Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(7), 197-213
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.147357

Hans汉斯

一类复偏微分方程组的超越整函数解

郭惠媛，徐俊峰*

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门

收稿日期：2025年6月21日；录用日期：2025年7月15日；发布日期：2025年7月21日

摘　要

本文旨在应用多变量 Nevanlinna 值分布理论，进一步研究一类乘积型一阶非线性复偏微分方程组 $\begin{cases}\left(a\mu_{z_1}+bv_{z_2}\right)^{p_1}\left(c\mu_{z_2}+dv_{z_1}\right)^{p_2}=e^g\\\left(a\mu_{z_2}+bv_{z_1}\right)^{p_3}\left(c\mu_{z_1}+dv_{z_2}\right)^{p_4}=e^g\end{cases}$ 的超越整函数解的存在性条件与形式，其中 $a,b,c,d\in\mathbb{C}-\{0\}$，$p_1,p_2,p_3,p_4$ 为非零实常数，g 为 $\mathbb{C}^2$ 中的非常数多项式。所得结论是对徐洪焱、徐宜会等人先前结论的进一步推广和改进，同时给出例子说明求得结果是精确的。

关键词

偏微分方程，Nevanlinna理论，整函数解，多复变量

Transcendental Entire Solutions to a Class of Complex Partial Differential Equation Systems

Huiyuan Guo, Junfeng Xu*

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: Jun. 21st, 2025; accepted: Jul. 15th, 2025; published: Jul. 21st, 2025

Abstract

This article is devoted to describe the transcendental entire solutions to a class of the first order nonlinear partial differential equations (PDEs) with product type $\begin{cases}\left(a\mu_{z_1}+bv_{z_2}\right)^{p_1}\left(c\mu_{z_2}+dv_{z_1}\right)^{p_2}=e^g\\\left(a\mu_{z_2}+bv_{z_1}\right)^{p_3}\left(c\mu_{z_1}+dv_{z_2}\right)^{p_4}=e^g\end{cases}$

*通讯作者。

文章引用: 郭惠媛, 徐俊峰. 一类复偏微分方程组的超越整函数解[J]. 应用数学进展, 2025, 14(7): 197-213.
DOI: 10.12677/aam.2025.147357

by using Nevanlinna theory in several complex variables, where $a,b,c,d\in\mathbb{C}-\{0\}$, p_1,p_2,p_3,p_4 are non-zero real constants and g is a non-constant polynomial in $\mathbb{C}^2$. Our results are the generalizations and improvements of the previous theorem given by Hongyan Xu, Yihui Xu, etc. Furthermore, some examples have been exhibited to show that our results are precise.

Keywords

Partial Differential Equation, Nevanlinna Theory, Entire Solution, Several Complex Variables

1. 引言与定理

17 世纪法国数学家 Pierre de Fermat 提出费马大定理：对于任意大于 2 的整数 n，方程 $x^n+y^n=z^n$ 不存在正整数解，该定理在数学界引起了广泛的关注和研究。1939 年，Iyer [1]进一步将费马方程推广至函数方程，证明了 Fermat 型函数方程的一个经典结果是：$f^2+g^2=1$ 的整函数解一定具有 $f=\cos a(z)$，$g=\sin a(z)$ 的形式，这里 $a(z)$ 为整函数。

随后，Khavinson 在多复变量方面考虑一阶偏微分方程，于 1995 年在文[2]中指出：双变量 Fermat 型偏微分方程

$$u_x^2+u_y^2=1 \tag{1.1}$$

的整函数解必为线性形式。Saleeby 于 1999 年在文[3]中进一步指出方程(1.1)具有形如 $u=ax+by+c$ 的解，其中 $a^2+b^2=1$，c 为任意常数。事实上，方程(1.1)被命名为 Eikonal 方程，其在物理光学、几何成像、界面追踪以及数值模拟等多个领域具有广泛的应用前景和重要的研究价值，在光学研究中，Eikonal 方程可将物理波动光学和几何射线光学建立连接关系，有助于更深入地理解光的传播和衍射现象。在界面追踪问题中，Eikonal 方程可用于描述界面的运动和演化过程，故有关 Fermat 型偏微分方程及其衍生形式的研究得到了众多学者的关注，也获得一系列重要且有趣的结果。

特别地，在 2018 年徐玲和曹廷彬[4]研究了一类 Fermat 型偏微分方程

$$\left(\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1}\right)^2+f^2(z_1,z_2)=1 \tag{1.2}$$

的有限级超越整函数解的具体形式，得出：

定理 A [4]若 $f(z_1,z_2)$ 为方程(1.2)的有限级超越整函数解，则 $f(z_1,z_2)$ 具有形式

$$f(z_1,z_2)=\sin(Az_1+g(z_2)),$$

其中 $g(z_2)$ 为关于 z_2 的多项式，$A\in\mathbb{C}$，满足 $A^2=1$。

进一步地，在 2020 年徐洪焱、刘三阳和李改平[5]将方程(1.2)推广为二次二项式复偏微分方程组，推广了定理 A，同时通过举例的形式说明了解的形式是精确的，获得了下面的结果。

定理 B [5]若 (μ,v) 为方程组

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial f_1(z_1,z_2)}{\partial z_1}\right)^2+f_2(z_1,z_2)^2=1\\ \left(\dfrac{\partial f_2(z_1,z_2)}{\partial z_1}\right)^2+f_1(z_1,z_2)^2=1\end{cases} \tag{1.3}$$

的一对有限级超越整函数解，那么

$$\left(f_1(z),f_2(z)\right)=\left(\frac{e^{l(z)+B_1}+e^{-(l(z)+B_1)}}{2},\eta\frac{e^{l(z)+B_1}+e^{-(l(z)+B_1)}}{2}\right),$$

其中 $l(z)=a_1z_1+a_2z_2$， $B_1\in\mathbb{C}$， a_1,η 满足条件(i) $a_1=i,\eta=1$，或条件(ii) $a_1=-i,\eta=-1$。

基于 Khavinson 与李保勤在文[2]及文[6]中指出：通过线性变换 $z_1=x+iy,z_2=x-iy$ 方程 $u_{z_1}^2+u_{z_2}^2=e^g$ 可转化为 $u_xu_y=e^g$。受该启发，吕锋[7]于 2020 年讨论了乘积型偏微分方程

$$u_xu_y=x^me^g \tag{1.4}$$

解的存在性条件与具体形式，得到：

定理 C [7] 设 g 为 $\mathbb{C}^2$ 中的多项式，且 m 为非负数，则方程(1.4)的整函数解是下列形式之一：

(i) $u=\phi_1(x)+\phi_2(y)$，其中 $\phi_1'(x)=x^me^{\alpha(x)},\phi_2'(y)=e^{\beta(x)}$，满足 $\alpha(x)+\beta(y)=g(x,y)$；

(ii) $u=F\left(y+Ax^{m+1}\right)$，其中 A 为非零常数，且 $(m+1)AF'^2\left(y+Ax^{m+1}\right)=e^g$；

(iii) $u=\left(x^{k+1}/(k+1)\right)e^{ay+b}+C$，其中 $\left(a/(k+1)\right)e^{2(ay+b)}=e^g\ (a\neq0),m=2k+1$，且 b,c 为常数。

受到方程(1.2)~(1.3)形式变化的启发，徐洪焱、刘晓兰等人[8]便提出问题，如何描述方程(1.4)在 $\mathbb{C}^2$ 中转化为乘积型复偏微分方程组的解，同时得到：

