**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2025, 14(6), 280-291
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146319

# 离散时间阶段结构种群模型持久性的临界域大小

**张　毅**

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2025年5月19日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月20日

## 摘　要

种群持续生存所需的临界域大小是生态学中的一个重要问题，它与生境的大小和配置密切相关。考虑到自然界中大多数物种表现出高度结构化的生命周期，我们在$n$维空间的有界域$\Omega$中分析了一个由脉冲反应扩散方程控制的离散时间阶段结构种群模型。域$\Omega$的外部被认为是不利的，但不能完全阻止种群扩散。因此，我们采用Robin边界条件来描述边界上的种群动态，并提供了$n$维超立方体和带半径的球体形状的域的临界结果。具体来说，我们利用主特征值理论和上下解的方法证明了当种群所居住的栖息地大小小于栖息地的临界域大小时，种群将会灭绝。反之，当生境空间范围大于临界域大小时，种群可以持续生存。

## 关键词

临界域大小，离散时间混合模型，脉冲反应－扩散方程，Robin边界条件

# Critical Domain Sizes for Persistence in a Discrete-Time Stage-Structured Population Model

**Yi Zhang**

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: May 19th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 20th, 2025

## Abstract

**The critical domain size required for population persistence is a significant problem in ecology,**

文章引用: 张毅. 离散时间阶段结构种群模型持久性的临界域大小[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 280-291.
DOI: 10.12677/aam.2025.146319

**which is closely associated with habitat size and configuration. Given that most species in nature exhibit highly structured life cycles, we analyze a discrete-time stage-structured population model governed by an impulsive reaction-diffusion equation within a bounded domain Ω in an *n*-dimensional space. The exterior of the domain Ω is considered unfavorable but does not completely prevent population dispersal. We thus employ Robin boundary conditions to describe population dynamics at the boundary and provide critical results for domains shaped as *n*-dimensional hypercube and sphere with radius R. Specifically, we employ principal eigenvalue theory and the method of upper and lower solutions to demonstrate that when the habitat size where the population resides is smaller than the critical domain size of the habitat, the population will become extinct. Conversely, when the spatial extent of habitat is larger than the critical domain size, the population can persist and survive.**

## Keywords

**Critical Domain Size, Discrete-Time Hybrid Model, Impulsive Reaction-Diffusion Equation, Robin Boundary Conditions**



## 1. 引言

快速的全球变暖导致了等温线的变化，导致物种生存适宜栖息地的空间位置和形状发生了前所未有的变化。这导致了原始生态位的重大改变，这是生态系统中种群生存所需的最低栖息地阈值[1]。如此快速的气候变化极大地挑战了物种维持其固有生态位的能力，一些物种现在面临着严重的灭绝风险[2]。为了应对这些挑战，个体必须迁移到新的栖息地或适应当地的环境变化，以维持种群生存[3]。因此，气候变化不仅威胁到本地生态系统内物种的生存，而且促进了物种的跨区域迁移。在这一过程中，由于栖息地丧失或环境退化而被迫迁移的物种可以在新环境中迅速繁殖和传播，这通常是由于缺乏自然捕食者、竞争力低或适应性高。这导致物种入侵，对当地生态系统构成严重威胁，包括本地物种的迁移，生态平衡的破坏，甚至引发当地物种的灭绝[4]。

在自然生态系统中，物种的迁移和入侵往往与高度结构化的生命周期有关，这种结构化的生命周期增强了入侵物种在新环境中适应和生存的能力。例如，许多物种(如鱼类、大型哺乳动物和植物) 表现出明显的季节性繁殖模式，不同生命阶段的物种有不同的栖息地需求[5]。由于经典的反应扩散方程不能很好地描述这些种群的持久性和空间扩散，许多研究人员开发了不同类型的混合动力系统来模拟它们的空间动力学。在这些混合模型中，离散情形可以用脉冲方程来描述，许多生物现象均可用脉冲方程来建模，如物种的季节性繁殖、渔业捕捞率、化疗对癌细胞的影响[6]。

为了更准确地模拟入侵物种的适应和传播，最近的研究集中在各种空间生态模型上，特别是脉冲反应－扩散方程。这些模型可以更好地捕捉这些物种的独特空间动态，并在文献[7]-[15]中得到了广泛的探索。为了模拟混合阶段的种群动态，Lewis 等人[16]中提出了下面的脉冲反应－扩散模型：

$$\begin{cases} u_t^{(n)} = d\Delta u_n - \alpha u_n - \gamma u_n^2, & x \in (-\infty,+\infty), \quad t \in [0,1], \\ u_n(x,0) = g(N_n(x)), & x \in (-\infty,+\infty), \quad t = 0, \\ N_{n+1}(x) = u_n(x,1), & x \in (-\infty,+\infty). \end{cases} \tag{1}$$

