)$ 中有一个全局吸引子它是紧致不变的，并且吸引 $H_0^1(Q)$ 范数的每一个有界集合。

证：根据定理 2.1，半群 $\{S(t)\}_{t\geq0}$ 在 $H_0^1(Q)$ 中有一个有界吸收集。根据引理 3.1 可知，解 u 的一部分 ψ 随时间指数衰减到 0；根据引理 3.2 可知，解 u 的另一部分 w 具有高阶正则性，即在更高阶的空间 $H^{1+a}(Q)$ 内有界，从而序列 $\{w(t)\}_{t\geq0}$ 在 $H_0^1(Q)$ 内具有收敛子列。因 $u=w+\psi$，从而说明解半群 $\{S(t)\}_{t\geq0}$ 是渐近紧性的。因此，遵循命题 1.1，可以证明方程(1.1)在 $H_0^1(Q)$ 中存在一个全局吸引子。

注：本文结论与[24]的一样，但在证明解半群的渐近紧性时所采用的方法有所不同。[24]中通过尾端估计证明解半群的渐近紧性，本文采用高阶正则性的方法。

1.2. 本文的结构安排

本文的组织结构如下。我们将简要叙述 BBM 方程解的适定性，这是标准方法。通过能量方程法和 Gronwall 引理，我们证明了解的适定性及有界吸收集的存在性。本文主要为了证明解半群的紧性，我们引入高阶正则性的方法来处理无界域上 Sobolev 紧性的缺失，将方程的解半群分解，通过说明一部分是在时间趋于无穷时是无穷小的，另一部分是在时间趋于无穷时，在更高正则性的空间有界，从而说明半群渐近紧性的成立。

我们在此定义了一些本文证明用到的符号。我们用 $\|\cdot\|_{L^p(Q)}$ 和 $\|\cdot\|_{H_0^1(Q)}$ 表示 $L^p(Q)$ 和的 $H_0^1(Q)$ 空间中的范数，定义为：

$$\|u\|_{L^p(Q)}^p=\int_Q|u(t)|^p\,\mathrm{d}t,$$

和

$$\|u\|_{H_0^1(Q)}^2=\|u\|_{L^2(Q)}^2+\|\nabla u\|_{L^2(Q)}^2.$$

相应的内积分别记作 $(\cdot,\cdot)_{L^2(Q)}$ 和 $(\cdot,\cdot)_{H_0^1(Q)}$。为了简化符号，用 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 分别表示 $L^2(Q)$ 中的范数和相应的内积。证明过程中的字母 c 是一个通用的正常数。

2. 有界吸收集

在本节中，我们将研究 BBM 方程的在三维通道中存在有界吸收集。

引理 2.1. 假设 $g\in L^2(Q)$，则存在一个正常数 M_1，仅取决于数据 ν,Q,g，使得对于任何常数 $M_0>0$，问题(1.1)~(1.3)遵循 $\|u_0\|_{H_0^1(Q)}\le M_0$ 的解 u 满足

$$\|u(t)\|_{H_0^1(Q)}\le M_1,\ \forall t\ge T_1,$$

其中 $T_1=T_1(\nu,Q,g,M_0)$。

并且，存在一个正常数 M_2，仅取决于数据 ν,Q,g，使得

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_{H_0^1(Q)}\le M_2,\ \forall t\ge T_2,$$

其中 $T_2=T_2(\nu,Q,g,M_0)$。

证： 证明过程与[24]中类似。

根据引理 2.1 容易看出，在条件【K】下，BBM 方程(1.1)~(1.3)的初边值问题在 $H_0^1(Q)$ 中是适定的[22]。换句话说，对于每一个 $u\in H_0^1(Q)$，问题(1.1)~(1.3)都有一个唯一的解，对于每个 $T>0$ 的 $u\in C^0\left([0,+\infty),H_0^1(Q)\right)$ 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\in L^\infty\left(0,T;H_0^1(Q)\right)$。因此，这是存在的一个与问题(1.1)~(1.3)相关联的解半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$。这样对于每一个 $t\ge0, S(t):H_0^1(Q)\to H_0^1(Q)$，满足 $S(t)u_0=u(t)$。