定理 D [8] 设 a,b,c,d 为非零复常数，满足 $D=ad-bc\neq0$，且 g 为 $\mathbb{C}^2$ 中的非常数多项式。若 (μ,v) 为方程组

$$\begin{cases}\left(au_{z_1}+bv_{z_2}\right)\left(cu_{z_2}+dv_{z_1}\right)=e^g\\ \left(au_{z_2}+bv_{z_1}\right)\left(cu_{z_1}+dv_{z_2}\right)=e^g\end{cases} \tag{1.5}$$

的有限级超越整函数解，那么 $g=2\varphi\left(z_2+e^{\xi_2-\xi_1}z_1\right)-\xi_1$，且

$$(\mu,v)=\left(\frac{e^{\xi_2-\xi_1}}{D}\left(d-be^{-\xi_2}\right)F\left(z_2+e^{\xi_1-\xi_2}z_1\right),\frac{1}{D}\left(ae^{-\xi_2}-c\right)G\left(z_2+e^{\xi_1-\xi_2}z_1\right)\right),$$

其中 $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{C}$，满足 $e^{2(\xi_2-\xi_1)}=1$，且 $F_1'(t)=G_1'(t)=e^{\varphi(t)}=e^{(g+\xi_1)/2}$。

本文的目的是在定理 D 的基础上作推广，研究一个更一般的乘积型复偏微分方程组：

$$\begin{cases}\left(a\mu_{z_1}+bv_{z_2}\right)^{p_1}\left(c\mu_{z_2}+dv_{z_1}\right)^{p_2}=e^g,\\ \left(a\mu_{z_2}+bv_{z_1}\right)^{p_3}\left(c\mu_{z_1}+dv_{z_2}\right)^{p_4}=e^g.\end{cases} \tag{1.6}$$

采用与文献[8]相似的方法，我们可以得到如下定理：

定理 1.1 假设 $D=ad-bc\neq0$ 且 (μ,v) 为一阶非线性偏微分方程组(1.6)的有限级超越整函数解，其中 $a,b,c,d\in\mathbb{C}-\{0\}$， p_1,p_2,p_3,p_4 为非零实常数， g 为 $\mathbb{C}^2$ 中的非常数多项式，则 (μ,v) 具有以下形式之一：

(i) 若 $g=p_2\varphi(t)+p_1\xi_1-p_2\xi_2=(p_3+p_4)\varphi(t)-p_4\xi_2+p_4\xi_3$， $t=z_2-\dfrac{be^{\xi_3}}{de^{\xi_2}-b}z_1=z_2-\dfrac{ce^{\xi_2}-a}{ae^{\xi_3}}z_1$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$，则

$$\left(\mu,v\right)=\left(\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)F_1\left(t\right)+\frac{d}{D}e^{\xi_1}z_1,\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_2}G_1\left(t\right)-\frac{c}{D}e^{\xi_1}z_2\right),$$

其中 $F_1'(t)=G_1'(t)=e^{\varphi(t)}$， $\varphi(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(ii) 若 $g=\left(p_1+p_2\right)\phi\left(t\right)-p_2\xi_2=p_4\phi\left(t\right)+p_3\xi_1-p_4\xi_2+p_4\xi_3$， $t=z_2-\frac{de^{\xi_2}-be^{\xi_3}}{b}z_1=z_2-\frac{a}{ce^{\xi_2}-ae^{\xi_3}}z_1$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}F_2\left(t\right)+\frac{d}{D}e^{\xi_1}z_2,\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)G_2\left(t\right)-\frac{c}{D}e^{\xi_1}z_1\right),$$

其中 $F_2'(t)=G_2'(t)=e^{\phi(t)}$， $\phi(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(iii) 若 $g=p_1\theta\left(t\right)+p_2\xi_1=\left(p_3+p_4\right)\theta\left(t\right)+p_3\xi_3-p_3\xi_2-p_4\xi_2$， $t=z_2-\frac{b-de^{\xi_2}}{de^{\xi_3}}z_1=z_2-\frac{ce^{\xi_3}}{a-ce^{\xi_2}}z_1$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_3-\xi_2}F_3\left(t\right)-\frac{b}{D}e^{\xi_1}z_2,\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)G_3\left(t\right)+\frac{a}{D}e^{\xi_1}z_1\right),$$

其中 $F_3'(t)=G_3'(t)=e^{\theta(t)}$， $\phi(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(iv) 若 $g=\left(p_1+p_2\right)\psi\left(t\right)-p_2\xi_2=p_3\psi\left(t\right)+p_3\xi_3-p_3\xi_2+p_4\xi_1$， $t=z_2-\frac{de^{\xi_2}}{b-de^{\xi_3}}z_1=z_2-\frac{a-ce^{\xi_3}}{ce^{\xi_2}}z_1$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(\left(\frac{d}{D}e^{\xi_3-\xi_2}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)F_4\left(t\right)-\frac{b}{D}e^{\xi_1}z_1,\frac{a}{D}e^{\xi_1}z_2-\frac{c}{D}G_4\left(t\right)\right),$$

其中 $F_4'(t)=G_4'(t)=e^{\psi(t)}$， $\psi(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(v) 若 $g=p_2\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)+p_1\xi_1=p_4\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)+p_3\xi_2-p_4\xi_3$， $e^{2\xi_3}=1$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}z_1+\frac{d}{D}e^{\xi_2}z_2-\frac{b}{D}F_5\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right),-\frac{c}{D}e^{\xi_2}z_1-\frac{c}{D}e^{\xi_1}z_2+\frac{a}{D}e^{\xi_3}G_5\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)\right),$$

其中 $F_5'(t)=G_5'(t)=e^{\varphi_1(t)}$， $\varphi_1(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(vi) 若 $g=p_1\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)+p_2\xi_1=p_3\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)-p_3\xi_3+p_4\xi_2$， $e^{2\xi_3}=1$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(-\frac{b}{D}e^{\xi_2}z_1-\frac{b}{D}e^{\xi_1}z_2+\frac{d}{D}e^{\xi_3}F_6\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right),\frac{a}{D}e^{\xi_1}z_1+\frac{a}{D}e^{\xi_2}z_2-\frac{c}{D}G_6\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)\right),$$

其中 $F_6'(t)=G_6'(t)=e^{\phi_1(t)}$， $\phi_1(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(vii) 若 $g=p_2\theta_1\left(z_1\right)+p_1\xi_1-p_2\xi_3=p_3\theta_1\left(z_1\right)+p_4\xi_2$， $de^{\xi_3}-b=0$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_1,\left(\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_2+\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3}-\frac{c}{D}\right)F_7\left(z_1\right)\right),$$

其中 $F_7'(t)=e^{\theta_1(t)}$， $\theta_1(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(viii) 若 $g=p_2\psi_1\left(z_2\right)+p_1\xi_1-p_2\xi_3=p_3\psi_1\left(z_2\right)+p_4\xi_2$， $ce^{\xi_3}-a=0$， $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$， 则

$$\left(\mu,v\right)=\left(\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_1+\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)G_7\left(z_2\right),\left(\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_2\right),$$

其中 $G_7'(t)=e^{\psi_1(t)}$，$\psi_1(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(ix) 若 $g=p_1\varphi_2(z_2)+p_2\xi_2=p_4\varphi_2(z_2)+p_3\xi_1-p_4\xi_3$，$de^{\xi_3}-b=0$，$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_2,\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3}-\frac{c}{D}\right)F_8(z_2)+\left(\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_1\right),$$