该研究在有界域上建立了种群生存的临界域大小，并给出如下表达式：

$$\ell^{*}=\pi\sqrt{\frac{d}{\ln\left(g'(0)\mathrm{e}^{\alpha}\right)}}$$

在此基础上，Lin 等人[14]推广了模型(1)，将非线性项替换为更一般的形式，并分别在脉冲增长函数 $g$ 单调和非单调情形下讨论了行波解的存在性。

本文研究具有离散时间阶段结构种群模型持久性的临界域大小。受[5] [17]-[23]研究的启发，为了确定种群生存的临界域大小，我们假设外部环境是不利于种群生存但非完全致命的。考虑到[5]中所提出的阶段结构模型将区域看作是一维的，但在一般情况下，仍需要进一步研究。因此将反应项替换为一般函数，再结合 Robin 边界条件，建立 $n$ 维超立方体上的阶段结构离散种群模型。基于上述假设，建立起一个离散时间阶段结构种群模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_n}{\partial t}=d\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+g\left(u_n\right), & x\in\Omega,\quad t\in(0,\tau),\\[2mm] \dfrac{\partial u_n}{\partial \nu}+hu_n(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\in(0,\tau),\\[2mm] u_n(x,0)=f\left(\mathcal{A}_n(x)\right), & x\in\Omega,\quad t=0,\\[2mm] \mathcal{J}_{n+1}(x)=r_1u_n(x,\tau)+\dfrac{r_2\mathcal{J}_n(x)}{1+c_1\mathcal{J}_n(x)}, & x\in\Omega,\quad \tau\in(0,1],\\[2mm] \mathcal{A}_{n+1}(x)=\dfrac{r_3\mathcal{J}_n(x)}{1+c_1\mathcal{J}_n(x)}+\dfrac{r_4\mathcal{A}_n(x)}{1+c_2\mathcal{A}_n(x)}, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

其中，其中 $u_n(x,t)$ 为第 $n$ 年 $x$ 位置 $t$ 时刻的幼虫(种子)密度，$J_n(x)$ 和 $A_n(x)$ 分别代表幼体和成虫密度，$d$ 为扩散系数，函数 $g$ 用于描述幼虫密度随时间的增长或衰减速率，$f$ 为出生函数，$r_1$ 为幼虫的基础存活率，$r_2$ 为幼体存活到下一年并仍停留在幼体阶段的比例，$r_3$ 为幼体在下一年变为成虫的比例，$r_4$ 为成虫存活到下一年的比例，$r_2+r_3\le 1$，$r_i\in(0,1]$，$i=1,2,3,4$。所有的参数均为正常数。模型(2)的第二个方程代表 Robin 边界条件，$\nu$ 为边界处单位外法向量，$h$ 为边界对种群的阻碍强度。这里 $f$ 代表出生脉冲函数，用来描述第 $n$ 年由成虫繁殖的幼体(种子)密度，这主要用来刻画开始繁殖阶段幼体(种子)密度变化，更加贴合实际要求。一般用 $g$ 来表示幼虫(种子)由于种群内部竞争或者外部威胁从而导致的密度变化，有时表现为正，说明外部生存环境有利于种群生长繁殖，从而使得 $g$ 为增函数。若为负，则表明由于局部资源匮乏、竞争压力大等问题导致密度减小。这与实际自然环境中种群增长规律相符合。考虑到扩散系数 $d$ 受到环境因素产生的复杂变化，例如以非局部扩散方式进行传播，该研究可作为一项独立的方向，因此本文专注于当 $d$ 为正常数的局部扩散。

## 2. 预备知识

为了便于下面的分析，我们首先提供一些符号。设 $H_1$ 表示系统(2)的时间-$\tau$ 解映射，则可以定义一个向量值算子

$$H\left[M_n\right](x)=\begin{pmatrix} r_1H_1\left[f\left(\mathcal{A}_n(x)\right)\right]+\dfrac{r_2\mathcal{J}_n(x)}{1+c_1\mathcal{J}_n(x)}\\[2mm] \dfrac{r_3\mathcal{J}_n(x)}{1+c_1\mathcal{J}_n(x)}+\dfrac{r_4\mathcal{A}_n(x)}{1+c_2\mathcal{A}_n(x)}\end{pmatrix}$$

其中，$M_n=\left(\mathcal{J}_n,\mathcal{A}_n\right)^{\mathrm{T}}$。因此，系统(2)可以重新表述为以下递归关系：

$$\left(\mathcal{J}_{n+1},\mathcal{A}_{n+1}\right)^{\mathrm{T}}=M_{n+1}=H\left[M_n\right](x)$$

假设 $f$ 满足以下条件：

**(A1)** $f$ 是一个连续且正的函数，它满足 $f(0)=0,\ f'(0)>0$，并且存在一个正数 $\mathcal{D}>0$ 使得 $f(\mathcal{A})$ 对 $0<\mathcal{A}\le\mathcal{D}$ 不减小。

**(A2)** 对于一个正数 $\bar{\mathcal{D}}\le\mathcal{D}$，使得 $f(\mathcal{A})\le f'(0)\mathcal{A},0<\mathcal{A}<\bar{\mathcal{D}}$。

**(A3)** 存在可微函数 $\mathbb{K}_1$，满足 $\mathbb{K}_1(0)=\mathbb{K}_1'(0)=0$，还有一个常数 $\tilde{\mathcal{D}}\le D$，使得 $f(\mathcal{A})\ge f'(0)\mathcal{A}-\mathbb{K}_1(\mathcal{A})0<\mathcal{A}\le\tilde{\mathcal{D}}$。

假设 $g$ 满足以下条件：

**(B1)** $g$ 是一个连续函数，满足 $g(0)=0,\ g'(0)\ne0$。

**(B2)** 存在可微函数 $\mathbb{K}_2$，满足 $\mathbb{K}_2(0)=\mathbb{K}_2'(0)=0$，使得 $g'(0)u_n-\mathbb{K}_2(u_n)\le g(u_n)\le g'(0)u_n$，对于 $u_n\ge0$。

