Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(6), 258-265**
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.146317

基于Mangasarian函数的松弛方法的收敛性研究

张博淳*，**都书言**

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2025年5月19日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月19日

摘 要

本文讨论互补约束优化问题(MPCC)。MPCC在金融经济，交通规划，网络设计等领域有着重要的应用。由于MPCC的特殊结构，MPCC在可行点处不满足大多数的约束规范。因此，MPCC问题在理论分析和算法设计上都是较难处理的。本文基于Mangasarian互补函数构造出的松弛问题，证明在MPCC-rCPLD约束规范条件下，松弛问题的稳定点列收敛于MPCC的M-稳定点。并且证明如果增强假设条件，松弛问题的稳定点列收敛于MPCC的强稳定点。

关键词

带有互补约束的数学规划问题，松弛方法，约束规范，稳定点

Convergence Research of Relaxation Methods Based on Mangasarian Function

Bochun Zhang*, **Shuyan Du**

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 19th, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

This paper discusses mathematical programs with complementarity constraints (MPCC for short). MPCC plays an important role in many fields, such as finance and economics, transportation planning, and network design. Due to the unique structure of MPCC, MPCC does not satisfy most of the constraint qualifications at feasible points. Therefore, MPCC is rather difficult to handle both in theoretical

*通讯作者。

文章引用: 张博淳, 都书言. 基于 Mangasarian 函数的松弛方法的收敛性研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(6): 258-265.
DOI: 10.12677/aam.2025.146317

analysis and algorithm design. This paper is based on the relaxed problem constructed by Mangasarian complementary functions, and proves that under the MPCC-rCPLD constraint qualifications, the sequence of stationary points of the relaxed problem converges to M-stationary point of MPCC. Moreover, it is proved that the sequence of stationary points of the relaxed problem converges to the strongly stationary points of the MPCC if some additional conditions hold.

Keywords

Mathematical Programming Problems with Complementary Constraints, Relaxation Method, Constraint Qualifications, Stationary Point

1. 引言

本文讨论一类特殊的约束优化问题，即互补约束优化问题(简记为 MPCC)：

$$\begin{aligned} \min\ & f(z) \\ \text{s.t.}\ & g_i(z) \le 0, i \in I, \\ & h_i(z) = 0, i \in I_e, \\ & G_i(z) \ge 0, H_i(z) \ge 0, G_i(z) H_i(z) \le 0, i \in I_c. \end{aligned}$$

其中 $f, g_i, h_{i,} G_i, H_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 均为连续可微函数。MPCC 问题在金融经济，交通规划，网络设计等许多领域都有着广泛的应用，因此研究 MPCC 问题具有重要的理论价值和实际意义。

由于 MPCC 存在互补约束，MPCC 在其可行点处均不满足 Mangasarian-Fromovite 约束规范(简称 MFCQ)，这导致了很多非线性规划问题的算法无法直接应用于求解 MPCC。

近年来，许多学者致力于 MPCC 的研究，提出了 MPCC 的稳定点[1]，包括弱稳定点，C-稳定点，M-稳定点和强稳定点等。为了确保局部极小点是稳定点，我们需要约束规范。如 MPCC-LICQ，MPCC-MFCQ，MPCC-CPLD，MPCC-rCPLD 和 AM-正则性等。其中 MPCC 约束规范之间的强弱关系如下图 1 所示：

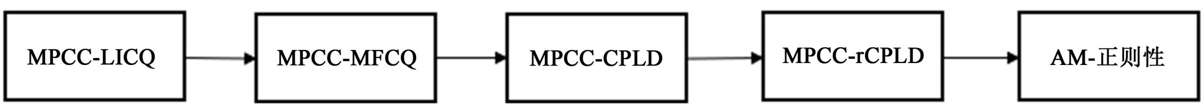

Figure 1. The strength of the relationship between the various constraint qualifications for MPCC
图 1. MPCC 的各约束规范强弱关系

为了求解 MPCC，文献中有几种不同的方法。例如松弛方法[2]，罚函数法[3]，分支定界法[4]，内点算法[5]，光滑化算法[5]等。松弛方法的主要思想是通过引进参数，得到 MPCC 的松弛问题。通过应用非线性规划问题的算法来求解松弛问题，得到原 MPCC 问题的解。Scholtes 在 2001 年提出了一个松弛方法[2]，并证明了在 MPCC-LICQ 假设条件下，松弛问题稳定点列收敛到 MPCC 的 C-稳定点。2005 年，Lin 和 Fukushima 提出新的松弛方法并同样证明在 MPCC-LICQ 假设条件下，松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 的 C-稳定点[6]。Kadrani，Dussault 等学者在 2009 年提出了一个新的松弛方法[7]，在 MPCC-LICQ