其中 $F_8'(t)=e^{\varphi_2(t)}$，$\varphi_2(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(x) 若 $g=p_1\phi_2(z_1)+p_2\xi_2=p_4\phi_2(z_1)+p_3\xi_1-p_4\xi_3$，$ce^{\xi_3}-a=0$，$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)G_8(z_1)+\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_2,\left(\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_1\right),$$

其中 $G_8'(t)=e^{\phi_2(t)}$，$\phi_2(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xi) 若 $g=p_1\theta_2(z_2+e^{\xi_1}z_1)+p_2\theta_3(z_2+e^{\xi_2}z_1)=p_3\theta_2(z_2+e^{\xi_1}z_1)+p_4\theta_3(z_2+e^{\xi_2}z_1)-p_3\xi_1-p_4\xi_2$，$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$，满足 $e^{2\xi_1}=e^{2\xi_2}=1$，则

$$(\mu,v)=\left(\frac{d}{D}e^{-\xi_1}F_9(z_2+e^{\xi_1}z_1)-\frac{b}{D}F_{10}(z_2+e^{\xi_2}z_1),\frac{a}{D}e^{-\xi_2}G_{10}(z_2+e^{\xi_2}z_1)-\frac{c}{D}G_9(z_2+e^{\xi_1}z_1)\right),$$

其中 $F_9'(t)=G_9'(t)=e^{\theta_2(t)}$，$F_{10}'(t)=G_{10}'(t)=e^{\theta_3(t)}$，$\theta_j(t)(j=2,3)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xii) 若 $g=(p_1+p_2)\varphi_2(t_1)-p_2\xi_1=(p_3+p_4)\varphi_3(t_2)-p_4\xi_2$，$\xi_1,\xi_2\in\mathbb{C}$，$t_1=z_2-\frac{d}{be^{-\xi_1}}z_1=z_2-\frac{ae^{-\xi_1}}{\mathrm{c}}z_1$，$t_2=z_2-\frac{be^{-\xi_2}}{d}z_1=z_2-\frac{c}{ae^{-\xi_2}}z_1$，则

$$(\mu,v)=\left(-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}F_{11}(t_1)+\frac{d}{D}F_{12}(t_2),\frac{a}{D}e^{-\xi_2}G_{12}(t_2)-\frac{c}{D}G_{11}(t_1)\right),$$

其中 $F_{11}'(t)=G_{11}'(t)=e^{\varphi_2(t)}$，$F_{12}'(t)=G_{12}'(t)=e^{\varphi_3(t)}$，$\varphi_j(t)(j=2,3)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xiii) 若 $g=p_1\phi_3(z_1)+p_2\phi_4(z_1)-p_2\xi_2=p_4\phi_3(z_1)+p_3\phi_4(z_1)-p_4\xi_1$，$a-ce^{\xi_1}=0$，$de^{\xi_2}-b=0$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)F_{13}(z_1),\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)G_{13}(z_1)\right),$$

其中 $F_{13}'(t)=e^{\phi_3(t)}$，$G_{13}'(t)=e^{\phi_4(t)}$，$\phi_j(t)(j=3,4)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xiv) 若 $g=p_1\theta_4(z_2)+p_2\theta_5(z_2)-p_2\xi_2=p_4\theta_4(z_2)+p_3\theta_5(z_2)-p_4\xi_1$，$de^{\xi_1}-b=0$，$a-ce^{\xi_2}=0$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)G_{14}(z_2),\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)F_{14}(z_2)\right),$$

其中 $F_{14}'(t)=e^{\theta_4(t)}$，$G_{14}'(t)=e^{\theta_5(t)}$，$\theta_j(t)$ $(j=4,5)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xv) 若 $g=(p_1+p_2)\phi_5(z_1)+p_2(\xi_3-\xi_1)=(p_3+p_4)\phi_5(z_1)+p_3(\xi_2-\xi_1)-p_4\xi_1$，$ce^{\xi_1}-a=0$，$be^{\xi_3}-de^{\xi_2}=0$，$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)F_{15}(z_1),\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_2-\xi_1}\right)G_{15}(z_1)\right),$$

其中 $F_{15}'(t)=G_{15}'(t)=e^{\phi_5(t)}$，$\phi_5(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xvi) 若 $g=(p_1+p_2)\varphi_6(z_2)+p_2(\xi_3-\xi_1)=(p_3+p_4)\varphi_6(z_2)+p_3(\xi_2-\xi_1)-p_4\xi_1$，$de^{\xi_1}-b=0$，$ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}=0$，$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{C}$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)F_{16}(z_2),\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)G_{16}(z_2)\right),$$

其中 $F_{16}'(t)=G_{16}'(t)=e^{\varphi_6(t)}$，$\varphi_6(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

(xvii) 若 $g=(p_1+p_2)\theta_6(t)+p_2(\xi_3-\xi_1)=(p_3+p_4)\theta_6(t)+p_3(\xi_2-\xi_1)-p_4\xi_1$，$t=z_2-\dfrac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}z_1=z_2-\dfrac{ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}}{ce^{\xi_1}-a}z_1$，则

$$(\mu,v)=\left(\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)F_{17}(t),\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)G_{17}(t)\right),$$

其中 $F_{17}'(t)=G_{17}'(t)=e^{\theta_6(t)}$，$\theta_6(t)$ 为 $\mathbb{C}$ 中关于 t 的多项式。

注 定理 D 是定理 1.1 在 $p_j=1(j=1,2,3,4)$ 条件下的一个特例，符合情形(xvii)。事实上当 $p_1=p_2=p_3=p_4=1$ 时，满足 $\xi_3=\xi_2-\xi_1$，此时由于 $t=z_2+\dfrac{de^{\xi_1}-b}{e^{\xi_2-\xi_1}\left(de^{\xi_1}-b\right)}z_1=z_2+e^{\xi_1-\xi_2}z_1$，且 $t=z_2+\dfrac{e^{\xi_2-\xi_1}\left(ce^{\xi_2}-a\right)}{ce^{\xi_1}-a}z_1=z_2+e^{\xi_2-\xi_1}z_1$，即得 ξ_1,ξ_2 满足 $e^{2(\xi_2-\xi_1)}=1$。进一步地，$g=2\theta_6\left(z_2+e^{\xi_2-\xi_1}z_1\right)+\xi_3-\xi_1=2\theta_6'\left(z_2+e^{\xi_1-(2\xi_1-\xi_2)}z_1\right)-\xi_1$，$\theta_6'(t)-\theta_6(t)=\xi_3$，由情形(xvii)可知此时方程(1.6)的有限级超越整函数解对为

$$(\mu,v)=\left(\frac{e^{\xi_2-\xi_1}}{D}\left(d-be^{-(2\xi_1-\xi_2)}\right)F_{17}\left(z_2+e^{\xi_1-\xi_2}z_1\right),\frac{1}{D}\left(ae^{-\xi_1}-c\right)G_{17}\left(z_2+e^{\xi_1-\xi_2}z_1\right)\right),$$

此形式与定理 D 结果等价。

下面给出例子说明方程组(1.6)中 n 个有限级超越整函数解的存在性。

例 1.1 设

$$(\mu,v)=\left(\int_0^{z_1}e^{t^3+t^2+t}\mathrm{d}t+\eta_1,2\int_0^{z_1}e^{t^3+t^2+t}\mathrm{d}t+\eta_2\right),$$