考虑将系统(2)在平凡平衡点 $(0,0,0)$ 处进行线性化，进而给出种群在无界区域内扩散和持续的临界条件，那么系统(2)可以简化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_n}{\partial t}=d\dfrac{\partial^2u_n}{\partial x^2}+g'(0)u_n(x,t), & x\in(-\infty,+\infty),\ t\in(0,\tau),\\ u_n(x,0)=f'(0)\mathcal{A}_n(x),\\ \mathcal{J}_{n+1}(x)=r_1u_n(x,\tau)+r_2\mathcal{J}_n(x),\\ \mathcal{A}_{n+1}(x)=r_3\mathcal{J}_n(x)+r_4\mathcal{A}_n(x),\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\tau\in(0,1]$。(3)的前两个方程的解为

$$u_n(x,t)=\mathrm{e}^{g'(0)t}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(0)\mathcal{A}_n(y)k(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中 $k(x)$ 是正态分布

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4dt}},$$

于是可得

$$u_n(x,\tau)=\mathrm{e}^{g'(0)\tau}\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)f'(0)\mathcal{A}_n(y)\mathrm{d}y.$$

将 $u_n(x,\tau)$ 代入(3)的后两项，得

$$\begin{cases}\mathcal{J}_{n+1}(x)=r_1f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-y)\mathcal{A}(y)\mathrm{d}y+r_2\mathcal{J}_n(x),\\ \mathcal{A}_{n+1}(x)=r_3\mathcal{J}_n(x)+r_4\mathcal{A}_n(x).\end{cases}$$

那么算子 $H$ 可以在平凡平衡点 $(0,0)$ 处线性化且表示为矩阵形式

$$H[M](x)=\begin{pmatrix}r_1f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-y)\mathcal{A}(y)\mathrm{d}y+r_2\mathcal{J}(x)\\ r_3\mathcal{J}(x)+r_4\mathcal{A}(x)\end{pmatrix},$$

其中 $M=(\mathcal{J},\mathcal{A})^{\mathrm{T}}$。

受文献[24]和[25]的启发，考虑到种群扩散和持续的条件无法直接计算，因此我们使用 $B_\mu$ 表示线性化算子 $H$ 的矩生成矩阵，而 $\mathcal{J}(x)=\alpha_1\mathrm{e}^{-\mu x},\mathcal{A}(x)=\alpha_2\mathrm{e}^{-\mu x}$，并将结果与 $\mathrm{e}^{\mu x}$ 相乘。则每个常数向量可表示为

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},\ B_\mu\alpha=H\left[\alpha e^{-\mu x}\right]\Big|_{x=0},$$

其中，

$$B_\mu=\begin{pmatrix}r_2 & r_1 f'(0)e^{g'(0)\tau}K(\mu)\\ r_3 & r_4\end{pmatrix},$$

这里 $K(\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mu x}k(x)dx=e^{d\tau\mu^2}$ 是 $k(x)$ 的矩生成函数，其中 $\mu\in(-\infty,+\infty)$， $K(\mu)$ 是收敛的。另外，假定矩阵 $B_\mu$ 对于这个无界域内的任意 $\mu$ 包含有限个正的元素，则认为它是不可约的。基于[25]给出的 Perron-Frobenius 定理，建立了由非负元素组成的非零不可约矩阵具有唯一的正特征值，称为主特征值。可以得到 $B_\mu$ 唯一的正特征值

$$\lambda(\mu)=\frac{(r_4+r_2)+\sqrt{(r_4-r_2)^2+4r_3r_1f'(0)e^{g'(0))\tau+d\tau\mu^2}}}{2}.$$

根据 $\lambda(\mu)$ 的形式可以看出，它在 $\mu=0$ 处有一个最小值。为保证对应系统(3)的解是递增的，对于矩阵 $B_\mu$，假设其主特征值在 $\mu=0$ 满足以下条件

$$\frac{r_1r_3f'(0)e^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}>1. \tag{4}$$

## 3. 主要结果

在 $n$ 维超立方体上构造种群持久性的临界域大小之前，首先考虑多维域中系统(2)的相关特征值问题

$$\begin{cases}-d\varphi(x)=\lambda(\Omega,h)\varphi(x), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}+h\varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\lambda(\Omega,h)$ 表示系统特征值与参数 $\Omega$ 和 $h$ 有关。根据[17]可知(5)在 $i\ge1$ 的特征值序列 $\lambda_i(\Omega,h)$ 存在，该序列是递增发散的。因此 $\lambda_1(h)$ 是第一个特征值。

这里考虑一维区间 $(0,\mathbb{L})$ 上相应的特征值问题。那么特征值问题(5)就可以转化为

$$\begin{cases}-d\Delta\varphi(x)=\lambda(\Omega,h)\varphi(x),\ \Omega=(0,\mathbb{L}),\\ -\varphi'(0)+h\varphi(0)=0,\\ \varphi'(\mathbb{L})+h\varphi(\mathbb{L})=0.\end{cases} \tag{6}$$

