Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(7), 59-71**
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.147347

一类具变指数源项的Klein-Gordon方程解的爆破

李 雪，初 颖*

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2025年6月7日；录用日期：2025年6月29日；发布日期：2025年7月8日

摘 要

本文研究了一类具有变指数源项和非线性阻尼项的Klein-Gordon方程在低初始能量条件下弱解的爆破性质，探讨解在有限时间内爆破的条件及爆破时间的上界估计。我们运用微分不等式技术，通过定义能量泛函和辅助函数，利用Sobolev嵌入不等式、Hölder不等式等工具，分析低初始能量下解的行为，推导解的爆破条件。在给定的变指数条件和松弛函数假设下，证明了当初始能量低于某一临界值时，弱解在有限时间内发生爆破，并获得了爆破时间的上界估计。变指数源项和非线性阻尼项的共同作用会导致解在低初始能量下有限时间爆破，研究结果为该类方程的解的定性分析提供了理论依据，拓展了变指数非线性偏微分方程的爆破理论。

关键词

Klein-Gordon方程，变指数，粘弹性项，爆破

The Blow-Up of Solutions to the Klein-Gordon Equation with Variable Exponent Source Term

Xue Li, Ying Chu*

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: Jun. 7th, 2025; accepted: Jun. 29th, 2025; published: Jul. 8th, 2025

Abstract

This paper studies the blow-up properties of weak solutions of a class of Klein-Gordon equations

*通讯作者。

文章引用: 李雪, 初颖. 一类具变指数源项的 Klein-Gordon 方程解的爆破[J]. 应用数学进展, 2025, 14(7): 59-71.
DOI: 10.12677/aam.2025.147347

with variable exponential source term and nonlinear damping term under the condition of low initial energy, and explores the conditions for the blow-up of solutions within a finite time and the upper bound estimation of the blow-up time. We apply differential inequality techniques, and by defining energy functionals and auxiliary functions, and using tools such as Sobolev embedding inequalities and Hölder inequalities, we analyze the behavior of solutions under low initial energy and derive the blow-up conditions of the solutions. Under the given variable exponential condition and the assumption of the relaxation function, it is proved that when the initial energy is lower than a certain critical value, the weak solution blows up within a finite time, and the upper bound estimation of the blow-up time is obtained. The combined effect of the variable exponential source term and the nonlinear damping term can lead to the blow-up of the solution in a finite time at a low initial energy. The research results provide a theoretical basis for the qualitative analysis of the solutions of this type of equation and expand the blow-up theory of variable exponential nonlinear partial differential equations.

Keywords

Klein-Gordon Equation, Variable Exponent, Viscoelastic Term, Blow-Up

1. 引言

在本文中，主要研究了一类具变指数源项的 Klein-Gordon 方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+u-div\left(a(x,t)\nabla u\right)+\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau+|u_t|^{m(x)-2}u_t=|u|^{p(x)-2}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset R^n\ (n\geq 1)$ 是具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，系数 $a(x,t)$ 是连续函数，且满足

$$0<a^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}a(x,t)\leq a(x,t)\leq a^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}a(x,t)<\infty, \tag{2}$$

指数 $m(x)$ 和 $p(x)$ 是两个连续函数，且满足

$$2<m^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}m(x)\leq m(x)\leq m^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}m(x)<\frac{2n-2}{n-2}, \tag{3}$$

$$2<p^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}p(x)\leq p(x)\leq p^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}p(x)<\frac{2n-2}{n-2}, \tag{4}$$

且有连续的对数模，即满足

$$\forall x,\ y\in\Omega,\ |x-y|<1,\ |m(x)-m(y)|+|p(x)-p(y)|\leq\omega(|x-y|), \tag{5}$$

其中 $\limsup_{t\to 0^+}\omega(\tau)\ln\frac{1}{\tau}=C<\infty$。

对于松弛函数 $g:R^+\to R^+$ 是非负有界的 C^1 函数，且满足

$$g(0)>0,\ g'(\tau)\leq 0,\ 1-\int_0^\infty g(\tau)\mathrm{d}\tau=l>0, \tag{6}$$

和

$$\int_0^\infty g(\tau)\mathrm{d}\tau < \frac{\frac{p^-}{2}-1}{\frac{p^-}{2}-1+\frac{1}{2p^-}}. \tag{7}$$