$\eta_1,\eta_2\in\mathbb{C}$，则 (μ,v) 为方程组(1.6)的一对有限级超越整函数的解，其中 $p_1=p_2=2$，$p_3=1$，$p_4=3$，$a=c=d=1$，$b=2$ 及 $g=4z_1^3+4z_1^2+4z_1+\ln 4$，对应于定理 1.1(xv)中 $\phi_5(z_1)=z_1^3+z_1^2+z_1$，$\xi_1=2\pi i$，$\xi_2=\ln 4+8\pi i$，$\xi_3=\ln 2+2\pi i$ 的情况。

例 1.2 设

$$(\mu,v)=\left(2\int_0^{z_2}e^{t^3+2t^2-t}\mathrm{d}t+\eta_1,\int_0^{z_2}e^{t^3+2t^2-t}\mathrm{d}t+\eta_2\right),$$

$\eta_1,\eta_2\in\mathbb{C}$，则 (μ,v) 为方程组(1.6)的一对有限级超越整函数的解，其中 $p_1=p_3=2$，$p_2=p_4=1$，$a=b=d=1$，$c=2$ 及 $g=3z_2^3+6z_2^2-3z_2+\ln 4$，对应于定理 1.1(xvi)中 $\varphi_6(z_2)=z_2^3+2z_2^2-z_2$，$\xi_1=4\pi i$，$\xi_2=\ln 2+6\pi i$，$\xi_3=\ln 4+4\pi i$ 的情况。

例 1.3 设

$$(\mu,v)=\left(\int_0^{z_2}e^{2(t+z_1)^3-3(t+z_1)}\mathrm{d}t-\int_0^{z_2}e^{(t-z_1)^2}\mathrm{d}t+\eta_1,-2\int_0^{z_2}e^{(t-z_1)^2}\mathrm{d}t-\int_0^{z_2}e^{2(t+z_1)^3-3(t+z_1)}\mathrm{d}t+\eta_2\right),$$

$\eta_1,\eta_2\in\mathbb{C}$，则 (μ,v) 为方程组(1.6)的一对有限级超越整函数的解，其中 $p_1=p_3=1$，$p_2=p_4=-2$，$a=2$，$b=c=d=1$ 及 $g=2(z_1+z_2)^3-2(z_1-z_2)^2-3(z_1+z_2)$，对应于定理 1.1(xi)中 $\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)=\theta_2(z_2+z_1)$ $=2(z_1+z_2)^3-3(z_1+z_2)$，$\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)=\theta_3(z_2-z_1)=(z_1-z_2)^2$，$\xi_1=2\pi i$，$\xi_2=\pi i$ 的情况。

2. 引理

引理 2.1 [9] [10]若 F 为 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数，满足 $F(0)\neq 0$，$\rho(n_F)=\rho<\infty$，其中 $\rho(n_F)$ 是零点计数函数 F 的阶数，则存在函数 f_F 及 $g_F\in\mathbb{C}^n$ 使得 $F(z)=f_F(z)e^{g_F(z)}$。特别地，当 $n=1$ 时，f_F 是魏尔斯特拉斯函数。

引理 2.2 [11]若 g,h 为复平面上的整函数，且 $g(h)$ 为有限级整函数，则存在以下两种情况：

(i) h 为多项式，g 为有限级整函数；

(ii) h 为非多项式的有限级整函数，g 为零级超越整函数。

引理 2.3 [12]假设 $f_1,f_2,\cdots,f_n\ (n\geq 2)$ 是亚纯函数，且 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 是整函数，满足以下条件：

(i) $f_1(z)e^{g_1(z)}+f_2(z)e^{g_2(z)}+\cdots+f_n(z)e^{g_n(z)}\equiv 0$；

(ii) 当 $1\leq j<k\leq n$ 时，$g_j(z)-g_k(z)$ 不是常数；

(iii) 当 $1\leq j\leq n$ 且 $1\leq h<k\leq n$ 时，$T(r,f_j)=o\left(T\left(r,e^{g_h(z)-g_k(z)}\right)\right)(r\to\infty,r\notin E)$，

其中 $E\subset(r,\infty)$ 是有限线性测度或对数测度集，那么 $f_j(z)\equiv 0\ (j=1,2,\cdots,n)$。

3. 定理 1.1 的证明

设 (μ,v) 为方程组(1.6)的一对有限级超越整函数解。观察方程组(1.6)的形式，显然此时 $a\mu_{z_1}+bv_{z_2}$，$cu_{z_2}+dv_{z_1}$，$au_{z_2}+bv_{z_1}$，$c\mu_{z_1}+dv_{z_2}$ 均无零点、极点。根据引理 2.1 及引理 2.2，存在 $\mathbb{C}^2$ 中的多项式 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 使得

$$a\mu_{z_1}+bv_{z_2}=e^{\alpha^1},\quad cu_{z_2}+dv_{z_1}=e^{\beta^1},\quad au_{z_2}+bv_{z_1}=e^{\alpha^2},\quad c\mu_{z_1}+dv_{z_2}=e^{\beta^2}. \tag{3.1}$$

于是

$$g=p_1\alpha^1+p_2\beta^1=p_3\alpha^2+p_4\beta^2. \tag{3.2}$$

注意到 $D=ad-bc\neq 0$，联立(3.1)中四个式子得：

$$\mu_{z_1}=\frac{1}{D}\left(de^{\alpha^1}-be^{\beta^2}\right),\quad \mu_{z_2}=\frac{1}{D}\left(de^{\alpha^2}-be^{\beta^1}\right), \tag{3.3}$$

$$v_{z_1}=\frac{1}{D}\left(ae^{\beta^1}-ce^{\alpha^2}\right),\quad v_{z_2}=\frac{1}{D}\left(ae^{\beta^2}-ce^{\alpha^1}\right), \tag{3.4}$$

由于 $\mu_{z_1z_2}=\mu_{z_2z_1},v_{z_1z_2}=v_{z_2z_1}$，对(3.3)、(3.4)四个式子同时求偏导进一步得：

$$d\alpha^1_{z_2}e^{\alpha^1}-d\alpha^2_{z_1}e^{\alpha^2}+b\beta^1_{z_1}e^{\beta^1}-b\beta^2_{z_2}e^{\beta^2}=0, \tag{3.5}$$

$$c\alpha^1_{z_1}e^{\alpha^1}-c\alpha^2_{z_2}e^{\alpha^2}+a\beta^1_{z_2}e^{\beta^1}-a\beta^2_{z_1}e^{\beta^2}=0. \tag{3.6}$$

由于 g 为 $\mathbb{C}^2$ 中的非常数多项式，且 $g=p_1\alpha^1+p_2\beta^1=p_3\alpha^2+p_4\beta^2$，故 α^i 与 $\beta^i\ (i=1,2)$ 不同时为常数，以下分三种情形讨论式(3.5)和(3.6)。

情形 1 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 仅存在一个常数。

情形 1.1 若 α^1 为常数，设 $\alpha^1=\xi_1$，则

$$d\alpha_{z_1}^2 e^{\alpha^2} - b\beta_{z_1}^1 e^{\beta^1} + b\beta_{z_2}^2 e^{\beta^2} = 0, \tag{3.7}$$

$$c\alpha_{z_2}^2 e^{\alpha^2} - a\beta_{z_2}^1 e^{\beta^1} + a\beta_{z_1}^2 e^{\beta^2} = 0. \tag{3.8}$$