假设特征函数的一般形式 $\varphi(x)$ 可以表示为 $\varphi(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$，其中 $k$ 满足

$$k=\sqrt{\frac{\lambda(\Omega,h)}{d}}.$$

对于 $\Omega=(0,\mathbb{L})$，结合边界条件，得到

$$-Bk+hA=0,-Ak\sin(k\mathbb{L})+Bk\cos(k\mathbb{L})+h\left(A\cos(k\mathbb{L})+B\sin(k\mathbb{L})\right)=0,$$

则特征方程可以表示为

$$\tan(k\mathbb{L})=\frac{2hk}{k^2-h^2},\ h>0,$$

则相应的第一特征值是 $\lambda_1(\Omega,h)=dk^2$。

根据[17]中的引理 5.1，得到下面的引理 3.1，它为特征值问题(5)提供了一个技术结果。具体证明与上面的一维情况类似，这里省略。

**引理 3.1.** 假设$(\lambda,\varphi)$是特征值问题(5)的特征值和特征函数对，其中域$\Omega=(0,\mathbb{L}_1)\times\cdots\times(0,\mathbb{L}_n),n\geq1$。那么，特征值可以表示为$\lambda(\Omega,h)=d\left(\left[k^{(1)}\right]^2+\cdots+\left[k^{(n)}\right]^2\right)$，其中$k^{(i)}$是方程

$$\tan\left(k^{(i)}\mathbb{L}_i\right)=\frac{2hk^{(i)}}{\left[k^{(i)}\right]^2-h^2}$$

的正解，对应的特征函数$\varphi(x)$可以写成$\varphi(x)=\varphi^{(1)}(x)+\cdots+\varphi^{(n)}(x)$，每个分量由以下表达式确定

$$\varphi^{(i)}(x)=\frac{h}{k^{(i)}}\sin\left(k^{(i)}x\right)+\cos\left(k^{(i)}x\right).$$

**定理 3.2.** 假设$\Omega$是一个$n$维超立方体，用$\Omega=(0,\mathbb{L})\times\cdots\times(0,\mathbb{L})\subset\mathcal{R}^n,n\geq1$来描述。假设函数$f$满足条件(A1)~(A3)，$g$满足条件(B1)~(B2)，条件(4)成立，则临界域大小为

$$\mathbb{L}^*=\frac{\sqrt{n}}{k_1}\arctan\left(\frac{2hk_1}{k_1^2-h^2}\right),\ k_1=\sqrt{\frac{\ln\frac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}}{d\tau}},$$

其中系统(2)对应$\mathbb{L}^*$如下：

(i) 若$\mathbb{L}<\mathbb{L}^*$，则(2)的解$M_n(x)$满足

$$\lim_{n\to\infty}M_n(x)=0.$$

(ii) 若$\mathbb{L}>\mathbb{L}^*$，则(2)具有最小非平凡平衡解

$$\underline{M}_n(x)=\left(\underline{\mathcal{J}}_n(x),\underline{\mathcal{A}}_n(x)\right)^{\mathrm{T}},$$

且若$M_0(x)$在$n$维空间有界域$\Omega$上为正，则解序列$M_n(x)$满足

$$\liminf_{n\to\infty}M_n(x)\geq\underline{M}_n(x).$$

**证：** (i) 考虑系统(2)的线性化问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}_n}{\partial t}=d\dfrac{\partial^2\tilde{u}_n}{\partial x^2}+g'(0)\tilde{u}_n(x,t), & x\in\Omega,\ t\in(0,\tau),\\ \tilde{u}_n(x,0)=f'(0)\widetilde{\mathcal{A}}_n(x), & x\in\Omega,\\ \widetilde{\mathcal{J}}_{n+1}(x)=r_1\tilde{u}_n(x,\tau)+r_2\widetilde{\mathcal{J}}_n(x), & x\in\Omega,\tau\in(0,1],\\ \widetilde{\mathcal{A}}_{n+1}(x)=r_3\widetilde{\mathcal{J}}_n(x)+r_4\widetilde{\mathcal{A}}_n(x), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{7}$$

假设$\tilde{u}_n(x,t)$满足以下形式

$$\tilde{u}_n(x,t)=pf'(0)\mathrm{e}^{\lambda(\Omega,h)t}\varphi(x),\ x\in\Omega.$$

将$\tilde{u}_n(x,t)$代入模型(7)的第一个方程中，取特定函数$\varphi(x)$，$p$为常数。那么$\varphi(x)$满足

$$-d\varphi''(x)=\left(g''(0)-\lambda(\Omega,h)\right)\varphi(x),\ x\in\Omega.$$

注意，当$\lambda_1(\Omega,h)=g'(0)-\lambda(\Omega,h)$时，上面的问题可以转化为特征值问题(5)。

在这里，利用引理 3.1，第一个特征值是$\lambda_1(\Omega,h)$，相关的特征函数是$\varphi_1(x)$。那么给定的初始条件$\tilde{u}_n(x,0)=f'(0)\tilde{\mathcal{A}}_n(x)=pf'(0)\varphi(x)$。这表明$\tilde{u}_n(x,t)=f'(0)\tilde{\mathcal{A}}_n(x)\mathrm{e}^{\lambda t}$。由此可以推导出

$$\tilde{u}_n(x,\tau)=f'(0)\tilde{\mathcal{A}}_n(x)\mathrm{e}^{\lambda\tau}.$$

进而可得

$$\tilde{u}_n(x,\tau)=\tilde{\mathcal{A}}_n(x)f'(0)\mathrm{e}^{\left[g'(0)-\lambda_1(\Omega,h)\right]\tau}. \tag{8}$$