给定 $\mathcal{B}=\left\{u\in(Q):\|u\|_{H_0^1(Q)}\le M_1\right\}$。通过引理 2.1，我们在这里陈述以下定理。

定理 2.1. 球 $\mathcal{B}$ 是 $H_0^1(Q)$ 中半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 的有界吸收集。也就是说，对于 $H_0^1(Q)$ 中的每个有界集 X，都存在一个 $T=T(X)$，使得 $S(t)X\in B$， $\forall t\ge T$。

3. 半群的渐近紧性

在本节我们考虑利用尾端估计和高阶正则性去证明解半群的渐近紧性。设 u 即是方程(1.1)式满足条件(1.2)~(1.4)式的解。现在将方程的解分解为 $u=\psi+w$，其中第一项 ψ 满足(3.1)式，需要证明当时间趋于无穷时，在能量空间 $H_0^1(Q)$ 中收敛到 0；而第二项 w 满足(3.2)式，需要证明当时间大于某个值时，在一个更高正则性的空间一致有界，从而根据高阶正则性，我们可以得到解半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 的渐近紧性。具体操作如下：我们将(1.1)式中的外力项分解为 $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$，其中 $g_1(x)$ 满足当 $t\to t_0$ 时，$g_1(x)\to0, g_2(x)\in L^2(Q)$；非线性项分解为 $\nabla\cdot\bar{F}(u)=\nabla\cdot\bar{F}(\psi)+\nabla\cdot\bar{F}(w)$，并且满足条件【K】。这样的分解是处理反应扩散方程渐近紧性的常用技巧，根据初始条件特殊的选取方式，可以让分解的两部分证明起来都比较方便，这将在后续的证明过程中体现。

考虑起始条件满足(1.1)~(1.4)式的 BBM 方程，u 即是方程的解。同时分解为 $u=\psi+w$，这里 ψ 是以下方程初值问题的解

$$\begin{cases}\psi_t-\Delta\psi_t-\nu\Delta\psi+\nabla\cdot\bar{F}(\psi)=g_1(x),\\ \psi|_Q=0,\\ \psi|_{t=0}=\psi_0(x),\ \psi_t|_{t=0}=\psi_1(x).\end{cases}\tag{3.1}$$

而解 u 的另一部分 w 满足

$$\begin{cases} w_t-\Delta w_t-\nu\Delta w+\nabla\cdot\vec{F}(u)-\nabla\cdot\vec{F}(\psi)=g_2(x), \\ w|_Q=0, \\ w|_{t=0}=0,\ \ w_t|_{t=0}=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

对于这两部分，我们有如下结论：

引理 3.1. 假设(3.1)式成立且 $g_1(x)\to 0$，当时间趋于无穷时。对于任何常数 $R_1>0$，问题(1.1)~(1.3)遵循 $\|\varphi_0\|_{H_0^1(Q)}\le R_1$ 的解 u 的一部分 ψ 满足

$$\|\psi(t)\|_{H_0^1(Q)}\le 0,\ \forall t\ge T_3, \tag{3.3}$$

当 $T_3\to\infty$ 时成立。

证： 证明思路与[24]中引理 2.1 类似。

将(3.1)式中的方程与 ψ 在 $H_0^1(Q)$ 上作内积，再根据初值边界条件(1.2)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\psi\|^2+\|\nabla\psi\|^2\right)+\nu\|\nabla\psi\|^2+\left(\nabla\cdot\vec{F}(\psi),\psi\right)=\left(g_1(x),\psi\right). \tag{3.4}$$

设 $\vec{G}=\int_0^s\vec{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是 $\vec{F}$ 的不定积分，则有 $\nabla\cdot\vec{G}(\psi)=\vec{F}(\psi)\cdot\nabla\psi$。运用边界条件(3.4)并使用分部积分，我们有

$$\left(\nabla\cdot\vec{F}(\psi),\psi\right)_{L^2(Q)}=-\left(\vec{F}(\psi),\nabla\psi\right)_{L^2(Q)}=-\int_Q\nabla\cdot\vec{G}(\psi)\mathrm{d}x=0. \tag{3.5}$$

