

“瓜豆原理”在动点最值问题中的应用

——结合中考实例分析

秦豆豆, 许璐*

江汉大学人工智能学院数学与大数据系, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年6月3日; 录用日期: 2025年6月27日; 发布日期: 2025年7月4日

摘要

运用几何变换思想, 通过构造全等或相似三角形建立“种线得线, 种圆得圆”的轨迹映射关系, 实现“动态轨迹→静态距离”的转化, 运用“瓜豆原理”解决动点最值问题。分析了近年中考动点最值问题, 揭示该模型在培养学生几何直观(轨迹预判)、模型思想(关系抽象)、推理能力(变换证明)三个方面的育人价值。将“种瓜得瓜, 种豆得豆”的哲学思想引入到几何学习的实际操作中, 为落实“三会”核心素养目标提供创新思路。

关键词

瓜豆原理, 动点最值, 中考数学, 几何变换

Application of the “Melon Bean Principle” in Moving Point Maximum and Minimum Problems

—Case Analyses from Senior High School Entrance Examinations

Doudou Qin, Lu Xu*

Department of Mathematics and Big Data, School of Artificial Intelligence, Jiangnan University, Wuhan Hubei

Received: Jun. 3rd, 2025; accepted: Jun. 27th, 2025; published: Jul. 4th, 2025

Abstract

Using the idea of geometric transformation, the trajectory mapping relationship of “planting lines

*通讯作者。

文章引用: 秦豆豆, 许璐. “瓜豆原理”在动点最值问题中的应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(7): 48-53.

DOI: 10.12677/aam.2025.147345

to get lines, planting circles to get circles” is established by constructing congruent or similar triangles, so as to realize the transformation of “dynamic trajectory $\rightarrow$ static distance”, and use the “melon bean principle” to solve the problem of the minimum value of the moving point. An analysis of the maximum and minimum problems of moving points in recent Senior High School Entrance Examinations reveals the educational value of this model in three aspects: cultivating students’ geometric intuition (trajectory prediction), model thinking (relationship abstraction), and reasoning ability (transformation proof). The philosophical idea of “planting melons and getting melons, planting beans and getting beans” is introduced into the practical operation of geometric learning, so as to provide innovative ideas for the implementation of the core literacy goals of the “San Hui”.

Keywords

“Melon and Bean Principle”, Maximum and Minimum Values of Moving Points, Senior High School Entrance Examination Mathematics, Geometric Transformation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》[1]明确指出要求学生掌握“用几何变换分析图形性质”的能力。动点最值问题作为中考数学的高频考点,常以动态几何形式考查学生的空间想象与逻辑推理能力。传统解题方法多依赖特殊位置的探究,缺乏一定的系统性。本文通过“瓜豆原理”构建主从联动模型,运用几何变换揭示主动点与从动点之间的轨迹映射关系,为解决此类问题提供更加系统的方法与育人思路,下面将结合中考实例对如何运用瓜豆原理求解中考最值问题进行说明。

2. 主从联动构全等/相似——瓜豆原理及证明

2.1. 原理内涵

“瓜豆原理”源于几何变换中的轨迹映射理论,其主要内容可概括为“种线得线,种圆得圆”。但“瓜豆原理”的适用需满足**双定条件**: 设定点为 O , 主动点为 A , 从动点为 P , 若满足: ① 距离比为定值: $\frac{OA}{OP} = k$ ($k > 0$ 且为常数); ② 夹角为定角: $\angle AOP = \alpha$ (α 为固定角度), 则从动点 P 的轨迹与主动点 A 的轨迹成位似旋转变换(当 $k = 1$ 时为单纯旋转变换, 此时相似关系转化为全等)。瓜豆原理的核心本质在于: 两动点与定点构成的三角形始终相似或全等, 即 $\triangle OAP \sim \triangle OA'P'$ (对应点满足变换关系), 由此保证轨迹的“映射一致性”: 若主动点沿直线运动, 则从动点轨迹亦为直线; 若主动点沿圆运动, 则从动点运动轨迹亦为圆。

2.2. 数学证明——直线型轨迹

如图 1 所示, 若点 A 是定点, 点 B 和点 C 都为动点, 在运动的过程中 $\triangle ABC$ 始终为等腰直角三角形且保持不变。

如图 2 所示, 随着点 B 的运动, 有很多种情况, 找到一种最方便研究的特殊情况, 由特殊推向一般, 由于点 B 是动点, 假设点 B 运动到点 B' 的位置, 则点 C 必须跟从着运动到达点 C' 的位置, 才能满足

$\triangle AB'C'$ 在运动过程中始终满足题设条件为等腰直角三角形, 有 $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AB'}{AC'}$, 因为 $\angle B'AB + \angle BAC' = 45^\circ$, $\angle BAC' + \angle C'AC = 45^\circ$, 所以 $\angle B'AB = \angle C'AC$, 所以 $\triangle ABB' \sim \triangle ACC'$, 由相似得 $\angle AC'C = \angle AB'B = 90^\circ$, 由于点 B 在直线 BB' 上运动, 所以点 C' 也始终在直线 CC' 上运动, 我们可以将点 B 视为是主动点, 点 C 视为从动点, 主从联动, 从动点 C 的运动轨迹与主动点 B 的轨迹保持一致也是一条直线。