将(8)代入(7)的后两项中可得下面的递归形式

$$\bar{M}_{n+1}(x)=\begin{pmatrix} r_2 & r_1 f'(0)\mathrm{e}^{(g'(0)-\lambda_1(\Omega,h))\tau} \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}\bar{M}_n(x), \tag{9}$$

其中 $\bar{M}_n(x)=\left(\tilde{\mathcal{J}}_n(x),\tilde{\mathcal{A}}_n(x)\right)^{\mathrm{T}}$。因此，(9)中矩阵的主特征值为

$$\tilde{\lambda}=\frac{(r_4+r_2)+\sqrt{(r_4-r_2)^2+4r_3r_1f'(0)\mathrm{e}^{(g'(0)-\lambda_1(\Omega,h))\tau}}}{2}.$$

一方面，当 $\tilde{\lambda}<1$ 时，(9)中 $\bar{M}_{n+1}(x)$ 的极限趋于零，由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\bar{M}_n(x)=0,$$

即就是

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\tilde{\mathcal{J}}_n(x)+\tilde{\mathcal{A}}_n(x)\right\}=0.$$

同时，可得

$$\frac{\ln\dfrac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}}{\tau}<\lambda_1(\Omega,h).$$

当 $\Omega=(0,\mathbb{L})\times\cdots\times(0,\mathbb{L})\subset\mathcal{R}^n$ 时，由于在每个 $[0,\mathbb{L}]$ 上，特征值 $\lambda\left[(0,\mathbb{L}),h\right]$ 满足(5)，对应的第一个特征值为 $\lambda_1\left[(0,\mathbb{L}),h\right]=dk^2$。根据引理 3.1，可以推导出 $\Omega$ 中的 $\lambda_1(\Omega,h)=ndk^2$。可以推断出

$$k>\sqrt{\frac{\ln\dfrac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}}{nd\tau}}.$$

同时，可得特征方程

$$\tan(k\mathbb{L})=\frac{2hk}{k^2-h^2}.$$

另一方面，当 $\tilde{\lambda}>1$ 时，根据上面类似的推导，可以得到

$$\sqrt{\frac{\ln\dfrac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}}{nd\tau}}<k.$$

于是临界域大小为

$$\mathbb{L}^*=\frac{\sqrt{n}}{k_1}\arctan\left(\frac{2hk_1}{k_1^2-h^2}\right),\ k_1=\sqrt{\frac{\ln\dfrac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}}{d\tau}}.$$

根据定理 3.2 的条件，当 $\mathbb{L}<\mathbb{L}^*$ 和(4)成立时，也符合 $\tilde{\lambda}<1$。因此，在系统(2)中，对于任何给定的初

始条件 $M_0(x)$，可选择一个足够大的数 $b$，使得 $M_0(x)\le \bar{M}_n(x)$。根据条件(B1)和(B2)，$g(u_n)\le g'(0)u_{n.}$ 因此，利用比较定理和归纳法，对所有 $n\ge 0$ 都有 $M_n(x)\le \bar{M}_n(x)$。此外，可得

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x)=0.$$

命题(i)的证明完成。

(ii) 当 $\mathbb{L}>\mathbb{L}^*$ 和(4)成立时，则 $\tilde{\lambda}>1$。

根据(9)中矩阵的主特征值，如果 $\tilde{\lambda}>1$，可以推出

$$\frac{\ln\dfrac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{g'(0)\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}}{\tau}>\lambda_1(\Omega,h).$$

于是可以选择 $\underline{\lambda}(\Omega,h)>\lambda_1(\Omega,h)$ 和 $\underline{f}<f'(0)$，使得

$$\frac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda}(\Omega,h))\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}>1. \tag{10}$$

令 $v_0(x,t)=\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda}(\Omega,h))t}\varphi_1(x)$ 且满足假设(B1)和(B2)，对于足够小的 $\epsilon>0$ 和 $0<t\le\tau$，有下面的不等式

$$g(v_0(x,t))\ge g'(0)v_0(x,t)-\mathbb{K}_2(v_0(x,t))=g'(0)\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda}(\Omega,h))t}\varphi_1(x)-\mathbb{K}_2(v_0(x,t)).$$

这里 $\mathbb{K}_2$ 是一个可微函数，满足 $\mathbb{K}_2(0)=\mathbb{K}_2'(0)=0$，这意味着存在一个正数 $\rho$，使得对于 $v_n<\rho$，分数 $\dfrac{\mathbb{K}_2(v_n)}{v_n}$ 足够小。通过[17]中的方法，可以假设如下条件

$$\frac{\mathbb{K}_2(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}<\min\left\{f'(0)-\underline{f},\underline{\lambda}(\Omega,h)-\lambda_1(\Omega,h)\right\}. \tag{11}$$