通过 Poincaré 不等式，我们有

$$\|\nabla\psi\|^2=\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|^2\ge\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|^2+\frac{1}{2\lambda^2}\|\psi\|^2 \tag{3.6}$$

其中 λ 是正常数。

接下来，我们现在考虑(3.4)的右侧。通过 Hölder 不等式，我们有

$$\left|\left(g_1(x),\psi\right)\right|\le\|g_1\|\|\psi\|\le\frac{\nu}{4\lambda^2}\|\psi\|^2+\frac{\lambda^2}{\nu}\|g_1\|^2, \tag{3.7}$$

其中 $\lambda>0, C_1>0$ 是常数。

根据(3.5)~(3.7)式，能量方程式(3.4)式得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\psi\|^2+\|\nabla\psi\|^2\right)+\frac{\nu}{2}\|\nabla\psi\|^2+\frac{\nu}{2\lambda^2}\|\psi\|^2 \\ &\le\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\psi\|^2+\|\nabla\psi\|^2\right)+\nu\|\nabla\psi\|^2+\left(\nabla\cdot\vec{F}(\psi),\psi\right) \\ &=\left(g_1(x),\psi\right) \\ &\le\frac{\nu}{4\lambda^2}\|\psi\|^2+\frac{\lambda^2}{\nu}\|g_1\|^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\psi\|_{L^2(Q)}^2+\|\nabla\psi\|_{L^2(Q)}^2\right)+\nu\left(\frac{1}{2\lambda^2}\|\psi\|_{L^2(Q)}^2+\|\nabla\psi\|_{L^2(Q)}^2\right)\le\frac{2\lambda^2}{\nu}\|g_1\|^2. \tag{3.9}$$

现设 $\eta=\min\left(1,\frac{1}{2\lambda^2}\right)$。对于所有的 $t\ge 0$，我们都

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|_{H_0^1(Q)}^2+\nu\eta\|\psi\|_{H_0^1(Q)}^2\le\frac{2\lambda^2}{\nu}\|g_1\|^2, \tag{3.10}$$

其中 λ,ν 为正常数。

由 Gronwall 引理得

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{H_0^1(Q)}^2&=\mathrm{e}^{-\nu\eta t}\cdot\|\psi_0\|_{H_0^1(Q)}^2+t\mathrm{e}^{-\nu\eta t}\frac{2\lambda^2}{\nu}\|g_1(x)\|^2u\\&=\mathrm{e}^{-\nu\eta t}\cdot\|\psi_0\|_{H_0^1(Q)}^2+\frac{\nu\eta t}{\mathrm{e}^{\nu\eta t}}\cdot\frac{2\lambda^2}{\nu^2\eta}\|g_1(x)\|^2\\&\le\mathrm{e}^{-\nu\eta t}R_1^2+\frac{2\lambda^2}{\nu^2\eta}\|g_1(x)\|^2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

当 $t\ge T_3\to\infty$ 时， $\mathrm{e}^{-\nu\eta t}\to0,\|g_1(x)\|\to0$，则

$$\|\psi\|_{H_0^1(Q)}^2\le0. \tag{3.12}$$

即 ψ 随时间呈指数衰减。证毕。

下面证明解 u 的另一部分 w 具有高阶正则性，即证明 w 在更高正则性的空间内有界。在证明之前，我们需要先做如下定义。

我们用 $H^s=D(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$， $s\in\mathbb{R}$，来表示具有以下范数的希尔伯特空间

$$\|u\|_{H^s(Q)}=\left(\int_Q\left(1+|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2\right)^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.13}$$

这里 $\hat{u}$ 表示 Fourier 变换

$$\hat{u}(\xi)=\int_Q\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}u(x)\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

对于任意的 $a\ge0$，通过 Fourier 变换定义分数阶微分算子 Λ^a，

$$\widehat{\Lambda^a u}=|\xi|^a\hat{u}(\xi). \tag{3.15}$$

特别地，如果 $a=2$，那么 Λ^a 得到的是拉普拉斯(Laplace)算子 $-\Delta$，则有 $\Lambda^2=-\Delta$，即 $\Lambda=\sqrt{-\Delta}$ 。从而，对于 $0<a<\dfrac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^a(Q)}^2&=\|w\|_{D(-\Delta)^{\frac{a}{2}}}^2\\&=\left((-\Delta)^{\frac{a}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{a}{2}}u\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\left(\Lambda^{\frac{a}{2}}u,\Lambda^{\frac{a}{2}}u\right)=\|w\|_{D(\Lambda^a)}^2=\|\Lambda^a w\|_{L^2(Q)}^2.$$