接着，对于 a 是 $C^1\left(\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right)$ 类的对称矩阵，因此存在常数 $a^+,a^->0$，对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}^n$，有

$$a^-|\xi|^2 \le a\xi\cdot\xi \le a^+|\xi|^2 \tag{8}$$

和

$$a_t\xi\cdot\xi \le 0, \tag{9}$$

其中 $a_t=\dfrac{\partial a(x,t)}{\partial t}$。

问题(1)的方程源于各种物理现象的建模，如粘弹性和系统控制粘弹性配置的纵向运动服从非线性 Boltzmann 模型，或电流变流体，粘弹性流体，多孔介质中的过滤过程，温度依赖黏度的流体，图像处理等，这些现象都涉及非标准增长条件，即非线性可变指数的方程。近年来，Klein-Gordon 方程和非线性可变指数方程的相关问题深受国内外学者的广泛关注。Klein-Gordon 方程在相对论量子力学和量子场论中被认为是一个非线性波动方程，它作为 Schrödinger 方程的相对论形式，描述了在自由状态下具有零自旋的粒子的运动，它的应用包括分析基本粒子的行为，研究晶体中位错的传播，以及研究约瑟夫森结中的电流流动等。关于这些问题的更多细节可以在以下的研究中找到。

孙丽丽等人[1]研究了一类变指数非线性双曲方程 $u_{tt}=div\left(a(x,t)\nabla u\right)+b(x,t)u|u|^{p(x,t)-1}-c(x,t)u_t|u_t|^{q(x,t)-1}$，证明了初值在一定条件下解的爆破，得到了爆破时间的下界和上界。Antontsev 等人[2]研究了一类具强阻尼和变指数源项的非线性板 Petrovsky 方程 $u_{tt}+\Delta^2u-\Delta u_t+|u_t|^{p(x)-2}u_t=|u|^{q(x)-2}u$，利用 Banach 压缩映射原理，在对变量指数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的适当假设下，得到了弱解的局部存在性，还证明了弱解的全局存在性和负初始能量时解在有限时间内爆破。Yılmaz 等人[3]研究了一类具阻尼项的变指数非线性 Petrovsky 方程 $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\Delta^2u-\Delta u_t+|u_t|^{p(x)-2}u_t=|u|^{q(x)-2}u$，证明了负初始能量时解在有限时间内爆破。廖梦兰等人[4]研究了具有变指数非线性的四阶方程 $u_{tt}+\Delta^2u-M\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u-\Delta u_t+|u_t|^{m(x)-2}u_t=|u|^{p(x)-2}u$，证明了解在任意高的初始能量下会发生爆破现象，也给出了爆破时间的上界。祝相宇[5]运用多种不等式技术研究了一类具变指数增长条件的基尔霍夫粘弹性方程 $|u_t|^\rho u_{tt}-M\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u+\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau+|u_t|^{m(x)-2}u_t=|u|^{p(x)-2}u$ 在不同初始能量条件下的爆破性质。Ouaoua 等人[6]研究了具变指数高阶非线性波动方程 $u_{tt}+(-\Delta)^m u+|u_t|^{r(x)-2}u_t=|u|^{p(x)-2}u$ 在负初始能量时，通过使用 Lyapunov 函数，证明了解在有限时间内爆破。Baghaei [7]研究了一类具变指数伪抛物方程 $u_t-\Delta u_t-\nabla\cdot\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)+\omega|u|^{m(x)-2}u_t=|u|^{p(x)-2}u$ 解的爆破性质。

对于更多的相关研究工作，感兴趣的读者可参见文献[8]-[10]。受上述文献启发，一个自然的问题是，对于类似的具有扩散项和粘弹性项的变指数非线性 Klein-Gordon 方程，其弱解的爆破性会有怎样的变化呢？这正是本文的主要研究方向。

本文的结构如下：第 2 节给出一些必要的符号说明和引理；第 3 节证明问题(1)的弱解在低初始能量时有限时间爆破。

2. 预备知识

首先，我们介绍 Orlicz-Sobolev 类型的 Banach 空间

$$L^{p(x)}(\Omega)=\left\{u(x)\middle|u(x)\text{是实可测函数},\ \rho_{p(x)}(u)=\int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

赋予以下范数

$$\|u\|_{p(x)}=\inf\left\{\lambda>0\middle|\int_\Omega\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\le 1\right\},$$

另外，$L^{p(x)}(\Omega)$空间的对偶空间为$L^{q(x)}(\Omega)$，其中$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1$。