假设条件下，松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 的 M-稳定点。2010 年，Steffensen 等学者提出的松弛方法证明在较弱的 MPCC-CRCQ 的条件下收敛到 MPCC 的 C-稳定点[8]。Kanzow 等学者引进互补函数提出新的松弛问题，证明在 MPCC-CPLD 条件下松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 的 M-稳定点[9]。2014 年，黄小津通过 Mangasarian 互补函数[10]对 MPCC 的互补约束进行处理，提出了一个新的松弛问题[11]，并进行收敛性分析。在 MPCC-CPLD 等条件下证明松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 的 M-稳定点。进一步地，如果增强假设条件，则收敛到 MPCC 的强稳定点。

基于 Mangasarian 互补函数[10]，本文研究 MPCC 的松弛问题[11]。如图 1 所示，在比 MPCC-CPLD 更弱的 MPCC-rCPLD 约束规范条件下，证明了松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 问题的 M-稳定点。并证明如果增强假设条件，松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 问题的强稳定点。

2. 基础知识

本节介绍需要用到的一些基本概念和指标集。

非线性规划问题(简记为 NLP)可表示为：

$$\begin{aligned}&\min\ f(z)\\&\text{s.t.}\ \ g_i(z)\le 0, i\in I,\\&\qquad h_i(z)=0, i\in I_e.\end{aligned}$$

其中 $f,g_i,h_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续可微的， $f,g_i(i\in I),h_i(z)(i\in I_e)$ 中至少有一个是非线性函数。

NLP 的 Lagrange 函数定义为 $L(z,\alpha,\beta)=f(z)+\sum_{i\in I}\alpha_i g_i(z)+\sum_{i\in I_e}\beta_i h_i(z)$。

其中 $\alpha=(\alpha_i)\in\mathbb{R}^m,\beta=(\beta_i)\in\mathbb{R}^{m_e}$ 。

定理 2.1 (一阶最优性条件) [12] 设 z^* 是 NLP 问题的一个局部极小解，且在 z^* 处满足某个约束规范，则存在向量 $\alpha^*\in\mathbb{R}^m,\beta^*\in\mathbb{R}^{m_e}$ ，使得

$$\begin{aligned}&\nabla_z L(z^*,\alpha^*,\beta^*)=0,\\&h_i(z^*)=0(i\in I_e), g_i(z^*)\le 0(i\in I),\\&\alpha_i^*\ge 0,\ \ \alpha_i^* g_i(z^*)=0(i\in I).\end{aligned}$$

此时称 z^* 是 NLP 的 KKT 点，上述条件成为 KKT 条件。α^*,β^* 称为 Lagrange 乘子，(z^*,α^*,β^*) 称为 KKT 点对。

引进如下指标集：

$$\begin{aligned}&I_{0+}(z^*)=\left\{i\in I_c \middle| G_i(z^*)=0, H_i(z^*)>0\right\},\\&I_{00}(z^*)=\left\{i\in I_c \middle| G_i(z^*)=0, H_i(z^*)=0\right\},\\&I_{+0}(z^*)=\left\{i\in I_c \middle| G_i(z^*)>0, H_i(z^*)=0\right\}.\end{aligned}$$

其中 z^* 为 MPCC 的可行点。

定义 2.1 [1] 设 z^* 为 MPCC 可行点，如果存在 $\alpha\in\mathbb{R}^m,\beta\in\mathbb{R}^{m_e},\gamma,\delta\in\mathbb{R}^{m_c}$ ，使得如下条件成立

$$0=\nabla f(z^*)+\sum_{i\in I}\alpha_i\nabla g_i(z^*)+\sum_{i\in I_e}\beta_i\nabla h_i(z^*)-\sum_{i\in I_c}\gamma_i\nabla G_i(z^*)-\sum_{i\in I_c}\delta_i\nabla H_i(z^*)$$

$$\alpha_i\ge 0,\ \alpha_i g_i(z^*)=0(i\in I),\ \ \gamma_i=0\left(i\in I_{+0}(z^*)\right),\ \delta_i=0\left(i\in I_{0+}(z^*)\right),$$