同理，可得

$$\|w\|_{H^{1+a}(Q)}^2=\|\Lambda^{1+a}w\|_{L^2(Q)}^2. \tag{3.17}$$

再根据引理 2.1 可知，ψ,u 在 $H_0^1(Q)$ 内有界。而 $w=u-\psi$，故 w 在 $H^a(Q)$ 内有界，即

$$\|w\|_{H^a(Q)}^2\le\rho_0, \tag{3.18}$$

其中 ρ_0 为正常数。

引理 3.2 假设(3.2)式满足且 $g_2 \in L^2(Q)$。如果存在一个正常数 M_3，仅取决于数据 ν, Q, g，使得对于任何常数 $R_1 > 0$，问题(1.1)~(1.3)遵循 $\|w_0\|_{H_0^1(Q)} \le R_1$ 的 w 满足

$$\|w(t)\|_{H_0^{1+a}(Q)} \le M_3,\ \forall t \ge T_1, \tag{3.19}$$

其中 $C = C(\nu, Q, g, M_0)$。

证：将 (1.1)式中的方程与 $\Lambda^{2a} w \left(a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right)$ 在 $L^2(Q)$ 上作内积得

$$\begin{aligned}&\left(w_t, \Lambda^{2a} w\right)_{L^2(Q)} - \left(\Delta w_t, \Lambda^{2a} w\right)_{L^2(Q)} - \nu\left(\Delta w, \Lambda^{2a} w\right)_{L^2(Q)} \\ &+ \left(\nabla \cdot \vec{F}(u) - \nabla \cdot \vec{F}(\psi), w\right)_{L^2(Q)} = \left(g_2(x), \Lambda^{2a} w\right)_{L^2(Q)},\end{aligned} \tag{3.20}$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\Lambda^a w\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2(Q)}^2\right) + \nu\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2(Q)}^2 \\ &+ \left(\nabla \cdot \vec{F}(u) - \nabla \cdot \vec{F}(\psi), \Lambda^{2a} w\right) = \left(g_2(x), \Lambda^{2a} w\right).\end{aligned} \tag{3.21}$$

因

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{F}(u) - \nabla \cdot \vec{F}(\psi) &= \vec{F}'(u) \cdot \nabla u - \vec{F}'(\psi) \cdot \nabla \psi \\ &= \left(f(u) - f(\psi)\right) \cdot \nabla u + f(\psi) \cdot \nabla w,\end{aligned} \tag{3.22}$$

则(3.21)式可化为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\Lambda^a w\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2(Q)}^2\right) + \nu\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= -\left(\left(f(u) - f(\psi)\right) \cdot \nabla u, \Lambda^{2a} w\right) - \left(f(\psi) \cdot \nabla w, \Lambda^{2a} w\right) \\ &+ \left(g_2(x), \Lambda^{2a} w\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

对(3.23)右边第一项中非线性函数项运用莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}&\left|-\left(\left(f(u) - f(\psi)\right) \cdot \nabla u, \Lambda^{2a} w\right)\right| \\ &= \left|\int_Q \left(f(u) - f(\psi)\right) \cdot \nabla u \cdot \Lambda^{2a} w \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_Q f'(\xi) \cdot w \cdot \nabla u \cdot \Lambda^{2a} w \mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_Q c_2\left(1 + |u| + |\psi|\right) \cdot w \cdot \nabla u \cdot \Lambda^{2a} w \mathrm{d}x\right| \\ &\le c_2 \int_Q |\nabla u| \cdot \left|w \cdot \Lambda^{2a} w\right| \mathrm{d}x + c_2 \int_Q |u| \cdot |\nabla u| \cdot \left|w \cdot \Lambda^{2a} w\right| \mathrm{d}x \\ &+ c_2 \int_Q |\psi| |\nabla u| \cdot \left|w \cdot \Lambda^{2a} w\right| \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中 $\xi \in (\psi, u)$， c_2 是正常数。