这表明

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_0}{\partial t}-\left[d\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+g(v_0)\right]\\
&=\epsilon\underline{f}\left(g'(0)-\underline{\lambda}\right)\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\varphi_1(x)-d\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\varphi_1''(x)-g(v_0)\\
&\le\epsilon\underline{f}\left(g'(0)-\underline{\lambda}\right)\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\varphi_1(x)-d\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\varphi_1''(x)-g'(0)\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\varphi_1(x)+\mathbb{K}_2(v_0)\\
&=\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\left[-d\varphi_1''(x)-\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_1\varphi_1(x)-\underline{\lambda}\varphi_1(x)\right]+\mathbb{K}_2(v_0)\\
&=\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})t}\left[-d\varphi_1''(x)-\lambda_1\varphi_1(x)\right]+\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{(g''(0)-\underline{\lambda})t}\varphi_1(x)\left[\lambda_1-\underline{\lambda}\right]+\mathbb{K}_2(v_0).
\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $\lambda_1(\Omega,h)$ 是(5)的第一个特征值，则

$$-d\varphi_1''(x)-\lambda_1(\Omega,h)\varphi_1(x)=0. \tag{13}$$

结合(13)，则(12)可转化为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial t}-\left[d\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+g(v_0)\right]&\le\epsilon\underline{f}\mathrm{e}^{\underline{\lambda}(\Omega,h)t}\varphi_1(x)\left[\lambda_1(\Omega,h)-\underline{\lambda}(\Omega,h)\right]+\mathbb{K}_2(v_0)\\
&=v_0\left[\lambda_1(\Omega,h)-\underline{\lambda}(\Omega,h)+\frac{\mathbb{K}_2(v_0)}{v_0}\right].
\end{aligned}$$

基于假设 $\underline{\lambda}(\Omega,h)>\lambda_1(\Omega,h)$ 和(10)，可得

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}-\left[d\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+g\left(v_0\right)\right]\le 0.$$

这表明对于 $0<t<\tau$， $v_0\left(x,t\right)$ 是如下系统的下解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_n}{\partial t}=d\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+g\left(u_n\right), & x\in\Omega,t\in\left(0,\tau\right),\\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \nu}+hu_n\left(x,t\right)=0, & x\in\partial\Omega,t\in\left(0,\tau\right).\end{cases}$$

令 $F$ 表示如下系统的时间-$\tau$ 的解映射，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_n}{\partial t}=d\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+g\left(u_n\right), & x\in\Omega,t\in\left(0,\tau\right),\\ u_n\left(x,0\right)=f\left(\mathcal{A}_n\left(x\right)\right), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \nu}+hu_n\left(x,t\right)=0, & x\in\partial\Omega,t\in\left(0,\tau\right).\end{cases}$$

然后 $u_n\left(x,\tau\right)=F\left[u_{n,0}\right]\left(x\right)$。令

$$\underline{M}_0\left(x\right)=\left(\underline{\mathcal{J}}_0\left(x\right),\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right)\right)^{\mathrm{T}}=\left(\epsilon\varphi_1\left(x\right),\epsilon\varphi_1\left(x\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

根据条件(A1)~(A3)，对于足够小的 $\epsilon$ 和 $t\in\left(0,\tau\right]$，有

$$\frac{f\left(v_0\left(x,t\right)\right)}{v_0\left(x,t\right)}\ge f'\left(0\right)-\underline{f}+\underline{f}-\frac{\mathbb{K}_1\left(v_0\left(x,t\right)\right)}{v_0\left(x,t\right)}\ge\underline{f},$$

其中

$$\frac{\mathbb{K}_1\left(v_0\left(x,t\right)\right)}{v_0\left(x,t\right)}<f'\left(0\right)-\underline{f}$$

在 $t\in\left(0,\tau\right)$ 时成立。这表明

$$f\left(v_0\left(x,t\right)\right)\ge\underline{f}v_0\left(x,t\right). \tag{14}$$

将与(11)相似的性质同(13)相结合，可得

$$\begin{aligned}f\left(\underline{\mathcal{A}}_0\right)\left(x\right)&\ge f'\left(0\right)\underline{\mathcal{A}}_0-\mathbb{K}_1\left(\underline{\mathcal{A}}_0\right)\\&\ge\underline{f}\underline{\mathcal{A}}_0+\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right)\left\{\left(f'\left(0\right)-\underline{f}\right)-\frac{\mathbb{K}_1\left(\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right)\right)}{\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right)}\right\}\\&\ge\underline{f}\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right).\end{aligned} \tag{15}$$

进一步考虑 $v_0\left(x,t\right)$ 为下解的性质，应用比较原理，则 $F$ 为单调算子，故

$$F\left[u_{1,0}\right]\left(x\right)\ge F\left[u_{2,0}\right]\left(x\right),\ u_{1,0}\left(x\right)\ge u_{2,0}\left(x\right)\ge 0..$$

基于算子 $F$ 和不等式(14)的单调性，对于足够小的数 $\epsilon$ 和 $t\in\left(0,\tau\right)$，有

$$\begin{aligned}F\left[f\left(\underline{\mathcal{A}}_0\right)\left(x\right)\right]&\ge F\left[\underline{f}\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right)\right]=\tilde{F}\left[\epsilon\underline{f}\varphi_1\left(x\right)\right]=F\left[v\left(x,0\right)\right]\\&\ge v\left(x,\tau\right)=\epsilon\underline{f}\varphi_1\left(x\right)\mathrm{e}^{\left(g'\left(0\right)-\lambda\right)\tau}\\&=\underline{f}\mathrm{e}^{\left(g'\left(0\right)-\lambda\right)\tau}\underline{\mathcal{A}}_0\left(x\right).\end{aligned} \tag{16}$$