变指数 Sobolev 空间$W^{1,p(x)}(\Omega)$定义为

$$W^{1,p(x)}(\Omega)=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega);|\nabla u|\in L^{p(x)}(\Omega)\right\},$$

赋予如下范数

$$\|u\|_{1,p(x)}=\|u\|_{p(x)}+\|\nabla u\|_{p(x)},$$

进一步，定义$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$为$C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{1,p(x)}$下的完备化空间。下面我们给出一些必要的引理。

引理 1 [11] (Hölder 不等式)对于任意的$u\in L^{p(x)}(\Omega)$和$v\in L^{q(x)}(\Omega)$有

$$\left|\int_\Omega uv\mathrm{d}x\right|\le\left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^-}\right)\|u\|_{p(x)}(\Omega)\|v\|_{q(x)}(\Omega)\le 2\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}.$$

引理 2 [12] 若 $p(x),q(x)\in C_+(\bar{\Omega})=\left\{h\in C(\bar{\Omega}):\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}h(x)>1\right\}$且满足

$$q(x)<p^*(x)=\begin{cases}\dfrac{np(x)}{n-p(x)}, & \text{如果 } p(x)<n;\\ +\infty, & \text{如果 } p(x)\ge n,\end{cases}$$

则连续紧嵌入$W^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$成立。

引理 3 [12]对于任意的$u\in L^{p(x)}(\Omega)$，则

$$(1)\ \|u\|_{p(x)}<1(=1;>1)\Leftrightarrow\rho_{p(x)}(u)<1(=1;>1);$$

$$(2)\ \|u\|_{p(x)}>1\Rightarrow\|u\|_{p(x)}^{p^-}\le\rho_{p(x)}(u)\le\|u\|_{p(x)}^{p^+};$$

$$(3)\ \|u\|_{p(x)}<1\Rightarrow\|u\|_{p(x)}^{p^+}\le\rho_{p(x)}(u)\le\|u\|_{p(x)}^{p^-};$$

定义 1 (弱解的定义)令$T>0$，如果$u\in C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$，$u_t\in L^{m(x)}\left(\Omega\times(0,T)\right)$，$u_{tt}\in L^\infty\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$，且对任意的$\omega\in H_0^1(\Omega)$，有下列成立：

$$(1)\ \langle u_{tt},\omega\rangle+(\nabla u,\nabla\omega)+(u,\omega)+(a(x,t)\nabla u,\nabla\omega)-\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau,\nabla\omega\right)+\left(|u_t|^{m(x)-2}u_t,\omega\right)$$
$$=\left(|u|^{p(x)-2}u,\omega\right),$$

$$(2)\ u(x,0)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega),\ u_t(x,0)=u_1(x)\in L^2(\Omega),$$

则称 $u(x,t)$ 是问题(1)在 $\Omega\times(0,T)$ 上的弱解。

定理 1 若初始条件 $u_0\in H_0^1(\Omega), u_1\in L^2(\Omega)$。假设(2)~(9)式成立，则存在 $T>0$，使得问题(1)在 $\Omega\times[0,T]$ 中存在唯一的局部解 $u(x,t)$。

定理 1 的证明可以通过使用压缩映射原理结合 Galerkin 方法得到，类似文献[13]中所示。在本论文中，作者省略具体过程。

定义 2 设 $u(x,t)$ 是问题(1)的弱解，将最大存在时间 $T_{\max}$ 定义如下

$$T_{\max}=\sup\left\{T>0\,\middle|\,u(t)\text{在}[0,T]\text{上存在}\right\}.$$

1) 如果 $T_{\max}=+\infty$，则弱解 $u(x,t)$ 是整体的；

2) 如果 $T_{\max}<+\infty$，则弱解 $u(x,t)$ 在有限时间内爆破，$T_{\max}$ 是爆破时间。

为了方便讨论问题，定义如下的能量泛函：

$$\begin{aligned}E(t)=&\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)\\&+\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\int_\Omega a(x,t)\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $g\circ\nabla u=\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau$。

为了方便叙述，我们引入一些记号

$$B_1=\max\left\{1,\frac{B}{l^{\frac{1}{2}}}\right\},\ \lambda_1=\left(B_1^2\right)^{\frac{-2}{p^--2}},\ E_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p^-}\right)\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^--2}},$$