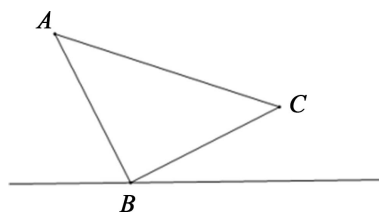


Figure 1. Case (1)

图 1. 案例(1)

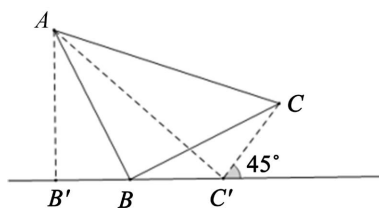


Figure 2. Case (2)

图 2. 案例(2)

2.3. 数学证明——圆弧型轨迹

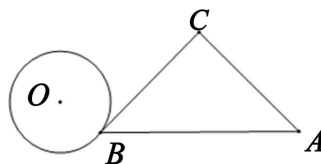


Figure 3. Case (3)

图 3. 案例(3)

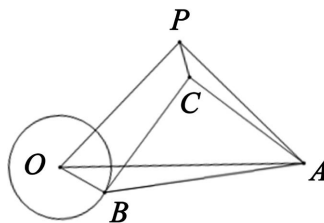


Figure 4. Case (4)

图 4. 案例(4)

如图 3 所示, 点 A 为一定点, 在平面内任意再找两动点: 点 B 和点 C , 满足 $AB = \sqrt{2}AC$, 使得 $\triangle ABC$ 始终为等腰直角三角形, 且动点 B 的运动轨迹为圆 O (接下来需要证明点 C 的轨迹也是一个圆):

如图 4 所示, 连接 AO , 以 AO 为底边构造任意一个新的等腰直角 $\triangle POA$ (点 P 为构造后一定点), 连

接 OB 和 PC , 发现 $\frac{AC}{AB} = \frac{PA}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 又由 $\angle PAC + \angle CAO = \angle BAO + \angle OAC = 45^\circ$, 得到 $\angle PAC = \angle BAO$, 所以 $\triangle OAB \sim \triangle PAC$, 所以 $\frac{PC}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 因为点 B 的运动轨迹为圆 O , 半径 OB 长度不变, $PC = \frac{\sqrt{2}}{2} OB$, 故 PC 的长度也是个定值, 动点 C 到定点 P 的距离不变, 故从动点 C 的运动轨迹与主动点 B 的运动轨迹一致也是圆。

3. 中考最值问题中的模型应用

瓜豆模型可从几何直观、模型思想和推理能力三方面培养学生的核心素养: 首先在利用瓜豆原理证明轨迹映射时, 学生需经历“旋转变换→相似判定→轨迹推导”的逻辑链条(如 2.2 节中由 $\triangle ABB' \sim \triangle ACC'$ 证明直线轨迹), 符合《课标》对“演绎推理”的要求。下面通过中考实例分析另外两方面的育人价值:

3.1. 直线型轨迹

例 1、(2021·江苏省连云港市 27 题第(3)问) $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, M 是高 CD 上的一个动点, 以 BM 为边作等边三角形 BMN , 如图 5 所示, 在点 M 从点 C 到点 D 的运动过程中, 求点 N 所经过的路径长[2]。

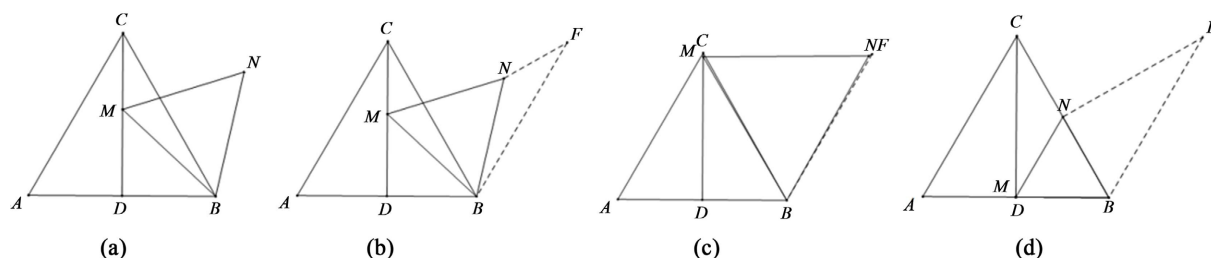


Figure 5. Case (5)
图 5. 案例(5)

解析: 如图 5(b)所示, 将线段 BC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得线段 BF , 有 $BF = BC$, $\angle MBC = \angle NBF = 60^\circ - \angle CBN$, 由 $\triangle BMN$ 为等边三角形, 所以 $BM = BN$, 所以不管点 M 如何运动, 在这个动态过程中, 始终有 $\triangle CMB \cong \triangle FNB$ (SAS), 由于题设中点 M 的运动轨迹是线段 CD , 随着点 M 的运动, 有很多种情况, 找到两种最方便研究的特殊情况, 由特殊推向一般, 如图 5(c)所示, 当点 M 在点 C 处时, 点 N 在点 F 处; 如图 5(d)所示, 点 M 在点 D 处, 则点 N 在线段 BC 上, 所以 N 点的运动轨迹是线段 FN , 且 $FN \perp BN$, 相当于 $CD \perp BD$, $FN = CD = BC \times \cos 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