因此，系统(2)的解满足抽象递归序列

$$M_{n+1}(x)=\begin{pmatrix} r_1F\left[f\left(\mathcal{A}_n(x)\right)\right]+\dfrac{r_2\mathcal{J}_n(x)}{1+c_1\mathcal{J}_n(x)} \\ \dfrac{r_3\mathcal{J}_n(x)}{1+c_1\mathcal{J}_n(x)}+\dfrac{r_4\mathcal{A}_n(x)}{1+c_2\mathcal{A}_n(x)} \end{pmatrix},$$

其中 $M_{n+1}(x)=\left(\mathcal{J}_{n+1}(x),\mathcal{A}_{n+1}(x)\right)^{\mathrm{T}}$。

将(16)与 $\dfrac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda}(\Omega,h))\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}>1$ 结合起来，显然可以推出

$$\underline{M}_1(x)\geq\begin{pmatrix} r_1\underline{f}\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda})\tau}\underline{A}_0(x)+\dfrac{r_2\underline{\mathcal{J}}_0(x)}{1+c_1\underline{\mathcal{J}}_0(x)} \\ \dfrac{r_3\underline{\mathcal{J}}_0(x)}{1+c_1\underline{\mathcal{J}}_0(x)}+\dfrac{r_4\underline{\mathcal{A}}_0(x)}{1+c_2\underline{\mathcal{A}}_0(x)} \end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\epsilon\varphi_1(x)\\ \epsilon\varphi_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\mathcal{J}}_0(x)\\ \underline{\mathcal{A}}_0(x)\end{pmatrix}=\underline{M}_0(x).$$

如果 $\underline{M}_0(x)>\underline{M}_1(x)$ 则

$$\frac{r_1r_3f'(0)\mathrm{e}^{(g'(0)-\underline{\lambda}(\Omega,h))\tau}}{(1-r_4)(1-r_2)}\leq 1,$$

这与条件(10)相矛盾。因此，将运算符 $F$ 和函数 $f$ 的单调性与上面的推导结合起来，可得对所有 $n\geq 0$ 的 $\underline{M}_{n+1}(x)\geq\underline{M}_n(x)$。

最后，假设对于足够小的 $\epsilon>0$，系统(2)有一个正常数平衡解

$$M_*=\left(\mathcal{J}_*(x),\mathcal{A}_*(x)\right)^{\mathrm{T}}>\left(\epsilon\varphi_1(x),\epsilon\varphi_1(x)\right)^{\mathrm{T}}=\underline{M}_0(x),$$

这是一个上解。因此，$M_*\geq\underline{M}_{n+1}(x)\geq\underline{M}_n(x)$ 适用于所有 $n\geq 0$。因此，递归序列 $\underline{M}_n(x)$ 必收敛于极限函数 $\underline{M}(x)$，它是系统(2)的最小正平衡解。若 $M_0(x)$ 在系统(2)中 $\Omega$ 的每个开子区间上初始值非负且正，对于足够小的 $\epsilon$，有 $M_0(x)\geq\underline{M}_0(x)$。根据比较定理，可以得到 $M_n(x)\geq\underline{M}_n(x)$。因此(ii)成立。

## 4. 总结与展望

本文研究了一个在不利外部域上建立的具有阶段结构的离散时间种群模型，具体研究了 $n$ 维空间中有界域内的离散时间映射。给出了影响种群持久生存和灭绝的临界域大小。然后，通过整合线性化系统(7)的特征值问题、比较原理和其他技术，证明了种群在每种情况下都可以持续存在。值得注意的是，不同区域的几何形状对模型的解有影响，这也为保护区的建立提供了见解，例如在[18]和[20]中，研究者通过研究不同形状的生存区域对种群密度的影响，结合积分差分系统进行模拟实验，为生态治理提供了宝贵的指导建议，这一方向值得我们在后续研究中持续挖掘。此外，临界域问题与种群优化问题的出现也有着复杂的联系，特别是当初始区域呈现一定程度的破碎化时。例如，在[26]中，作者分析了包含栖息地边界个体行为的扩散模型，以研究破碎景观中的种群动态。它强调了缓冲区设计和栖息地质量如何影响种群增长和持久性，揭示了在某些情况下，较低的缓冲区质量可以增强保护区域内的稳定性。这就提出了一个问题，即种群如何在这种情况下生存并确保持久性。这些问题代表了未来研究的重要方向。

## 参考文献


[1] MacDonald, J.S., Lutscher, F. and Bourgault, Y. (2024) Climate Change Fluctuations Can Increase Population Abundance and Range Size. *Ecology Letters*, **27**, e14453. https://doi.org/10.1111/ele.14453

[2] Leroux, S.J., Larrivée, M., Boucher-Lalonde, V., Hurford, A., Zuloaga, J., Kerr, J.T., *et al*. (2013) Mechanistic Models for the Spatial Spread of Species under Climate Change. *Ecological Applications*, **23**, 815-828. https://doi.org/10.1890/12-1407.1

[3] Loarie, S.R., Duffy, P.B., Hamilton, H., Asner, G.P., Field, C.B. and Ackerly, D.D. (2009) The Velocity of Climate Change. *Nature*, **462**, 1052-1055. https://doi.org/10.1038/nature08649

[4] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2004) Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley. https://doi.org/10.1002/0470871296