其中，B 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ 的最佳常数。

引理 4 若 $u(x,t)$ 为问题(1)的弱解，则 $E(t)$ 是关于时间 t 的非增函数。

证明 将问题(1)的第一个方程左右两边各乘以 u_t 并在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)+\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\int_\Omega a(x,t)\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega a_t(x,t)\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

结合松弛函数 g 和对称矩阵 a 的定义，有

$$E(t)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega a_\tau(x,\tau)\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_\Omega|u_\tau|^{m(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}\int_0^t(g'\circ\nabla u)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^t g(\tau)\|\nabla u\|_2^2\mathrm{d}\tau=E(0),$$

将上式两端求导可知

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega a_t(x,t)\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2,\tag{11}$$

证明完成。

引理 5 假设 $u(x,t)$ 为问题(1)的弱解，若 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，$u_1\in L^2(\Omega)$，且满足(2)~(9)式，进一步假设 $E(0)<E_1$ 和 $\lambda_1<\lambda(0)=B_1^2l\|\nabla u_0\|_2^2$，然后存在一个常数 $\lambda_2>\lambda_1$，这样

$$B_1^2l\|\nabla u\|_2^2\ge\lambda_2,\ \forall t\ge0.$$

证明 利用(10)式、引理 3，以及 Sobolev 嵌入不等式 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$，我们发现

$$
\begin{aligned}
E(t) &\geq \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p^-}\int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{l}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p^-}\max\left\{\|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+}\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p^-}\max\left\{\left(B\|\nabla u\|_2\right)^{p^-}, \left(B\|\nabla u\|_2\right)^{p^+}\right\} \\
&\geq \frac{l}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p^-}\max\left\{\left(B_1 l^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_2\right)^{p^-}, \left(B_1 l^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_2\right)^{p^+}\right\} \\
&= \frac{1}{2B_1^2}\lambda - \frac{1}{p^-}\max\left\{\lambda^{\frac{p^-}{2}}, \lambda^{\frac{p^+}{2}}\right\} := G(\lambda),
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda(t) = B_1^2 l\|\nabla u\|_2^2$。通过直接分析 $G(\lambda)$ 的性质，我们推导出 $G(\lambda)$ 满足以下性质

$$
G'(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2B_1^2} - \dfrac{p^+}{2p^-}\lambda^{\frac{p^+-2}{2}} < 0,\ \lambda > 1, \\ \dfrac{1}{2B_1^2} - \dfrac{1}{2}\lambda^{\frac{p^--2}{2}},\ 0 < \lambda < 1, \end{cases}
$$

$$
G'_+(1) = \frac{1}{2B_1^2} - \frac{p^+}{2p^-} < 0,\ G'_-(1) = \frac{1}{2B_1^2} - \frac{1}{2} < 0,
$$

$$
G'(\lambda_1) = 0,\ 0 < \lambda_1 < 1.
$$

很容易证实，$G(\lambda)$ 在 $(0,\lambda_1)$ 上严格递增，而在 $(\lambda_1,+\infty)$ 上严格递减，当 $\lambda \to +\infty$ 时，$G(\lambda) \to -\infty$，令 $G(\lambda_1) = E_1$。由于 $E(0) < E_1$，存在 λ_2 和 $\tilde{\lambda}_2$，满足 $\tilde{\lambda}_2 > \lambda_1 > \lambda_2$，使得 $G(\lambda_2) = G(\tilde{\lambda}_2) = E(0)$。设 $\lambda(0) = B_1^2 l\|\nabla u_0\|_2^2$，则

$$
G(\lambda(0)) \leq E(0) = G(\lambda_2) = G(\tilde{\lambda}_2). \tag{12}
$$

1) 如果 $\lambda_1 > \lambda(0)$，那么(12)式意味着 $\lambda(0) \leq \tilde{\lambda}_2$。利用反证法，存在某个 $t_0 > 0$，使得 $\lambda(t_0) > \tilde{\lambda}_2$。由于 $\lambda(t)$ 的连续性，我们选择 t_0 使得 $\tilde{\lambda}_2 < \lambda(t_0) < \lambda_1$，因此有 $E(0) = G(\tilde{\lambda}_2) < G(\lambda(t_0)) \leq E(t_0)$，这与(11)式相矛盾。

2) 如果 $\lambda_1 < \lambda(0)$，那么(12)式意味着 $\lambda(0) \geq \lambda_2$。利用反证法，存在某个 $t_0 > 0$，使得 $\lambda(t_0) < \lambda_2$。由于 $\lambda(t)$ 的连续性，我们选择 t_0 使得 $\lambda_1 < \lambda(t_0) < \lambda_2$，因此有 $E(0) = G(\lambda_2) < G(\lambda(t_0)) \leq E(t_0)$，这与(11)式相矛盾。