事实上，因 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，所以 $2a \le a + 1$，从而有 $\left\|\Lambda^{2a} w\right\|_{L^2} \le \left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}$。而根据 Sobolev 嵌入定理，即 $H^1(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$， $2 \le p \le 6$，它遵循

$$\|u\|_p \le c\|u\|_{H_0^1(Q)},\ \forall u \in H_0^1(Q),\ 2 \le p \le 6, \tag{3.25}$$

其中 $c = c(p)$ 是一个正常数。从而(3.24)式的最后一个不等式中的各项可得

$$\begin{aligned} c_2\int_Q |\nabla u|\cdot\left|w\cdot\Lambda^{2a}w\right|\mathrm{d}x &\le c_2\|\nabla u\|_{L^2(Q)}\cdot\left\|w\cdot\Lambda^{2a}w\right\|_{L^2(Q)} \\ &\le c_3\|\nabla u\|_{L^2(Q)}\cdot\left\|w\cdot\Lambda^{2a}w\right\|_{L^3(Q)} \\ &\le c_3\|\nabla u\|_{H^1(Q)}\cdot\left\|w\cdot\Lambda^{2a}w\right\|_{L^3(Q)} \\ &\le c_4\left\|w\cdot\Lambda^{2a}w\right\|_{L^3(Q)} \\ &\le c_5\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le \frac{2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2 \\ &\le \frac{2{\rho_0}^2}{\nu} + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.26}$$

其中 $c_2 \sim c_5$， ν 为正常数。

$$\begin{aligned} c_2\int_Q |u|\cdot|\nabla u|\cdot\left|w\cdot\Lambda^{2a}w\right|\mathrm{d}x &\le c_2\|u\|_{L^6}\cdot\|\nabla u\|_{L^2}\cdot\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le c_6\|u\|_{H^1}\cdot\|u\|_{H^1}\cdot\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le c_7\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le \frac{2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2 \\ &\le \frac{2{\rho_0}^2}{\nu} + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.27}$$

其中 c_6, c_7, ν 为正常数。

$$\begin{aligned} c_2\int_Q |\psi||\nabla u|\cdot\left|w\cdot\Lambda^{2a}w\right|\mathrm{d}x &\le c_2\|\psi\|_{L^6}\cdot\|\nabla u\|_{L^2}\cdot\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le c_8\|\psi\|_{H^1}\cdot\|u\|_{H^1}\cdot\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le c_9\|w\|_{L^{\frac{6}{1-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^{\frac{6}{1+2a}}} \\ &\le \frac{2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2 \\ &\le \frac{2{\rho_0}^2}{\nu} + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中 c_8, c_9, ν 为正常数。

根据(3.26)~(3.28)式，(3.24)式可化为

$$\begin{aligned} \left|-\left(\left(f(u)-f(\psi)\right)\cdot\nabla u, \Lambda^{2a}w\right)\right| &\le 3\left(\frac{2{\rho_0}^2}{\nu} + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2\right) \\ &\le \rho_1 + \frac{3\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

其中 ρ_1, R_1, ν 为正常数。

对(3.23)右边第二项，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|-\left(f(\psi)\cdot\nabla w, \Lambda^{2a} w\right)\right| \\
&= \int_Q f(\psi)\cdot\nabla w\cdot\Lambda^{2a} w \mathrm{d}x \\
&\le \left|\int_Q c_{10}\left(1+|\psi|^2\right)\nabla w\cdot\Lambda^{2a} w \mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_Q c_{10}|\nabla w|\cdot\left|\Lambda^{2a} w\right|\mathrm{d}x + \int_Q c_{10}|\psi|^2\cdot|\nabla w|\cdot\left|\Lambda^{2a} w\right|\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

同理，对(3.24)式的最后一个不等式中的各项分别运用 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理得

$$
\begin{aligned}
\int_Q c_{10}|\nabla w|\cdot\left|\Lambda^{2a} w\right|\mathrm{d}x &\le c_{10}\|\nabla w\|_{L^2}\cdot\left\|\Lambda^{2a} w\right\|_{L^2} \\
&\le c_{11}\|w\|_{H^1}\cdot\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2} \\
&\le \frac{2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{2\rho_0{}^2}{\nu} + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