若 $\alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值有且仅有一个常数。不失一般性，假设 $\alpha^2 - \beta^1$ 为常数，根据引理 2.3 得 $\beta_{z_1}^2 = \beta_{z_2}^2 = 0$，即 β^2 为常数，矛盾。若 $\alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值存在两个常数值，不妨设 $\alpha^2 - \beta^1 = \xi_2$，$\beta^2 - \beta^1 = \xi_3$，则 $\alpha^2 - \beta^2 = \xi_2 - \xi_3$，满足 $\beta_{z_1}^1 = \beta_{z_1}^2 = \alpha_{z_1}^2$，$\beta_{z_2}^1 = \beta_{z_2}^2 = \alpha_{z_2}^2$。故由式(3.7)和(3.8)得：

$$\left(de^{\xi_2} - b\right)\alpha_{z_1}^2 + be^{\xi_3}\alpha_{z_2}^2 = 0, \quad ae^{\xi_3}\alpha_{z_1}^2 + \left(ce^{\xi_2} - a\right)\alpha_{z_2}^2 = 0.$$

若 $de^{\xi_2} - b = 0$，此时 $\alpha_{z_1}^2 = \alpha_{z_2}^2 = 0$，即 α^2 为常数，矛盾。同理若 $ce^{\xi_2} - a = 0$，推出 α^2 为常数，矛盾。故 $ce^{\xi_2} - a \neq 0$ 且 $de^{\xi_2} - b \neq 0$，因此有

$$\alpha_{z_1}^2 + \frac{be^{\xi_3}}{de^{\xi_2} - b}\alpha_{z_2}^2 = 0, \quad \alpha_{z_1}^2 + \frac{ce^{\xi_2} - a}{ae^{\xi_3}}\alpha_{z_2}^2 = 0.$$

那么 $\alpha^2 = \varphi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 是关于 $t = z_2 - \frac{be^{\xi_3}}{de^{\xi_2} - b}z_1 = z_2 - \frac{ce^{\xi_2} - a}{ae^{\xi_3}}z_1$ 的多项式。结合式(3.3)、(3.4)得：

$$\mu_{z_1} = \frac{d}{D}e^{\xi_1} - \frac{b}{D}e^{\xi_3 - \xi_2}e^{\varphi(t)}, \quad \mu_{z_2} = \left(\frac{d}{D} - \frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)e^{\varphi(t)},$$

$$v_{z_1} = \left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2} - \frac{c}{D}\right)e^{\varphi(t)}, \quad v_{z_2} = \frac{a}{D}e^{\xi_3 - \xi_2}e^{\varphi(t)} - \frac{c}{D}e^{\xi_1},$$

因此 $\mu = \left(\frac{d}{D} - \frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)F_1(t) + \frac{d}{D}e^{\xi_1}z_1$，$v = \frac{a}{D}e^{\xi_3 - \xi_2}G_1(t) - \frac{c}{D}e^{\xi_1}z_2$，其中 $F_1'(t) = G_1'(t) = e^{\varphi(t)}$，此时 $g = p_2\varphi(t) + p_1\xi_1 - p_2\xi_2 = (p_3 + p_4)\varphi(t) - p_4\xi_2 + p_4\xi_3$。

情形 1.2 若 α^2 为常数，和上面的证明类似，不妨设 $\alpha^2 = \xi_1$，此时

$$d\alpha_{z_2}^1 e^{\alpha^1} + b\beta_{z_1}^1 e^{\beta^1} - b\beta_{z_2}^2 e^{\beta^2} = 0, \tag{3.9}$$

$$c\alpha_{z_1}^1 e^{\alpha^1} + a\beta_{z_2}^1 e^{\beta^1} - a\beta_{z_1}^2 e^{\beta^2} = 0. \tag{3.10}$$

倘若 $\alpha^1, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值仅有一个常数，不妨设 $\alpha^1 - \beta^1$ 为常数，根据引理 2.3 我们有 $\beta_{z_1}^2 = \beta_{z_2}^2 = 0$，矛盾。倘若 $\alpha^1, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值有两个常数，设 $\alpha^1 - \beta^1 = \xi_2$，$\beta^2 - \beta^1 = \xi_3$，则 $\alpha^1 - \beta^2 = \xi_2 - \xi_3$，故式(3.9)、(3.10)进一步得：

$$b\alpha_{z_1}^1 + \left(de^{\xi_2} - be^{\xi_3}\right)\alpha_{z_2}^1 = 0, \quad \left(ce^{\xi_2} - ae^{\xi_3}\right)\alpha_{z_1}^1 + a\alpha_{z_2}^1 = 0.$$

若 $de^{\xi_2} - be^{\xi_3} = 0$，此时 $\alpha_{z_1}^1 = \alpha_{z_2}^1 = 0$，矛盾。同理 $ce^{\xi_2} - ae^{\xi_3} = 0$ 时同样推出矛盾，故此时 $de^{\xi_2} - be^{\xi_3} \neq 0$ 且 $ce^{\xi_2} - ae^{\xi_3} \neq 0$，因此

$$\alpha_{z_1}^1 + \frac{de^{\xi_2} - be^{\xi_3}}{b}\alpha_{z_2}^1 = 0, \quad \alpha_{z_1}^1 + \frac{a}{ce^{\xi_2} - ae^{\xi_3}}\alpha_{z_2}^1 = 0,$$

即得 $\alpha^1 = \phi(t)$，其中 $\phi(t)$ 是关于 $t = z_2 - \frac{de^{\xi_2} - be^{\xi_3}}{b}z_1 = z_2 - \frac{a}{ce^{\xi_2} - ae^{\xi_3}}z_1$ 的多项式。结合式(3.3)、(3.4)可知：

$$\mu_{z_1} = \left(\frac{d}{D} - \frac{b}{D}e^{\xi_3 - \xi_2}\right)e^{\phi(t)}, \quad \mu_{z_2} = \frac{d}{D}e^{\xi_1} - \frac{b}{D}e^{-\xi_2}e^{\phi(t)},$$

$$v_{z_1}=\frac{a}{D}e^{-\xi_2}e^{\phi(t)}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}，\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)e^{\phi(t)}，$$

易得 $u=-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}F_2(t)+\frac{d}{D}e^{\xi_1}z_2$，$v=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)G_2(t)-\frac{c}{D}e^{\xi_1}z_1$，其中 $F_2'(t)=G_2'(t)=e^{\phi(t)}$，此时 $g=(p_1+p_2)\phi(t)-p_2\xi_2=p_4\phi(t)+p_3\xi_1-p_4\xi_2+p_4\xi_3$。

情形 1.3 若 β^1 为常数，不妨设 $\beta^1=\xi_1$，则

$$d\alpha_{z_2}^1e^{\alpha^1}-d\alpha_{z_1}^2e^{\alpha^2}-b\beta_{z_2}^2e^{\beta^2}=0，\tag{3.11}$$

$$c\alpha_{z_1}^1e^{\alpha^1}-c\alpha_{z_2}^2e^{\alpha^2}-a\beta_{z_1}^2e^{\beta^2}=0.\tag{3.12}$$

假设 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^2$ 两两间的差值仅有一个常数，不妨设 $\alpha^1-\alpha^2$ 为常数，则 $\beta_{z_1}^2=\beta_{z_2}^2=0$，矛盾。若 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^2$ 两两间的差值存在两个常数，设 $\alpha^1-\beta^2=\xi_2$，$\alpha^2-\beta^2=\xi_3$，则 $\alpha^1-\alpha^2=\xi_2-\xi_3$，式(3.11)及(3.12)可写成：

$$de^{\xi_3}\alpha_{z_1}^1+\left(b-de^{\xi_2}\right)\alpha_{z_2}^1=0，\quad \left(a-ce^{\xi_2}\right)\alpha_{z_1}^1+ce^{\xi_3}\alpha_{z_2}^1=0，$$