则称 z^* 为 MPCC 的一个弱稳定点。

(a) 若弱稳定点 z^* 满足 $\gamma_i\delta_i \ge 0, \forall i \in I_{00}\left(z^*\right)$，则称 z^* 为 MPCC 的一个 C-稳定点。

(b) 若弱稳定点 z^* 满足 $\gamma_i > 0, \delta_i > 0$ 或 $\gamma_i\delta_i = 0, \forall i \in I_{00}\left(z^*\right)$，则称 z^* 为 MPCC 的一个 M-稳定点。

(c) 若弱稳定点 z^* 满足 $\gamma_i, \delta_i \ge 0, \forall i \in I_{00}\left(z^*\right)$，则称 z^* 为 MPCC 的一个强稳定点。

由以上稳定点的定义可知稳定点有如下关系：

$$\text{强稳定点} \Rightarrow \text{M-稳定点} \Rightarrow \text{C-稳定点} \Rightarrow \text{弱稳定点}$$

并且强稳定点是 MPCC 的 KKT 点。

定义 2.2 [9] 设 z^* 为 MPCC 的可行点，MPCC 的可行点 z^* 满足 **MPCC-CPLD** 当且仅当对于所有的 $I_1 \subseteq I_g\left(z^*\right)$， $I_2 \subseteq I_e$， $I_3 \subseteq I_{00}\left(z^*\right) \cup I_{0+}\left(z^*\right), I_4 \subseteq I_{00}\left(z^*\right) \cup I_{+0}\left(z^*\right)$，如果梯度向量组 $\left\{\nabla g_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_1\right\} \cup \left\{\nabla h_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_2\right\} \cup \left\{\nabla G_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_3\right\} \cup \left\{\nabla H_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_4\right\}$ 线性相关，则存在 z^* 的一个邻域 $U\left(z^*\right)$，使得对 $\forall z \in U\left(z^*\right)$，梯度向量组 $\left\{\nabla g_i(z) \middle| i \in I_1\right\} \cup \left\{\nabla h_i(z) \middle| i \in I_2\right\} \cup \left\{\nabla G_i(z) \middle| i \in I_3\right\} \cup \left\{\nabla H_i(z) \middle| i \in I_4\right\}$ 线性相关。

定义 2.3 [13] 设 z^* 为 MPCC 的可行点，令 $I' \subseteq I_e$，使得 $\left\{\nabla h_i\left(z^*\right) \middle| i \in I'\right\}$ 是生成空间 $\left\{\nabla h_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_e = 1, \cdots, q\right\}$ 的一组基。MPCC 的可行点 z^* 满足 MPCC-rCPLD 当且仅当存在 z^* 的一个邻域 $U\left(z^*\right)$，使得对于 $\forall z \in U\left(z^*\right)$， $\left\{\nabla h_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_e\right\}$ 有相同的秩，并且对于所有的 $I_1 \subseteq I_g\left(z^*\right)$， $I_2 \subseteq I_{0+}\left(z^*\right) \cup I_{00}\left(z^*\right)$， $I_3 \subseteq I_{+0}\left(z^*\right) \cup I_{00}\left(z^*\right)$，如果梯度向量组 $\left\{\nabla g_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_1\right\} \cup \left\{\nabla h_i\left(z^*\right) \middle| i \in I'\right\} \cup \left\{\nabla G_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_2\right\} \cup \left\{\nabla H_i\left(z^*\right) \middle| i \in I_3\right\}$ 线性相关，则存在 z^* 的一个邻域 $U\left(z^*\right)$，使得对 $\forall z \in U\left(z^*\right)$，梯度向量组 $\left\{\nabla g_i(z) \middle| i \in I_1\right\} \cup \left\{\nabla h_i(z) \middle| i \in I'\right\} \cup \left\{\nabla G_i(z) \middle| i \in I_2\right\} \cup \left\{\nabla H_i(z) \middle| i \in I_3\right\}$ 线性相关。

以上提到的 MPCC 的各种约束规范之间的关系如下：

$$\text{MPCC-CPLD} \Rightarrow \text{MPCC-rCPLD}$$

定义 2.4 [14] 对任何给定的向量 $c = \left(c_1, \cdots, c_n\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，定义指标集

$$supp(c) = \left\{i \middle| c_i \ne 0, i = 1, \cdots, n\right\},$$

则称 $supp(c)$ 为向量 c 的支撑。

3. 松弛问题的收敛性分析

Mangasarian 互补函数[10]对 MPCC 的互补约束松弛得到新的松弛问题[11]，本节基于新的松弛问题进行收敛性分析。在 MPCC-rCPLD 约束规范条件下，证明松弛问题稳定点列收敛到 MPCC 的 M-稳定点。如果增强假设条件，则进一步收敛到 MPCC 强稳定点。