其中 $c_{10}, c_{11}, \nu, \rho_0$ 为正常数。

$$
\begin{aligned}
\int_Q c_{10}|\psi|^2\cdot|\nabla w|\cdot\left|\Lambda^{2a} w\right|\mathrm{d}x &\le c_{10}\left\||\psi|^2\right\|_{L^3}\cdot\|\nabla w\|_{L^{\frac{6}{3-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a} w\right\|_{L^{\frac{6}{3+a}}} \\
&\le c_{12}\left\||\psi|^2\right\|_{H^1}\cdot\|\nabla w\|_{L^{\frac{6}{3-2a}}}\cdot\left\|\Lambda^{2a} w\right\|_{L^{\frac{6}{3+a}}} \\
&\le c_{13}\|w\|_{H^1}\cdot\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2} \\
&\le \frac{2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{2\rho_0{}^2}{\nu} + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

其中 $c_{12}, c_{13}, \nu, \rho_0$ 为正常数。

根据(3.31)，(3.32)式，(3.30)式可化为

$$
\begin{aligned}
\left|-\left(f(\psi)\cdot\nabla w, \Lambda^{2a} w\right)\right| &\le 2\left(\frac{2}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2\right) \\
&\le \frac{4}{\nu}\|w\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{4}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{4\rho_0{}^2}{\nu} + \frac{\nu}{4}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \rho_2 + \frac{\nu}{4}\left\|\Lambda^{a+1} w\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

其中 ρ_2, R_1, ν 为正常数。

同理，对(3.23)右边第三项，我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\left(g_2(x),\Lambda^{2a}w\right)\right| &= \left|\int_Q g_2(x)\cdot\Lambda^{2a}w\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_Q \left|g_2(x)\right|\left|\Lambda^{2a}w\right|\mathrm{d}x \\
&\le c_{14}\left\|g_2(x)\right\|_{L^2}\cdot\left\|\Lambda^{2a}w\right\|_{L^2} \\
&\le \frac{2}{\nu}\left\|g_2(x)\right\|_{L^2}^2+\frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \rho_3+\frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

其中 c_{14},ρ_3,ν 为正常数。

根据(3.30)，(3.33)，(3.34)式，(3.23)式可化为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\Lambda^a w\right\|_{L^2(Q)}^2+\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2(Q)}^2\right)+\nu\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\le \rho_1+\frac{3\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2+\rho_2+\frac{\nu}{4}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2+\rho_3+\frac{\nu}{8}\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

化简得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\Lambda^a w\right\|_{L^2(Q)}^2+\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2(Q)}^2\right)+\frac{\nu}{2}\left(\left\|\Lambda^a w\right\|_{L^2(Q)}^2+\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2(Q)}^2\right) \\
&\le 2\left(\rho_1+\rho_2+\rho_3\right)\le\rho,
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

其中 ρ 为正常数。

由 Gronwall 引理得

$$
\left\|\Lambda^a w\right\|_{L^2(Q)}^2+\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2(Q)}^2\le C,
\tag{3.37}
$$

其中 $C=C(\rho)>0$ 为常数。

根据(3.18)即

式得

$$
\left\|\Lambda^{a+1}w\right\|_{L^2(Q)}^2\le C-\rho_0{}^2,
\tag{3.38}
$$

即

$$
\left\|w\right\|_{H^{1+a}}^2\le M_3.
\tag{3.39}
$$

从而 w 具有高阶正则性。证毕。

4. 讨论

本文主要研究了 $H_0^1(Q)$ 上方程全局吸引子的存在性，此时非线性项的增长阶严格小于 2 阶。此时我们可以使用 Sobolev 嵌入处理运算，而当阶数不小于 2 阶时，需要采用其他的方法处理半群的渐近紧性，见[30]。本文的创新点是运用“高阶正则性”证明解半群在更高阶的空间内有界，从而得到紧性，再结合有界吸收集，根据第一节中的判定准则证明了 BBM 方程在无界域中全局吸引子的存在性。在第二节中，我们运用一些定理、不等式及能量方程法证明了解的适定性及有界吸收集的存在性。在三节中，为了证明解半群的紧性，我们引入高阶正则性的方法来处理无界域上 Sobolev 紧性的缺失，将方程的解半群分解，通过说明一部分是在时间趋于无穷时是无穷小的，另一部分是在时间趋于无穷时，在更高正则性的空间有界，从而说明半群渐近紧性的成立。

参考文献

[1] Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J. (1972) Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **272**, 47-78.