证明完成。

3. 主要结果

在本节中，我们利用一阶微分不等式技术证明了问题(1)的弱解在低初始能量下在有限时间内爆破。

引理 6 假设满足引理 5 中的条件。对于 $t \in [0,T)$，定义 $H(t) = E_2 - E(t)$，其中 $E_2 \in (E(0), E_1)$ 足够接近 $E(0)$，有

$$
0 < H(0) \leq H(t) \leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p^-}\int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x.
$$

证明 由 $H(t)$ 的定义得出 $H'(t)=-E'(t)\geq 0$，暗示 $H(t)$ 是一个非递减函数，因此

$$H(t)\geq H(0)=E_2-E(0)>0,\ \forall t\in[0,T),$$

根据(10)式和引理 5 可知

$$\begin{aligned}H(t)&=E_2-E(t)\\&\leq E_2-\frac{l}{2}\|\nabla u\|_2^2+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\\&\leq E_1-\frac{\lambda_2}{2B_1^2}+\frac{1}{p^-}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\\&\leq E_1-\frac{\lambda_1}{2B_1^2}+\frac{1}{p^-}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{p^-}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明完成。

定理 2 假设指数满足

$$2<m^-\leq m(x)\leq m^+<p^-\leq p(x)\leq p^+\leq\frac{2n-2}{n-2},$$

和

$$1-l=\int_0^\infty g(\tau)\mathrm{d}\tau<\frac{\frac{p^-}{2}-1}{\frac{p^-}{2}-1+\frac{1}{2p^-}},$$

且初始能量 $E(0)<E_1$ 和 $\lambda_1<\lambda_0=B_1^2l\|\nabla u_0\|_2^2$，则问题(1)的弱解在有限时间 T^* 内爆破且满足

$$\lim_{t\to T^{*-}}\left(\|u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_2^2+\|u\|_{p^+}^{p^+}\right)=+\infty. \tag{13}$$

证明 运用反证法，假设(13)式不成立，则对于任意的 $t\in[0,T^*]$ 且 $T^*<+\infty$ 有

$$\|u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_2^2+\|u\|_{p^+}^{p^+}\leq C_*, \tag{14}$$

其中，C_* 是一个正常数。

构造辅助函数

$$L(t)=H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x,$$

其中 $\varepsilon>0$ 足够小且

$$0<\alpha\leq\min\left\{\frac{p^--m^+}{p^-(m^+-1)},\frac{p^--2}{2p^-}\right\}.$$

下面的证明分为三步。

第一步：$L'(t)$ 的估计。由 $L(t)$ 的定义和 $H'(t)$ 的定义可知

$$\begin{aligned}L'(t)&=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\|u_t\|_2^2+\varepsilon\int_\Omega u_{tt}u\mathrm{d}x\\&\geq(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon\|u_t\|_2^2-\varepsilon(1+a^+)\|\nabla u\|_2^2-\varepsilon\|u\|_2^2\\&\quad+\varepsilon\int_0^tg(t-\tau)\int_\Omega\nabla u(\tau)\nabla u(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\varepsilon\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_tu\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式，选择 $0<\varepsilon_1\le\frac{a^-p^- -2a^+}{a^-p^-}$，可得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&\ge -\varepsilon\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}(g\circ\nabla u)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\right)\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\|\nabla u\|_2^2,
\end{aligned}
$$

结合上面两个式子，易知

$$
\begin{aligned}
L'(t)\ge{}&(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon\left(1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}\right)\|u_t\|_2^2\\
&+\varepsilon\left(\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)\left(1-\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\|\nabla u\|_2^2\\
&+\varepsilon\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}a^- -a^+\right)\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)\|u\|_2^2\\
&-\varepsilon\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_tu\mathrm{d}x+\varepsilon\varepsilon_1\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2\\
\ge{}&(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon\left(1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}\right)\|u_t\|_2^2\\
&+\varepsilon\frac{\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2}}{l}\frac{\lambda_2}{B_1^2}\\
&+\varepsilon\left(\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)\|u\|_2^2\\
&-\varepsilon\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_tu\mathrm{d}x+\varepsilon\varepsilon_1\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2\\
\ge{}&(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon\left(1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}\right)\|u_t\|_2^2\\
&+\varepsilon\frac{\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2}}{l}\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^- -2}}\\
&+\varepsilon\left(\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)\|u\|_2^2\\
&-\varepsilon\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_tu\mathrm{d}x+\varepsilon\varepsilon_1\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2.
\end{aligned}
$$