这道题在分析主动点轨迹时, 学生需通过“动态演示→特殊位置验证→轨迹猜想”的过程, 由点 M 沿 CD 运动预判点 N 轨迹为线段, 建立“种线得线”的直观认知。

3.2. 圆弧型轨迹

例 2、(2023·四川省宜宾市第 17 题)如图 6 所示, M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 的中点, P 是正方形内一点, 连接 BP , 线段 BP 以 B 为中心逆时针旋转 90° 得到线段 BQ , 连接 MQ , 若 $AB = 4$, $MP = 1$, 则 MQ 的最小值为_____ [3]。

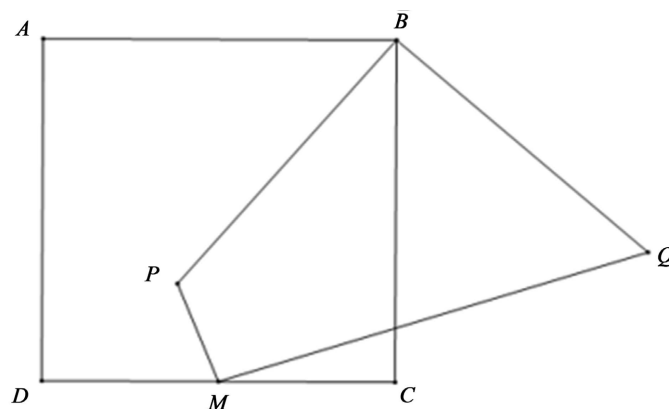


Figure 6. Case (6)

图 6. 案例(6)

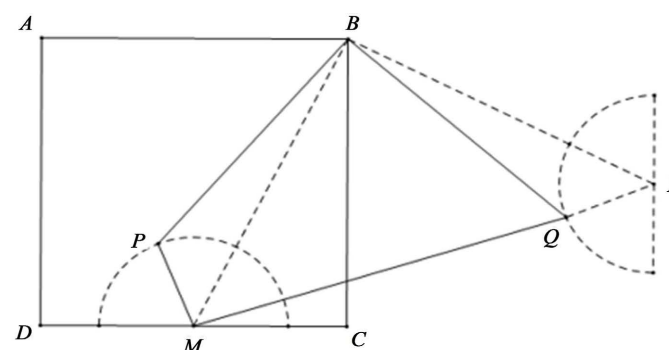


Figure 7. Case (7)

图 7. 案例(7)

解析: 如图 7 所示, 连接 BM , 将 BM 以 B 为中心逆时针旋转 90° , 点 M 点对应点 E , 连接 QE , 有 $BP = BQ$, $\angle PBM = 90^\circ - \angle MBQ = \angle QBE$, $BM = BE$, 所以 $\triangle BPM \cong \triangle BQE$ (SAS), 有 $EQ = PM$, 由 P 点的运动轨迹为以 M 点为圆心, MP 长度为半径的半圆弧, 可得点 Q 的运动轨迹为以 E 为圆心, EQ 为半径的半圆弧, 根据“圆外一定点到圆上任一点的距离, 在圆心、定点、动点, 三点共线时定点与动点之间的距离最短”, 所以当 M 、 Q 、 E 三点共线时, MQ 的值最小, $MQ_{\min} = ME - EQ = \sqrt{2}BM - EQ = \sqrt{2} \times \sqrt{BC^2 + CM^2} - EQ = \sqrt{2} \times \sqrt{4^2 + 2^2} - 1 = 2\sqrt{10} - 1$ 。

此题需要学生从“两动点到定点的定比定角关系”抽象出相似三角形模型, 构造 $\triangle BPM \cong \triangle BQE$, 体现从具体问题到数学模型的转化能力。

4. 结语

瓜豆原理为中考主从联动型动点最值问题提供了一定的解决方案, 帮助学生摆脱对特殊位置试探的碎片化思维。通过揭示几何变换的数学本质, 促进学生逐步从“解题者”的角色转变为“建模者”。同时, 瓜豆原理中蕴含的“种瓜得瓜, 种豆得豆”的哲学思想与数学模型方法的融合, 为义务教育阶段数学课程思政建设提供了新思路。

基金项目

江汉大学研究生科研创新基金项目(KYCXJJ202350)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 连云港市教育考试院. 2021 年江苏省连云港市中考数学真题(含解析) [EB/OL]. 教习网. 2023-08-31.
<https://m.51jiaoxi.com/doc-14786546.html>, 2025-03-15.
- [3] 宜宾市教育考试院. 2023 年四川省宜宾市中考数学真题(解析版) [EB/OL]. 心标教育, 2025-01-16.
<https://www.xbjy.com/xhtml/202501/5452.html>, 2025-03-15.