[2] Avrin, J. (1987) The Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation in N with Singular Initial Data. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **11**, 139-147. https://doi.org/10.1016/0362-546x(87)90032-0

[3] Avrin, J. and Goldstein, J.A. (1985) Global Existence for the Benjamin-Bona-Mahony Equation in Arbitrary Dimensions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **9**, 861-865. https://doi.org/10.1016/0362-546x(85)90023-9

[4] Chen, P., Wang, R. and Zhang, X. (2024) Asymptotically Autonomous Robustness of Random Attractors for 3D BBM Equations Driven by Nonlinear Colored Noise. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **56**, 254-274. https://doi.org/10.1137/22m1529129

[5] Yunmei, C. (1988) Remark on the Global Existence for the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equations in Arbitrary Dimension. *Applicable Analysis*, **30**, 1-15. https://doi.org/10.1080/00036818808839789

[6] Goldstein, J.A. and Wichnoski, B.J. (1980) On the Benjamin-Bona-Mahony Equation in Higher Dimensions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **4**, 665-675. https://doi.org/10.1016/0362-546x(80)90067-x

[7] Larkin, N.A. and Vishnevskii, M.P. (2012) Decay of the Energy for the Benjamin-Bona-Mahony Equation Posed on Bounded Intervals and on a Half-Line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **35**, 693-703. https://doi.org/10.1002/mma.1594

[8] Wang, M. (2023) Improved Lower Bounds of Analytic Radius for the Benjamin-Bona-Mahony Equation. *The Journal of Geometric Analysis*, **33**, Article No. 18. https://doi.org/10.1007/s12220-022-01091-y

[9] Wang, M. (2024) Well Posedness and Global Attractors for the 3D Periodic BBM Equation Below the Energy Space. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **36**, 3599-3621. https://doi.org/10.1007/s10884-023-10253-7

[10] Wang, X., Xu, R. and Yang, Y. (2024) Long-Time Behavior for Fourth Order Nonlinear Wave Equations with Dissipative and Dispersive Terms. *Applied Numerical Mathematics*, **199**, 248-265. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2023.01.010

[11] Yang, H. (2023) Convergence and Superconvergence Analysis of Energy-Preserving Crank-Nicolson Galerkin Method for the Benjamin-Bona-Mahony Equation. *International Journal of Computer Mathematics*, **100**, 1212-1227. https://doi.org/10.1080/00207160.2023.2175176

[12] Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K. and Polat, M. (1999) Attractors for the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Journal of Differential Equations*, **157**, 439-451. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3634

[13] Chueshov, I., Polat, M. and Siegmund, S. (2004) Gevrey Regularity of Global Attractors for Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. *The Journal of Mathematical Physics*, *Analysis*, *Geometry*, **11**, 226-242.

[14] Kang, J. (2016) Attractors for Autonomous and Nonautonomous 3D Benjamin-Bona-Mahony Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **274**, 343-352. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.10.086

[15] Wang, B. (1997) Strong Attractors for the Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Applied Mathematics Letters*, **10**, 23-28. https://doi.org/10.1016/s0893-9659(97)00005-0

[16] Wang, B. (1998) Regularity of Attractors for the Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **31**, 7635-7645. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/37/021

[17] Yang, X. (2011) Global Attractor for the Weakly Damped Forced KdV Equation in Sobolev Spaces of Low Regularity. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **18**, 273-285. https://doi.org/10.1007/s00030-010-0095-9

[18] Zhang, Q. and Li, Y. (2020) Backward Controller of a Pullback Attractor for Delay Benjamin-Bona-Mahony Equations. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **26**, 423-441. https://doi.org/10.1007/s10883-019-09450-9