第 1.1 步：$\varepsilon\frac{\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2}}{l}\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^- -2}}-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2$ 的估计。根据定理 2 中的条件，有

$$
E(0)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p^-}\right)\left(1-\frac{1-l}{p^-\left(p^- -2\right)l}\right)\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^- -2}}=\frac{\left(\frac{p^-}{2}-1\right)\frac{l}{2}-\frac{1}{2p^-}\frac{1-l}{2}}{lp^-}\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^- -2}}<E_1,
$$

这里我们取 $\varepsilon_1>0$ 足够小，且 $E_2\in\left(E(0),E_1\right)$ 足够接近 $E(0)$ 则

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\frac{l}{2}\left(\frac{p^-\left(1-\varepsilon_1\right)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-\left(1-\varepsilon_1\right)}\frac{1-l}{2}}{l}\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^--2}}-\varepsilon p^-\left(1-\varepsilon_1\right)E_2\\
&\geq\varepsilon\frac{\frac{l}{2}\left(\frac{p^-\left(1-\varepsilon_1\right)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-\left(1-\varepsilon_1\right)}\frac{1-l}{2}}{l}\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^--2}}\\
&\quad-\varepsilon\left(1-\varepsilon_1\right)\frac{\left(\frac{p^-}{2}-1\right)\frac{l}{2}-\frac{1}{2p^-}\frac{1-l}{2}}{l}\left(B_1^2\right)^{\frac{-p^-}{p^--2}}\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

第 1.2 步：$-\varepsilon\int_\Omega\left|u_t\right|^{m(x)-2}u_tu\mathrm{d}x$ 的估计。应用 Young 不等式 $\varepsilon_2>1$，Sobolev 嵌入不等式 $L^{p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$，由引理 3 和引理 5，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega\left|u_t\right|^{m(x)-2}u_tu\mathrm{d}x\right|\\
&\leq\int_\Omega\left|u_t\right|^{m(x)-1}H^{-\alpha\frac{m(x)-1}{m(x)}}(t)H^{\alpha\frac{m(x)-1}{m(x)}}(t)|u|\mathrm{d}x\\
&\leq\varepsilon_2H^{-\alpha}(t)\int_\Omega\left|u_t\right|^{m(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{\varepsilon_2^{m^--1}}\int_\Omega|u|^{m(x)}H^{\alpha(m(x)-1)}(t)\mathrm{d}x\\
&\leq\varepsilon_2H^{-\alpha}(t)\int_\Omega\left|u_t\right|^{m(x)}\mathrm{d}x+\frac{2C_1^{\alpha\left(m^--m^+\right)}}{\varepsilon_2^{m^--1}}H^{\alpha\left(m^+-1\right)}(t)\int_\Omega|u|^{m(x)}\mathrm{d}x\\
&\leq\varepsilon_2H^{-\alpha}(t)\int_\Omega\left|u_t\right|^{m(x)}\mathrm{d}x+\frac{C_2}{\varepsilon_2^{m^--1}}H^{\alpha\left(m^+-1\right)}(t)\max\left\{\|u\|_{p(x)}^{m^+},\|u\|_{p(x)}^{m^-}\right\},
\end{aligned}
$$

其中 $C_1=\min\{H(0),1\}$，$C_2=2\left(1+|\Omega|\right)^{m^+}C_1^{\alpha\left(m^--m^+\right)}$。接下来，我们有

$$
\|u\|_{p(x)}^{m^+}\leq\max\left\{\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^+}},\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\right\}\leq\max\left\{\left(p^-H(t)\right)^{\frac{m^+}{p^+}-\frac{m^+}{p^-}},1\right\}\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}},
$$

和

$$
\|u\|_{p(x)}^{m^-}\leq\max\left\{\left(p^-H(t)\right)^{\frac{m^-}{p^+}-\frac{m^+}{p^-}},\left(p^-H(t)\right)^{\frac{m^--m^+}{p^-}}\right\}\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}},
$$

这意味着

$$
\max\left\{\|u\|_{p(x)}^{m^+},\|u\|_{p(x)}^{m^-}\right\}\leq C_3\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}},
$$