定义 3.1 基于互补函数 ϕ [10]的性质，MPCC 的松弛约束 $G_i(z) \ge 0, H_i(z) \ge 0, G_i(z)H_i(z) = 0$ 可松弛为 $G_i(z) \ge -t, H_i(z) \ge -t, \Phi_i(z;t) \le 0$，从而得到 MPCC 的如下形式的松弛问题，记为 NLP(t)：

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(z) \\
\text{s.t.} \quad & g_i(z) \le 0, i \in I, \\
& h_i(z) = 0, i \in I_e, \\
& G_i(z) \ge -t, H_i(z) \ge -t, \Phi_i(z;t) \le 0, i \in I_c.
\end{aligned}$$

其中参数 $t \ge 0$。

$$\Phi_i(z;t)=\phi\left(G_i(z)-t,H_i(z)-t\right)$$
$$=\begin{cases}-2\left(G_i(z)-t\right)^2-2\left(H_i(z)-t\right)^2+2\left(G_i(z)-t\right)\left(H_i(z)-t\right), & G_i(z)-t<0,H_i(z)-t<0,\\ -2\left(G_i(z)-t\right)^2+2\left(G_i(z)-t\right)\left(H_i(z)-t\right), & G_i(z)-t<0,H_i(z)-t\ge 0,\\ -2\left(H_i(z)-t\right)^2+2\left(G_i(z)-t\right)\left(H_i(z)-t\right), & G_i(z)-t\ge 0,H_i(z)-t<0,\\ 2\left(G_i(z)-t\right)\left(H_i(z)-t\right), & G_i(z)-t\ge 0,H_i(z)-t\ge 0,\end{cases}$$

其中 t 为任意非负参数。

$$\nabla\Phi_i(z;t)$$
$$=\begin{cases}2\left(H_i(z)-4G_i(z)+2t\right)\nabla G_i(z)+\left(2G_i(z)-4H_i(z)+2t\right)\nabla H_i(z), & G_i(z)-t<0,H_i(z)-t<0\\ 2\left(H_i(z)-4G_i(z)+2t\right)\nabla G_i(z)+2\left(G_i(z)-t\right)\nabla H_i(z), & G_i(z)-t<0,H_i(z)-t\ge 0\\ 2\left(H_i(z)-t\right)\nabla G_i(z)+2\left(G_i(z)-4H_i(z)+2t\right)\nabla H_i(z), & G_i(z)-t\ge 0,H_i(z)-t<0\\ 2\left(H_i(z)-t\right)\nabla G_i(z)+2\left(G_i(z)-t\right)\nabla H_i(z), & G_i(z)-t\ge 0,H_i(z)-t\ge 0\end{cases}\tag{1}$$

当 $i\in I_\Phi^{00}(z;t)$ 时 $\nabla\Phi_i(z;t)=0$。

设 z 为松弛问题 NLP(t)的可行点，定义如下积极集：

$$I_g(z)=\left\{i\in I\,\middle|\,g_i(z)=0\right\},I_G(z;t)=\left\{i\in I_c\,\middle|\,G_i(z)=-t\right\},$$
$$I_H(z;t)=\left\{i\in I_c\,\middle|\,H_i(z)=-t\right\},I_\Phi(z;t)=\left\{i\in I_c\,\middle|\,\Phi_i(z;t)=0\right\}$$
$$\Phi_i(z;t)=0\Leftrightarrow G_i(z)-t\ge 0,H_i(z)-t\ge 0,\left(G_i(z)-t\right)\left(H_i(z)-t\right)=0$$

定义 $I_\Phi(z;t)$ 的一个剖分：

$$I_\Phi^{0+}(z;t)=\left\{i\in I_\Phi(z;t)\,\middle|\,G_i(z)-t=0,H_i(z)-t>0\right\},$$
$$I_\Phi^{00}(z;t)=\left\{i\in I_\Phi(z;t)\,\middle|\,G_i(z)-t=0,H_i(z)-t=0\right\},$$
$$I_\Phi^{+0}(z;t)=\left\{i\in I_\Phi(z;t)\,\middle|\,G_i(z)-t>0,H_i(z)-t=0\right\}.$$