[19] Zhao, M., Yang, X., Yan, X. and Cui, X. (2020) Dynamics of a 3D Benjamin-Bona-Mahony Equations with Sublinear Operator. *Asymptotic Analysis*, **121**, 75-100. https://doi.org/10.3233/asy-201601

[20] Guo, Y., Wang, M. and Tang, Y. (2014) Higher Regularity of Global Attractor for a Damped Benjamin-Bona-Mahony Equation on R. *Applicable Analysis*, **94**, 1766-1783. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.946561

[21] Huang, J., Tang, Y. and Wang, M. (2021) Singular Support of the Global Attractor for a Damped BBM Equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, **26**, 5321. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2020345

[22] Stanislavova, M. (2005) On the Global Attractor for the Damped Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **2005**, 824-832.

[23] Stanislavova, M., Stefanov, A. and Wang, B. (2005) Asymptotic Smoothing and Attractors for the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation on $\mathbf{R}^3$. *Journal of Differential Equations*, **219**, 451-483. https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.08.004

[24] Wang, B., Fussner, D.W. and Bi, C. (2007) Existence of Global Attractors for the Benjamin-Bona-Mahony Equation in

Unbounded Domains. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, **40**, 10491-10504. https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/34/007

[25] Wang, M. (2014) Long Time Dynamics for a Damped Benjamin-Bona-Mahony Equation in Low Regularity Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **105**, 134-144. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.04.013

[26] Ball, J.M. (1997) Continuity Properties and Global Attractors of Generalized Semiflows and the Navier-Stokes Equations. *Journal of Nonlinear Science*, **7**, 475-502. https://doi.org/10.1007/s003329900037

[27] Ball, J. (2003) Global Attractors for Damped Semilinear Wave Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **10**, 31-52. https://doi.org/10.3934/dcds.2004.10.31

[28] Chueshov, I. and Schmalfuss, B. (2004) Parabolic Stochastic Partial Differential Equations with Dynamical Boundary Conditions. *Differential and Integral Equations*, **17**, 751-780. https://doi.org/10.57262/die/1356060328

[29] Wang, M. (2015) Global Attractor for Weakly Damped gKdV Equations in Higher Sobolev Spaces. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, **35**, 3799-3825. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.3799

[30] Wan, L., Xu, Y.Y. and Zhang, T.F. (2005) Existence of the Global Attractors of the Benjamin-Bona-Mohony Equation in Three-Dimensional Channel. *Acta Mathematica Scientia*.

[31] Ladyzhenskaya, O. (1991) Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511569418

[32] Wang, B. (1999) Attractors for Reaction-Diffusion Equations in Unbounded Domains. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **128**, 41-52. https://doi.org/10.1016/s0167-2789(98)00304-2

[33] Zheng, S.M. (2004) Nonlinear Evolution Equations. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 133, Chapman & Hall/CRC.

附　录

为了读者方便阅读，这里介绍了全局吸引子 $\mathcal{A}$ 的概念。

定义 0.1. [33] 假设 $\mathcal{H}$ 是一个完备的度量空间，$S(t)$ 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的非线性 C_0-算子半群。则称集合 $\mathcal{A}\in\mathcal{H}$ 是吸引子，如果满足以下条件：

(1) $\mathcal{A}$ 是一个不变集，即

$$S(t)\mathcal{A}=\mathcal{A},\ t\geq 0; \tag{A1}$$

(2) $\mathcal{A}$ 具有一个开放的邻域 $\mathcal{B}$，对于任何元素 $u_0\in\mathcal{B}$，当 $t\geq 0$ 时，$S(t)u_0$ 收敛到 $\mathcal{A}$，即

$$dist\left(S(t)u_0,\mathcal{A}\right)=\inf_{y\in\mathcal{A}} dist\left(S(t)u_0,y\right)\to 0. \tag{A2}$$

如果 $\mathcal{A}$ 是吸引子，则满足(A2)式的最大开集 $\mathcal{U}$ 成为 $\mathcal{A}$ 的吸引集。

定义 0.2. [33] 如果 $\mathcal{A}$ 是一个紧吸引子，并且吸引 $\mathcal{H}$ 中的有界集，那么称 $\mathcal{A}$ 为全局吸引子或者通用吸引子。