其中，$C_3=2\min\left\{p^-H(0),1\right\}^{\frac{m^-}{p^+}-\frac{m^+}{p^-}}$。回顾 $0<\alpha\leq\dfrac{p^--m^+}{p^-\left(m^+-1\right)}$ 和引理 6，显然，

$$
\begin{aligned}
&H^{\alpha(m^+-1)}(t)\max\left\{\|u\|_{p(x)}^{m^+},\|u\|_{p(x)}^{m^-}\right\}\\
&\le C_3 H^{\alpha(m^+-1)}(t)\left(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\\
&\le C_3 \frac{H^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(t)}{H^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(0)} H^{1-\frac{m^+}{p^-}}(t) H^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(0)\left(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\\
&\le C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}\left(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}} H^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(0)\left(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\\
&\le C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}} C_1^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

由上述可知，

$$
\begin{aligned}
L'(t)\ge{}&(1-\alpha-\varepsilon\varepsilon_2)H^{-\alpha}(t)\int_\Omega |u_t|^{m(x)}\,\mathrm{d}x+\varepsilon\left(1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}\right)\|u_t\|_2^2\\
&+\varepsilon\left(\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)\|u\|_2^2\\
&+\varepsilon\left(\varepsilon_1-\frac{C_1^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}C_2C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}}{\varepsilon_2^{m^--1}}\right)\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x+\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t),
\end{aligned}
$$

我们适当的常数 ε_2，使

$$
\frac{C_1^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}C_2C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}}{\varepsilon_2^{m^--1}}<\varepsilon_1<\frac{p^--2}{p^-},
$$

然后选择足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $1-\alpha>\varepsilon\varepsilon_2$。因此，我们得到

$$
L'(t)\ge M_1\left(H(t)+\|u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_2^2+\int_\Omega |u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\right), \tag{15}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
M_1=\varepsilon\min\Bigg\{&1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2},\frac{l}{2}\left(\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2p^-(1-\varepsilon_1)}\frac{1-l}{2},\\
&\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1,\varepsilon_1-\frac{C_1^{\alpha(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}C_2C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}}{\varepsilon_2^{m^--1}},p^-(1-\varepsilon_1)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

由(15)式表明 $L(t)\ge L(0)$。因此，对于充分小的 ε，我们有

$$L(0)=H^{1-\alpha}(0)+\varepsilon\int_\Omega u_1u_0\mathrm{d}x>0.$$

第二步。$L(t)$ 的估计。应用 Hölder 不等式，Young 不等式和 Sobolev 嵌入不等式 $L^{p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}&\le\left(\|u_t\|_2\|u\|_2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\\&\le(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\|u\|_{p(x)}^{\frac{1}{1-\alpha}}\\&\le\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\mu}\|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}\mu}+\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\nu}\|u\|_{p(x)}^{\frac{1}{1-\alpha}\nu},\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$。选择 $\mu=2(1-\alpha)>1$，然后 $\nu=\frac{2(1-\alpha)}{2(1-\alpha)-1}$，进一步得到

$$\left|\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\le\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\mu}\|u_t\|_2^2+\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\nu}\|u\|_{p(x)}^{\frac{2}{2(1-\alpha)-1}},\tag{16}$$

由 $0<\alpha<\frac{p^--2}{2p^-}$，我们得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{p(x)}^{\frac{2}{2(1-\alpha)-1}}&\le\max\left\{\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p^-(2(1-\alpha)-1)}},\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p^+(2(1-\alpha)-1)}}\right\}\\&\le\left\{\left(p^-H(t)\right)^{\frac{2-p^-(2(1-\alpha)-1)}{p^+(2(1-\alpha)-1)}},\left(p^-H(t)\right)^{\frac{2-p^+(2(1-\alpha)-1)}{p^+(2(1-\alpha)-1)}}\right\}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\\&\le C_4\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $C_4=\min\left\{\left(p^-H(0)\right),1\right\}^{\frac{2-p^+(2(1-\alpha)-1)}{p^+(2(1-\alpha)-1)}}$。将(17)式代入(16)式，我们得到

$$\left|\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\le\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\mu}\|u_t\|_2^2+\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\nu}C_4\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x.\tag{18}$$

由(17)式和不等式 $(a_1+a_2+\cdots+a_l)^k\le2^{(k-1)(l-1)}\left(a_1^k+a_2^k+\cdots+a_l^k\right)$，其中 $a_i\ge0$，$k\ge1$ 和 $i=1,2,\cdots,l$，我们得到

$$\begin{aligned}L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)&=\left(H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\\&\le2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(H(t)+\left(\varepsilon\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\\&\le M_2\left(H(t)+\|u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_2^2+\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}\tag{19}$$