显然 $I_\Phi^{0+}(z;t)\cap I_\Phi^{00}(z;t)\cap I_\Phi^{+0}(z;t)=\varnothing, I_\Phi^{0+}(z;t)\cup I_\Phi^{00}(z;t)\cup I_\Phi^{+0}(z;t)=I_\Phi(z;t)$。

定理 3.1 令 $\{t_k\}$ 为单调下降收敛到 0 的正数序列，$\left\{\left(z^k,\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^k\right)\right\}$ 为 NLP(t_k) 的 KKT 点对，且 $z^k\to z^*$。假设 MPCC-rCPLD 在 z^* 处成立，则 z^* 为 MPCC 的一个 M-稳定点。

证明： 因为 z^k 为 NLP(t_k) 的 KKT 点，所以

$$g_i\left(z^k\right)\le 0,i\in I,h_i\left(z^k\right)=0,i\in I_e,$$
$$G_i\left(z^k\right)\ge -t_k,H_i\left(z^k\right)\ge -t_k,\Phi_i\left(z^k;t_k\right)\le 0,i\in I_c$$

由 g_i,h_i,G_i,H_i,Φ_i 的连续性及 $z^k\to z^*,t_k\to 0$ 知道当 k 充分大时，z^* 为 MPCC 的可行点，即

$$g_i\left(z^*\right)\le 0,i\in I,h_i\left(z^*\right)=0,i\in I_e,$$
$$G_i\left(z^*\right)\ge 0,H_i\left(z^*\right)\ge 0,\Phi_i\left(z^*;0\right)\le 0,i\in I_c$$

且下面指标集的包含关系成立：

$$I_g\left(z^k\right)\subseteq I_g\left(z^*\right),$$
$$I_G\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{00}\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)\subseteq I_{00}\left(z^*\right)\cup I_{0+}\left(z^*\right),\tag{2}$$

$$I_H\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{00}\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right)\subseteq I_{00}\left(z^*\right)\cup I_{+0}\left(z^*\right).$$

因 $\left(z^k,\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^k\right)$ 为 NLP$\left(t_k\right)$ 的 KKT 点对，则有

$$\begin{aligned}0=\nabla f\left(z^k\right)+\sum_{i\in I}\alpha_i^k\nabla g_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_e}\beta_i^k\nabla h_i\left(z^k\right)-\sum_{i\in I_c}\gamma_i^k\nabla G_i\left(z^k\right)\\-\sum_{i\in I_c}\delta_i^k\nabla H_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_c}\nu_i^k\nabla\Phi_i\left(z^k;t_k\right)\end{aligned}\tag{3}$$

$$\alpha_i^k\begin{cases}\ge 0,\ i\in I_g\left(z^k\right),\\=0,\ i\notin I_g\left(z^k\right);\end{cases}\quad \gamma_i^k\begin{cases}\ge 0,\ i\in I_G\left(z^k;t_k\right),\\=0,\ i\notin I_G\left(z^k;t_k\right);\end{cases}\tag{4}$$

$$\delta_i^k\begin{cases}\ge 0,\ i\in I_H\left(z^k;t_k\right),\\=0,\ i\notin I_H\left(z^k;t_k\right);\end{cases}\quad \nu_i^k\begin{cases}\ge 0,\ i\in I_\Phi\left(z^k;t_k\right),\\=0,\ i\notin I_\Phi\left(z^k;t_k\right);\end{cases}$$

由(1)知

$$\nabla\Phi_i\left(z^k;t_k\right)=\begin{cases}2\left(H_i\left(z^k\right)-t_k\right)\nabla G_i\left(z^k\right),\ i\in I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right),\\2\left(G_i\left(z^k\right)-t_k\right)\nabla H_i\left(z^k\right),\ i\in I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right),\\0,\qquad i\in I_\Phi^{00}\left(z^k;t_k\right).\end{cases}$$

定义

$$\nu_i^{G,k}=\begin{cases}2\nu_i^k\left(H_i\left(z^k\right)-t_k\right),\ \ i\in I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)\\0,\qquad 其它.\end{cases}\qquad \nu_i^{H,k}=\begin{cases}2\nu_i^k\left(G_i\left(z^k\right)-t_k\right),\ \ i\in I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right)\\0,\qquad 其它.\end{cases}$$