若 $b-de^{\xi_2}=0$，此时 $\alpha_{z_1}^1=0$ 且 $\alpha_{z_2}^1=0$，矛盾。同理若 $a-ce^{\xi_2}=0$ 同样推出矛盾，故 $b-de^{\xi_2}\neq0$，$a-ce^{\xi_2}\neq0$。此时

$$\alpha_{z_1}^1+\frac{b-de^{\xi_2}}{de^{\xi_3}}\alpha_{z_2}^1=0，\quad \alpha_{z_1}^1+\frac{ce^{\xi_3}}{a-ce^{\xi_2}}\alpha_{z_2}^1=0，$$

即 $\alpha^1=\theta(t)$，其中 $\theta(t)$ 是关于 $t=z_2-\frac{b-de^{\xi_2}}{de^{\xi_3}}z_1=z_2-\frac{ce^{\xi_3}}{a-ce^{\xi_2}}z_1$ 的多项式。结合式(3.3)、(3.4)可知：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)e^{\theta(t)}，\quad \mu_{z_2}=\frac{d}{D}e^{\xi_3-\xi_2}e^{\theta(t)}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}，$$

$$v_{z_1}=\frac{a}{D}e^{\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_3-\xi_2}e^{\theta(t)}，\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)e^{\theta(t)}，$$

故而 $u=\frac{d}{D}e^{\xi_3-\xi_2}F_3(t)-\frac{b}{D}e^{\xi_1}z_2$，$v=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)G_3(t)+\frac{a}{D}e^{\xi_1}z_1$，其中 $F_3'(t)=G_3'(t)=e^{\theta(t)}$，此时 $g=p_1\theta(t)+p_2\xi_1=(p_3+p_4)\theta(t)+p_3\xi_3-p_3\xi_2-p_4\xi_2$。

情形 1.4 若 β^2 为常数，不妨设 $\beta^2=\xi_1$，此时式(3.5)和(3.6)可变形得到：

$$d\alpha_{z_2}^1e^{\alpha^1}-d\alpha_{z_1}^2e^{\alpha^2}+b\beta_{z_1}^1e^{\beta^1}=0，\tag{3.13}$$

$$c\alpha_{z_1}^1e^{\alpha^1}-c\alpha_{z_2}^2e^{\alpha^2}+a\beta_{z_2}^1e^{\beta^1}=0.\tag{3.14}$$

若 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1$ 两两间的差值仅存在一个常数，不失一般性，假设 $\alpha^1-\alpha^2$ 为常数，由引理 2.3 得 $\beta_{z_1}^1=\beta_{z_2}^1=0$，矛盾。若 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1$ 两两间的差值存在两个常数，设 $\alpha^1-\beta^1=\xi_2$，$\alpha^2-\beta^1=\xi_3$，则 $\alpha^1-\alpha^2=\xi_2-\xi_3$，此时满足 $\alpha_{z_1}^2=\beta_{z_1}^1=\alpha_{z_1}^1$，$\alpha_{z_2}^2=\beta_{z_2}^1=\alpha_{z_2}^1$。式(3.13)、(3.14)可变形得：

$$\left(b-de^{\xi_3}\right)\alpha_{z_1}^1+de^{\xi_2}\alpha_{z_2}^1=0，\quad ce^{\xi_2}\alpha_{z_1}^1+\left(a-ce^{\xi_3}\right)\alpha_{z_2}^1=0。$$

若 $b-de^{\xi_3}=0$，则 $\alpha_{z_1}^1=\alpha_{z_2}^1=0$，矛盾。若 $a-ce^{\xi_3}=0$，同样推出 $\alpha_{z_1}^1=\alpha_{z_2}^1=0$，矛盾。故而 $b-de^{\xi_3}\neq0$，$a-ce^{\xi_3}\neq0$，且

$$\alpha_{z_1}^1+\frac{de^{\xi_2}}{b-de^{\xi_3}}\alpha_{z_2}^1=0，\quad \alpha_{z_1}^1+\frac{a-ce^{\xi_3}}{ce^{\xi_2}}\alpha_{z_2}^1=0，$$

即此时 $\alpha^1=\psi(t)$，其中 $\psi(t)$ 是关于 $t=z_2-\frac{de^{\xi_2}}{b-de^{\xi_3}}z_1=z_2-\frac{a-ce^{\xi_3}}{ce^{\xi_2}}z_1$ 的多项式。结合式(3.3)、(3.4)得：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\psi(t)}-\frac{b}{D}e^{\xi_1}，\quad \mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_3-\xi_2}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)e^{\psi(t)}，$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_3-\xi_2}\right)e^{\psi(t)}，\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\psi(t)}，$$

故方程组(1.6)的解为 $\mu=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_3-\xi_2}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)F_4(t)-\frac{b}{D}e^{\xi_1}z_1$，$v=\frac{a}{D}e^{\xi_1}z_2-\frac{c}{D}G_4(t)$，其中 $F_4'(t)=G_4'(t)=e^{\psi(t)}$，此时 $g=(p_1+p_2)\psi(t)-p_2\xi_2=p_3\psi(t)+p_3\xi_3-p_3\xi_2+p_4\xi_1$。

情形 2 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 中仅存在两个常数。

情形 2.1 若 $\alpha^i(i=1,2)$ 为常数，不妨设 $\alpha^1=\xi_1$，$\alpha^2=\xi_2$，此时式(3.5)、(3.6)变形得：

$$\beta^1_{z_1}e^{\beta^1}-\beta^2_{z_2}e^{\beta^2}=0，\tag{3.15}$$

$$\beta^1_{z_2}e^{\beta^1}-\beta^2_{z_1}e^{\beta^2}=0，\tag{3.16}$$

由引理 2.3 得，此时 $\beta^1-\beta^2$ 为常数或 $\beta^1_{z_1}=\beta^1_{z_2}=\beta^2_{z_1}=\beta^2_{z_2}=0$，后者显然不成立，否则 β^1,β^2 为常数，矛盾。设 $\beta^1-\beta^2=\xi_3$，(3.15)、(3.16)式变形为

$$\beta^1_{z_1}e^{\xi_3}-\beta^1_{z_2}=0，\quad \beta^1_{z_2}e^{\xi_3}-\beta^1_{z_1}=0，$$

即 $\beta^1=\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)=\varphi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)$，其中 ξ_3 满足 $e^{2\xi_3}=1$，故此时 $\beta^2=\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)-\xi_3=\varphi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)-\xi_3$，将 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 代入(3.3)、(3.4)得：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{-\xi_3}e^{\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)}，\quad \mu_{z_2}=\frac{d}{D}e^{\xi_2}-\frac{b}{D}e^{\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)}，$$

$$v_{z_1}=\frac{a}{D}e^{\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)}-\frac{c}{D}e^{\xi_2}，\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{-\xi_3}e^{\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}，$$

故此时方程组(1.6)的有限级超越整函数解为

$$\mu=\frac{d}{D}e^{\xi_1}z_1+\frac{d}{D}e^{\xi_2}z_2-\frac{b}{D}F_5\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)，\quad v=-\frac{c}{D}e^{\xi_2}z_1-\frac{c}{D}e^{\xi_1}z_2+\frac{a}{D}e^{\xi_3}G_5\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)，$$