其中

$$M_2 = 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \max\left\{1, \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\left(1+|\Omega|\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\mu}, \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\left(1+|\Omega|\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\nu} C_4\right\}.$$

结合(15)式和(19)式，我们得到

$$L'(t) \geq \frac{M_1}{M_2} L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t),\ \forall t \geq 0.$$

上式在$(0,t)$上进行简单积分，得到

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(0) - \frac{M_1}{M_2}\frac{\alpha}{1-\alpha}t},$$

这表明$L(t)$在有限时间T^*处爆破，且满足

$$T^* \leq \frac{M_2}{M_1}\frac{1-\alpha}{\alpha} L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0),$$

此外

$$\lim_{t \to T^{*-}} \left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \int_\Omega |u|^{p(x)} \mathrm{d}x\right) = +\infty,$$

由此，我们很容易地得出结论

$$\int_\Omega |u|^{p(x)} \mathrm{d}x \leq \int_{\{|u|\geq 1\}} |u|^{p^+} \mathrm{d}x + \int_{\{|u|<1\}} |u|^{p^-} \mathrm{d}x \leq \|u\|_{p^+}^{p^+} + |\Omega|,$$

我们易知

$$\lim_{t \to T^{*-}} \left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|u\|_{p^+}^{p^+}\right) = +\infty,$$

这与(14)式矛盾，因此问题(1)的解在有限时间内爆破。

致　谢

作者对编辑和审稿人提出的重要建议表示诚挚的感谢。

基金项目

吉林省科技发展计划项目资助(20240101307JC)。

参考文献

[1] Sun, L., Ren, Y. and Gao, W. (2016) Lower and Upper Bounds for the Blow-Up Time for Nonlinear Wave Equation with Variable Sources. *Computers & Mathematics with Applications*, **71**, 267-277. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.11.016

[2] Antontsev, A., Ferreira, J. and Piskin, E. (2021) Existence and Blow up of Solutions for a Strongly Damped Petrovsky Equation with Variable-Exponent Nonlinearities. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2021**, 6. https://doi.org/10.58997/ejde.2021.06

[3] Yılmaz, N., Pişkin, E. and Çelik, E. (2023) Well-Posedness and Blow-Up of Solutions for a Variable Exponent Nonlinear Petrovsky Equation. *Advances in Mathematical Physics*, **2023**, Article ID: 8866861. https://doi.org/10.1155/2023/8866861

[4] Liao, M. and Li, Q. (2023) Blow-Up of Solutions to the Fourth-Order Equation with Variable-Exponent Nonlinear Weak

Damping. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **20**, Article No. 179. https://doi.org/10.1007/s00009-023-02391-5

[5] 祝相宇. 几类具阻尼作用的波动方程(组)解的相关研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2024.

[6] Ouaoua, A. and Chalabi, E. (2024) The Blow-Up Behavior of the Solution for a Higher-Order Nonlinear Wave Equation with Source Term. *Studies in Engineering and Exact Sciences*, **5**, e12915. https://doi.org/10.54021/seesv5n3-117

[7] Baghaei, K. (2025) Blow-Up in Finite Time for a Pseudo-Parabolic Equation with Variable Exponents. *Applicable Analysis*. https://doi.org/10.1080/00036811.2025.2461551

[8] 李海霞, 曹春玲. 具变指数非线性项的强阻尼波动方程的爆破[J]. 吉林大学学报(理学版), 2024, 62(1): 78-86.

[9] 吴秀兰, 赵雅鑫, 杨晓新, 等. 一类具有正初始能量的双重退化方程解的爆破和爆破时间上界估计[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2024, 56(3): 22-26.

[10] 马闯. 一类具超临界阻尼和粘性项的四阶双曲型方程解的存在性及能量衰减[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2024.

[11] Diening, L. and Harjulehto, P. (2011) Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer.

[12] Fan, X. and Zhao, D. (2001) On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **263**, 424-446. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7617

[13] Chu, Y., Wen, B. and Cheng, L. (2024) Existence and Blow up for Viscoelastic Hyperbolic Equations with Variable Exponents. *Communications in Analysis and Mechanics*, **16**, 717-737. https://doi.org/10.3934/cam.2024032