注意到 $I_\Phi\left(z^k;t_k\right)=I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{00}\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right)$，于是(2)可以改写成如下形式：

$$\begin{aligned}0=\nabla f\left(z^k\right)+\sum_{i\in I}\alpha_i^k\nabla g_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_e}\beta_i^k\nabla h_i\left(z^k\right)-\sum_{i\in I_c}\gamma_i^k\nabla G_i\left(z^k\right)\\-\sum_{i\in I_c}\delta_i^k\nabla H_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_c}\nu_i^{G,k}\nabla G_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_c}\nu_i^{H,k}\nabla H_i\left(z^k\right)\end{aligned}\tag{5}$$

注意到(5)中的乘子都是非负的，根据([8]，引理 A.1)，不妨假设(5)中非零乘子对应的梯度向量组线性无关。已知 MPCC-rCPLD 在 z^* 处成立，存在 z^* 的一个邻域 $U\left(z^*\right)$，对于 $\forall z\in U\left(z^*\right)$，$\left\{\nabla h_i\left(z\right)\middle|i\in I_e\right\}$ 有相同的秩，且 $\left\{\nabla h_i\left(z^*\right)\middle|i\in I'\right\}$ 是生成空间 $\left\{\nabla h_i\left(z^*\right)\middle|i\in I_e\right\}$ 的一组基。当 k 充分大时，$z^k\in U\left(z^*\right)$，$rank\left\{\nabla h_i\left(z^k\right)\middle|i\in I_e\right\}=rank\left\{\nabla h_i\left(z^k\right)\middle|i\in I'\right\}$，由假设知非零乘子对应的梯度向量组无关，所以当 $i\in I_e\setminus I'$ 时，$\beta_i^k=0$。因此 $\sum_{i\in I_e}\beta_i^k\nabla h_i\left(z^k\right)=\sum_{i\in I'}\beta_i^k\nabla h_i\left(z^k\right)$，满足 $\left\{\beta_i^k>0\middle|i\in I'\right\}$ 且 $\left\{\nabla h_i\left(z^k\right)\middle|i\in I'\right\}$ 线性无关，(5)可表示为

$$\begin{aligned}0=\nabla f\left(z^k\right)+\sum_{i\in I}\alpha_i^k\nabla g_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I'}\beta_i^k\nabla h_i\left(z^k\right)-\sum_{i\in I_c}\gamma_i^k\nabla G_i\left(z^k\right)\\-\sum_{i\in I_c}\delta_i^k\nabla H_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_c}\nu_i^{G,k}\nabla G_i\left(z^k\right)+\sum_{i\in I_c}\nu_i^{H,k}\nabla H_i\left(z^k\right)\end{aligned}\tag{6}$$

下面证明乘子序列 $\left\{\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)\right\}$ 有界。

(反证)假设 $\left\{\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)\right\}$ 无界，则存在一个无穷子列 K，使得

$$\frac{\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)}{\left\|\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)\right\|}\xrightarrow{K}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\nu^G,\nu^H\right)\neq 0$$

对(6)两边同除以$\left\|\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)\right\|$，并取极限，

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{i\in I}\alpha_i\nabla g_i\left(z^*\right)+\sum_{i\in I'}\beta_i\nabla h_i\left(z^*\right)-\sum_{i\in I_c}\gamma_i\nabla G_i\left(z^*\right)-\sum_{i\in I_c}\delta_i\nabla H_i\left(z^*\right)\\
&+\sum_{i\in I_c}\nu_i^G\nabla G_i\left(z^*\right)+\sum_{i\in I_c}\nu_i^H\nabla H_i\left(z^*\right),
\end{aligned}
$$

由此可知以下梯度向量组

$$
\begin{aligned}
&\left\{\nabla g_i\left(z^*\right)\middle|i\in supp\left(\alpha\right)\right\}\cup\left\{\nabla h_i\left(z^*\right)\middle|i\in I'\right\}\cup\left\{\nabla G_i\left(z^*\right)\middle|i\in supp\left(\gamma\right)\cup supp\left(\nu^G\right)\right\}\\
&\cup\left\{\nabla H_i\left(z^*\right)\middle|i\in supp\left(\delta\right)\cup supp\left(\nu^H\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

是正线性相关的。

因 MPCC-rCPLD 在 z^* 处成立，所以存在 z^* 的一个邻域 $U\left(z^*\right)$，$\forall z\in U\left(z^*\right)$，梯度向量组

$$
\begin{aligned}
&\left\{\nabla g_i\left(z\right)\middle|i\in supp\left(\alpha\right)\right\}\cup\left\{\nabla h_i\left(z\right)\middle|i\in I'\right\}\cup\left\{\nabla G_i\left(z\right)\middle|i\in supp\left(\gamma\right)\cup supp\left(\nu^G\right)\right\}\\
&\cup\left\{\nabla H_i\left(z\right)\middle|i\in supp\left(\delta\right)\cup supp\left(\nu^H\right)\right\}
\end{aligned}
$$