其中 $F_5'\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)=G_5'\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)=e^{\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)}$，此时 $g=p_2\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)+p_1\xi_1=p_4\varphi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)+p_3\xi_2-p_4\xi_3$。

情形 2.2 若 $\beta^i(i=1,2)$ 为常数，令 $\beta^1=\xi_1$，$\beta^2=\xi_2$，此时满足

$$\alpha^1_{z_2}e^{\alpha^1}-\alpha^2_{z_1}e^{\alpha^2}=0，\tag{3.17}$$

$$\alpha^1_{z_1}e^{\alpha^1}-\alpha^2_{z_2}e^{\alpha^2}=0.\tag{3.18}$$

由引理 2.3 可知此时 $\alpha^1-\alpha^2$ 为常数或 $\alpha^1_{z_1}=\alpha^1_{z_2}=\alpha^2_{z_1}=\alpha^2_{z_2}=0$，后者显然不成立，否则 α^1,α^2 为常数，矛盾。设 $\alpha^1-\alpha^2=\xi_3$，此时 $\alpha^2_{z_1}=\alpha^1_{z_1}$，$\alpha^2_{z_2}=\alpha^1_{z_2}$，故而：

$$e^{\xi_3}\alpha^1_{z_2}-\alpha^1_{z_1}=0，\quad e^{\xi_3}\alpha^1_{z_1}-\alpha^1_{z_2}=0，$$

即 $\alpha^1=\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)=\phi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)$，其中 ξ_3 满足 $e^{2\xi_3}=1$，故此时 $\alpha^2=\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)-\xi_3=\phi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)-\xi_3$。结合式(3.3)、(3.4)可知：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\phi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}，\quad \mu_{z_2}=\frac{d}{D}e^{-\xi_3}e^{\phi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)}-\frac{b}{D}e^{\xi_1}，$$

$$v_{z_1}=\frac{a}{D}e^{\xi_1}-\frac{c}{D}e^{-\xi_3}e^{\phi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)},\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\phi_1\left(z_2+e^{-\xi_3}z_1\right)},$$

故方程组(1.6)的有限级超越整函数解为

$$\mu=-\frac{b}{D}e^{\xi_2}z_1-\frac{b}{D}e^{\xi_1}z_2+\frac{d}{D}e^{\xi_3}F_6\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right),\quad v=\frac{a}{D}e^{\xi_1}z_1+\frac{a}{D}e^{\xi_2}z_2-\frac{c}{D}G_6\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right),$$

其中 $F_6'\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)=G_6'\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)=e^{\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)}$，此时 $g=p_1\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)+p_2\xi_1=p_3\phi_1\left(z_2+e^{\xi_3}z_1\right)-p_3\xi_3+p_3\xi_2$。

情形 2.3 若 α^1,β^2 为常数，令 $\alpha^1=\xi_1$，$\beta^2=\xi_2$，此时式(3.5)、(3.6)变形得：

$$d\alpha_{z_1}^2e^{\alpha^2}-b\beta_{z_1}^1e^{\beta^1}=0,\quad c\alpha_{z_2}^2e^{\alpha^2}-a\beta_{z_2}^1e^{\beta^1}=0。$$

由引理 2.3 推得 $\alpha^2-\beta^1$ 为常数或 $\alpha_{z_1}^2=\alpha_{z_2}^2=\beta_{z_1}^1=\beta_{z_2}^1=0$，后者显然不成立，否则 α^2,β^1 为常数，矛盾。设 $\alpha^2-\beta^1=\xi_3$，此时 $\beta_{z_1}^1=\alpha_{z_1}^2$，$\beta_{z_2}^1=\alpha_{z_2}^2$，故而

$$\left(de^{\xi_3}-b\right)\alpha_{z_1}^2=0,\tag{3.19}$$

$$\left(ce^{\xi_3}-a\right)\alpha_{z_2}^2=0,\tag{3.20}$$

显然 $de^{\xi_3}-b$，$ce^{\xi_3}-a$ 不可同时为零，否则 $D=ad-bc=0$，矛盾。同时 $de^{\xi_3}-b$，$ce^{\xi_3}-a$ 不可同时为非零常数，否则 $\alpha_{z_1}^2=\alpha_{z_2}^2=0$，即 α^2 为常数，矛盾。

(i) 若 $de^{\xi_3}-b=0$，$ce^{\xi_3}-a\neq0$，由(3.19)、(3.20)可得 $\alpha_{z_2}^2=0$，即 $\alpha^2=\theta_1(z_1)$，进一步的 $\beta^1=\theta_1(z_1)-\xi_3$，结合式子(3.3)、(3.4)得：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2},\quad \mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)e^{\theta_1(z_1)}=0,$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3}-\frac{c}{D}\right)e^{\theta_1(z_1)},\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1},$$

对上述式子求积分得

$$\mu=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_1,\quad v=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_2+\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3}-\frac{c}{D}\right)F_7(z_1),$$

其中 $F_7'(z_1)=e^{\theta_1(z_1)}$，此时 $g=p_2\theta_1(z_1)+p_1\xi_1-p_2\xi_3=p_3\theta_1(z_1)+p_4\xi_2$。

(ii) 若 $ce^{\xi_3}-a=0$，$de^{\xi_3}-b\neq0$，由式(3.19)、(3.20)可得 $\alpha_{z_1}^2=0$，即 $\alpha^2=\psi_1(z_2)$，进一步的 $\beta^1=\psi_1(z_2)-\xi_3$，由式(3.3)、(3.4)可得：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2},\quad \mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)e^{\psi_1(z_2)},$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3}-\frac{c}{D}\right)e^{\psi_1(z_2)}=0,\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1},$$

对上述式子求积分得

$$\mu=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_1+\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)G_7(z_2),\quad v=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_2}-\frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_2,$$

其中 $G_7{}'(z_2)=e^{\psi_1(z_2)}$，此时 $g=p_2\psi_1(z_2)+p_1\xi_1-p_2\xi_3=p_3\psi_1(z_2)+p_4\xi_2$。

情形 2.4 若 α^2,β^1 为常数，令 $\alpha^2=\xi_1$，$\beta^1=\xi_2$，此时式(3.5)、(3.6)变形得：

$$d\alpha_{z_2}^1 e^{\alpha^1} - b\beta_{z_2}^2 e^{\beta^2} = 0，\ c\alpha_{z_1}^1 e^{\alpha^1} - a\beta_{z_1}^2 e^{\beta^2} = 0，$$

根据引理 2.3 可知此时 $\alpha^1 - \beta^2$ 为常数或 $\alpha_{z_1}^1 = \alpha_{z_2}^1 = \beta_{z_1}^2 = \beta_{z_2}^2 = 0$，后者显然不成立，否则 α^1, β^2 为常数，矛盾。设 $\alpha^1 - \beta^2 = \xi_3$，此时 $\beta_{z_1}^2 = \alpha_{z_1}^1$，$\beta_{z_2}^2 = \alpha_{z_2}^1$，故而

$$\left(de^{\xi_3} - b\right)\alpha_{z_2}^1 = 0，\ \left(ce^{\xi_3} - a\right)\alpha_{z_1}^1 = 0，$$