[5] Wang, M., Zhang, Y. and Huang, Q. (2022) A Stage-Structured Continuous-/Discrete-Time Population Model: Persistence and Spatial Spread. *Bulletin of Mathematical Biology*, **84**, Article No. 135. https://doi.org/10.1007/s11538-022-01090-8

[6] Harris, D.C., He, C., Preul, M.C., Kostelich, E.J. and Kuang, Y. (2023) Critical Patch Size of a Two-Population Reaction Diffusion Model Describing Brain Tumor Growth. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **84**, S249-S268. https://doi.org/10.1137/22m1509631

[7] Vasilyeva, O., Lutscher, F. and Lewis, M. (2015) Analysis of Spread and Persistence for Stream Insects with Winged Adult Stages. *Journal of Mathematical Biology*, **72**, 851-875. https://doi.org/10.1007/s00285-015-0932-x

[8] Xu, H., Lin, Z. and Zhu, H. (2024) On an Age-Structured Juvenile-Adult Model with Harvesting Pulse in Moving and Heterogeneous Environment. *Journal of Differential Equations*, **405**, 36-75. https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.05.045

[9] Wang, Z., Salmaniw, Y. and Wang, H. (2021) Persistence and Propagation of a Discrete-Time Map and PDE Hybrid Model with Strong Allee Effect. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **61**, Article ID: 103336. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103336

[10] Wang, Z., An, Q. and Wang, H. (2023) Properties of Traveling Waves in an Impulsive Reaction-Diffusion Model with Overcompensation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **74**, Article No. 114. https://doi.org/10.1007/s00033-023-02004-x

[11] Xu, H., Lin, Z. and Santos, C.A. (2023) Spatial Dynamics of a Juvenile-Adult Model with Impulsive Harvesting and Evolving Domain. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **122**, Article ID: 107262. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107262

[12] Bai, Z., Lou, Y. and Zhao, X. (2022) Spatial Dynamics of Species with Annually Synchronized Emergence of Adults. *Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article No. 78. https://doi.org/10.1007/s00332-022-09836-3

[13] Wu, R. and Zhao, X. (2019) Spatial Invasion of a Birth Pulse Population with Nonlocal Dispersal. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **79**, 1075-1097. https://doi.org/10.1137/18m1209805

[14] Lin, Y. and Wang, Q. (2015) Spreading Speed and Traveling Wave Solutions in Impulsive Reaction-Diffusion Models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **23**, 185-191. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.11.006

[15] Li, Z. and Zhao, X. (2024) A Time-Space Periodic Population Growth Model with Impulsive Birth. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **75**, Article No. 83. https://doi.org/10.1007/s00033-024-02222-x

[16] Lewis, M.A. and Li, B. (2012) Spreading Speed, Traveling Waves, and Minimal Domain Size in Impulsive Reaction–diffusion Models. *Bulletin of Mathematical Biology*, **74**, 2383-2402. https://doi.org/10.1007/s11538-012-9757-6

[17] Fazly, M. (2021) Critical Domain Sizes of a Discrete-Map Hybrid and Reaction-Diffusion Model on Hostile Exterior Domains. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **86**, 739-760. https://doi.org/10.1093/imamat/hxab019

[18] Fazly, M., Lewis, M. and Wang, H. (2017) On Impulsive Reaction-Diffusion Models in Higher Dimensions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **77**, 224-246. https://doi.org/10.1137/15m1046666

[19] Fazly, M., Lewis, M. and Wang, H. (2020) Analysis of Propagation for Impulsive Reaction-Diffusion Models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **80**, 521-542. https://doi.org/10.1137/19m1246481

[20] Li, B., Zhang, M. and Coffman, B. (2020) Can a Barrier Zone Stop Invasion of a Population? *Journal of Mathematical Biology*, **81**, 1193-1216. https://doi.org/10.1007/s00285-020-01541-7

[21] Jin, Y. and Lewis, M.A. (2011) Seasonal Influences on Population Spread and Persistence in Streams: Critical Domain Size. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **71**, 1241-1262. https://doi.org/10.1137/100788033

[22] Reimer, J.R., Bonsall, M.B. and Maini, P.K. (2016) The Critical Domain Size of Stochastic Population Models. *Journal of Mathematical Biology*, **74**, 755-782. https://doi.org/10.1007/s00285-016-1021-5

[23] Huang, Q., Wang, H. and Lewis, M.A. (2017) A Hybrid Continuous/Discrete-Time Model for Invasion Dynamics of Zebra Mussels in Rivers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **77**, 854-880. https://doi.org/10.1137/16m1057826

[24] Lewis, M.A., Li, B. and Weinberger, H.F. (2002) Spreading Speed and Linear Determinacy for Two-Species Competition Models. *Journal of Mathematical Biology*, **45**, 219-233. https://doi.org/10.1007/s002850200144

[25] Weinberger, H.F., Lewis, M.A. and Li, B. (2002) Analysis of Linear Determinacy for Spread in Cooperative Models.

*Journal of Mathematical Biology*, **45**, 183-218. https://doi.org/10.1007/s002850200145

[26] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (1999) Diffusion Models for Population Dynamics Incorporating Individual Behavior at Boundaries: Applications to Refuge Design. *Theoretical Population Biology*, **55**, 189-207. https://doi.org/10.1006/tpbi.1998.1397