线性相关。注意到当 k 充分大时有 $supp\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\nu^G,\nu^H\right)\subseteq supp\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)$，于是上述结论与之在 z^k 处的梯度向量组：

$$
\begin{aligned}
&\left\{\nabla g_i\left(z^k\right)\middle|i\in supp\left(\alpha^k\right)\right\}\cup\left\{\nabla h_i\left(z^k\right)\middle|i\in I'\right\}\cup\left\{\nabla G_i\left(z^k\right)\middle|i\in supp\left(\gamma^k\right)\cup supp\left(\nu^{G,k}\right)\right\}\\
&\cup\left\{\nabla H_i\left(z^k\right)\middle|i\in supp\left(\delta^k\right)\cup supp\left(\nu^{H,k}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

线性无关，矛盾。因此乘子序列$\left\{\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)\right\}$有界。

不失一般性，假设乘子序列$\left\{\left(\alpha^k,\beta^k,\gamma^k,\delta^k,\nu^{G,k},\nu^{H,k}\right)\right\}$收敛到$\left(\alpha^*,\beta^*,\gamma^*,\delta^*,\nu^{G,*},\nu^{H,*}\right)$。由于 $I_G\left(z^k;t_k\right)\cap I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)=\varnothing, I_H\left(z^k;t_k\right)\cap I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right)=\varnothing$ 因此定义

$$
\tilde{\gamma}_i=\begin{cases}\gamma_i^*, & i\in supp\left(\gamma^*\right)\\ -\nu_i^{G,*}, & i\in supp\left(\nu^{G,*}\right)\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\quad
\tilde{\delta}_i=\begin{cases}\delta_i^*, & i\in supp\left(\delta^*\right)\\ -\nu_i^{H,*}, & i\in supp\left(\nu^{H,*}\right)\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}
\tag{8}
$$

于是在(6)取极限，即有

$$
0=\nabla f\left(z^*\right)+\sum_{i\in I}\alpha_i^*\nabla g_i\left(z^*\right)+\sum_{i\in I'}\beta_i^*\nabla h_i\left(z^*\right)-\sum_{i\in I_c}\tilde{\gamma}_i\nabla G_i\left(z^*\right)-\sum_{i\in I_c}\tilde{\delta}_i\nabla H_i\left(z^*\right)
\tag{9}
$$

其中 $\alpha^*\geq 0$，且对足够大的 k，有

$$
\begin{aligned}
&supp\left(\alpha^*\right)\subseteq I_g\left(z^k;t_k\right)\subseteq I_g\left(z^*\right),\\
&supp\left(\tilde{\gamma}\right)=supp\left(\gamma^*\right)\cup supp\left(\nu^{G,*}\right)\subseteq I_G\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)\subseteq I_{00}\left(z^*\right)\cup I_{0+}\left(z^*\right),\\
&supp\left(\tilde{\delta}\right)=supp\left(\delta^*\right)\cup supp\left(\nu^{H,*}\right)\subseteq I_H\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right)\subseteq I_{00}\left(z^*\right)\cup I_{+0}\left(z^*\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

由(10)知，$\tilde{\gamma}_i=0, i\in I_{+0}\left(z^*\right);\ \tilde{\delta}_i=0, i\in I_{0+}\left(z^*\right)$，即 z^* 是 MPCC 的一个弱稳定点。

接下来证明 z^* 是 M-稳定点。

(反证)假设存在一个 $i\in I_{00}\left(z^*\right)$，使得 $\tilde{\gamma}_i<0$ 且 $\tilde{\delta}_i\neq 0$。据(8)和(10)可知当 k 充分大时，$i\in supp\left(\nu^{G,*}\right)\subseteq I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)$. 又 $I_\Phi^{0+}\left(z^k;t_k\right)\cap\left(I_H\left(z^k;t_k\right)\cup I_\Phi^{+0}\left(z^k;t_k\right)\right)=\varnothing$，因此由(8)知 $\tilde{\delta}_i=0$，这与 $\tilde{\delta}_i\neq 0$ 矛

盾。(对于 $\tilde{\gamma}_i \neq 0$ 且 $\tilde{\delta}_i < 0$ 的情形，可类似证明)因此 z^* 为 MPCC 的 M-稳定点。

定理 3.2 若 $\{z_k\}$ 满足 $I_\Phi^{0+}(z_k;t_k) = I_\Phi^{+0}(z_k;t_k) = \varnothing$，则 z^* 为 MPCC 的强稳定点。

证明： 由(10)知(9)可改写为

$$0 = \nabla f(z^*) + \sum_{i \in supp(\alpha^*)} \alpha_i^* \nabla g_i(z^*) + \sum_{i \in I} \beta_i^* \nabla h_i(z^*)$$
$$- \sum_{i \in supp(\tilde{\gamma})} \tilde{\gamma}_i \nabla G_i(z^*) - \sum_{i \in supp(\tilde{\delta})} \tilde{\delta}_i \nabla H_i(z^*)$$

已知 $I_\Phi^{0+}(z_k;t_k) = I_\Phi^{+0}(z_k;t_k) = \varnothing$，由(10)可以得出

$$supp(\tilde{\gamma}) = supp(\gamma^*) \subseteq I_G(z^k;t_k) \subseteq I_{00}(z^*),$$
$$supp(\tilde{\delta}) = supp(\delta^*) \subseteq I_H(z^k;t_k) \subseteq I_{00}(z^*).$$

由(4) (8)得到 $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i^* \geq 0,\ \tilde{\delta}_i = \delta_i^* \geq 0,\ i \in I_{00}(z^*)$，所以 z^* 满足条件 $\gamma_i, \delta_i \geq 0, \forall I_{00}(z^*)$, 则称 z^* 为 MPCC 的一个强稳定点。

4. 总结

本文主要研究 MPCC 松弛问题的收敛性分析。Mangasarian 互补函数对 MPCC 互补约束进行松弛，得到松弛问题。在较弱的 MPCC-rCPLD 约束规范条件下证明了松弛问题的 KKT 点列收敛到 MPCC 的 M-稳定点。并进一步证明如果增强假设条件，松弛问题的稳定点列收敛到 MPCC 的强稳定点。

参考文献

[1] Scheel, H. and Scholtes, S. (2000) Mathematical Programs with Complementarity Constraints: Stationarity, Optimality, and Sensitivity. *Mathematics of Operations Research*, **25**, 1-22. https://doi.org/10.1287/moor.25.1.1.15213

[2] Scholtes, S. (2001) Convergence Properties of a Regularization Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **11**, 918-936. https://doi.org/10.1137/s1052623499361233

[3] 刘水霞, 陈国庆. 互补约束优化问题的乘子序列部分罚函数算法[J]. 运筹学学报, 2011, 15(4): 55-64.

[4] Bard, J.F. (1988) Convex Two-Level Optimization. *Mathematical Programming*, **40**, 15-27. https://doi.org/10.1007/bf01580720

[5] Luo, Z., Pang, J. and Ralph, D. (1996) Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511983658

[6] Lin, G. and Fukushima, M. (2005) A Modified Relaxation Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *Annals of Operations Research*, **133**, 63-84. https://doi.org/10.1007/s10479-004-5024-z

[7] Kadrani, A., Dussault, J. and Benchakroun, A. (2009) A New Regularization Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 78-103. https://doi.org/10.1137/070705490

[8] Steffensen, S. and Ulbrich, M. (2010) A New Relaxation Scheme for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 2504-2539. https://doi.org/10.1137/090748883

[9] Hoheisel, T., Kanzow, C. and Schwartz, A. (2011) Theoretical and Numerical Comparison of Relaxation Methods for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *Mathematical Programming*, **137**, 257-288. https://doi.org/10.1007/s10107-011-0488-5

[10] Mangasarian, O.L. (1976) Equivalence of the Complementarity Problem to a System of Nonlinear Equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **31**, 89-92. https://doi.org/10.1137/0131009

[11] 黄小津. 互补约束优化一个新的松弛方法[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西大学, 2014.

[12] Bazaraa, M.S., Sherali, H. and Shetty, C.M. (1993) Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. John Wiley & Sons, Inc.

[13] Xu, N., Zhu, X., Pang, L. and Lv, J. (2018) Improved Convergence Properties of the Relaxation Schemes of Kadrani *et al.* and Kanzow and Schwartz for MPEC. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **35**, Article ID: 1850008. https://doi.org/10.1142/s0217595918500082

[14] Qi, L. and Wei, Z. (2000) On the Constant Positive Linear Dependence Condition and Its Application to SQP Methods. *SIAM Journal on Optimization*, **10**, 963-981. https://doi.org/10.1137/s1052623497326629