显然此时 $de^{\xi_3} - b$，$ce^{\xi_3} - a$ 不可同时为零，否则 $D = ad - bc = 0$，矛盾。同时 $de^{\xi_3} - b$，$ce^{\xi_3} - a$ 不可同时为非零常数，否则 $\alpha_{z_1}^1 = \alpha_{z_2}^1 = 0$ 即 α^1 为常数，亦推出矛盾。

(i) 若 $de^{\xi_3} - b = 0$，$ce^{\xi_3} - a \neq 0$，此时 $\alpha_{z_1}^1 = 0$，即 $\alpha^1 = \varphi_2\left(z_2\right)$，进一步地 $\beta^2 = \varphi_2\left(z_2\right) - \xi_3$，结合式(3.3)、(3.4)可得：

$$\mu_{z_1} = \left(\frac{d}{D} - \frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)e^{\varphi_2(z_2)} = 0，\ \mu_{z_2} = \frac{d}{D}e^{\xi_1} - \frac{b}{D}e^{\xi_2}，$$

$$v_{z_1} = \frac{a}{D}e^{\xi_2} - \frac{c}{D}e^{\xi_1}，\ v_{z_2} = \left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3} - \frac{c}{D}\right)e^{\varphi_2(z_2)}，$$

对上述式子求积分得

$$\mu = \left(\frac{d}{D}e^{\xi_1} - \frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_2，\ v = \left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3} - \frac{c}{D}\right)F_8\left(z_2\right) + \left(\frac{a}{D}e^{\xi_2} - \frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_1，$$

其中 $F_8'\left(z_2\right) = e^{\varphi_2(z_2)}$，此时 $g = p_1\varphi_2\left(z_2\right) + p_2\xi_2 = p_4\varphi_2\left(z_2\right) + p_3\xi_1 - p_4\xi_3$。

(ii) 若 $ce^{\xi_3} - a = 0$，$de^{\xi_3} - b \neq 0$，此时满足 $\alpha_{z_2}^1 = 0$，即 $\alpha^1 = \phi_2\left(z_1\right)$，结合式(3.3)、(3.4)可进一步得：

$$\mu_{z_2} = \left(\frac{d}{D} - \frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)e^{\phi_2(z_1)}，\ \mu_{z_1} = \frac{d}{D}e^{\xi_1} - \frac{b}{D}e^{\xi_2}，$$

$$v_{z_1} = \frac{a}{D}e^{\xi_2} - \frac{c}{D}e^{\xi_1}，\ v_{z_2} = \left(\frac{a}{D}e^{-\xi_3} - \frac{c}{D}\right)e^{\phi_2(z_1)} = 0，$$

对上述式子求积分得

$$\mu = \left(\frac{d}{D} - \frac{b}{D}e^{-\xi_3}\right)G_8\left(z_1\right) + \left(\frac{d}{D}e^{\xi_1} - \frac{b}{D}e^{\xi_2}\right)z_2，\ v = \left(\frac{a}{D}e^{\xi_2} - \frac{c}{D}e^{\xi_1}\right)z_1，$$

其中 $G_8'\left(z_1\right) = e^{\phi_2(z_1)}$，此时 $g = p_1\phi_2\left(z_1\right) + p_2\xi_2 = p_4\phi_2\left(z_1\right) + p_3\xi_1 - p_4\xi_3$。

情形 3 $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 均为非常数多项式。

情形 3.1 若 $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值不为常数，则由引理 2.3 结合(3.5)、(3.6)式得：$\alpha_{z_1}^1 = \alpha_{z_2}^1 = 0$，$\alpha_{z_1}^2 = \alpha_{z_2}^2 = 0$，$\beta_{z_1}^1 = \beta_{z_2}^1 = 0$，$\beta_{z_1}^2 = \beta_{z_2}^2 = 0$，即 $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 均为常数多项式，矛盾。

情形 3.2 若 $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值仅存在一个常数。不失一般性，假设 $\alpha^1 - \alpha^2$ 为常数，令 $\alpha^1 - \alpha^2 = \xi_1$，此时由(3.5)、(3.6)式得：

$$d\alpha_{z_2}^1 e^{\xi_1} - d\alpha_{z_1}^2 + b\beta_{z_1}^1 e^{\beta^1 - \alpha^2} - b\beta_{z_2}^2 e^{\beta^2 - \alpha^2} = 0，\ c\alpha_{z_1}^1 e^{\xi_1} - c\alpha_{z_2}^2 + a\beta_{z_2}^1 e^{\beta^1 - \alpha^2} - a\beta_{z_1}^2 e^{\beta^2 - \alpha^2} = 0，$$

此时 $\beta^1 - \alpha^2$，$\beta^2 - \alpha^2$，$\left(\beta^1 - \alpha^2\right) - \left(\beta^2 - \alpha^2\right) = \beta^1 - \beta^2$ 均不为常数，由引理 2.3 可知 $\beta_{z_1}^1 = \beta_{z_2}^1 = 0$，$\beta_{z_1}^2 = \beta_{z_2}^2 = 0$，即 β^1, β^2 为常数，矛盾。

情形 3.3 若 $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2$ 两两间的差值仅存在两个常数，此时包含以下几种情况。

情形 3.3.1 若 α^1 与 α^2 及 β^1 与 β^2 间的差值为常数。令 $\alpha^1 - \alpha^2 = \xi_1$，$\beta^1 - \beta^2 = \xi_2$，此时 $\alpha_{z_1}^2 = \alpha_{z_1}^1$，

$\alpha^2_{z_2}=\alpha^1_{z_2}$， $\beta^2_{z_1}=\beta^1_{z_1}$， $\beta^2_{z_2}=\beta^1_{z_2}$，(3.5)、(3.6)式可变形得：

$$d\left(\alpha^1_{z_2}-\alpha^1_{z_1}e^{-\xi_1}\right)e^{\alpha^1}+b\left(\beta^1_{z_1}-\beta^1_{z_2}e^{-\xi_2}\right)e^{\beta^1}=0，$$

$$c\left(\alpha^1_{z_1}-\alpha^1_{z_2}e^{-\xi_1}\right)e^{\alpha^1}+a\left(\beta^1_{z_2}-\beta^1_{z_1}e^{-\xi_2}\right)e^{\beta^1}=0。$$

由于 $\alpha^1-\beta^1$ 不为常数，故

$$\alpha^1_{z_2}-\alpha^1_{z_1}e^{-\xi_1}=0，\quad \alpha^1_{z_1}-\alpha^1_{z_2}e^{-\xi_1}=0，\quad \beta^1_{z_1}-\beta^1_{z_2}e^{-\xi_2}=0，\quad \beta^1_{z_2}-\beta^1_{z_1}e^{-\xi_2}=0，$$

即得 $\alpha^1=\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)=\theta_2\left(z_2+e^{-\xi_1}z_1\right)$，$\beta^1=\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)=\theta_3\left(z_2+e^{-\xi_2}z_1\right)$，其中 ξ_1,ξ_2 满足 $e^{2\xi_1}=1$，$e^{2\xi_2}=1$。进一步得 $\alpha^2=\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)-\xi_1$， $\beta^2=\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)-\xi_2$。由(3.3)、(3.4)式可知：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}e^{\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)}，\quad \mu_{z_2}=\frac{d}{D}e^{-\xi_1}e^{\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)}-\frac{b}{D}e^{\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)}，$$

$$v_{z_1}=\frac{a}{D}e^{\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)}-\frac{c}{D}e^{-\xi_1}e^{\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)}，\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{-\xi_2}e^{\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)}-\frac{c}{D}e^{\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)}，$$

对上述式子积分得

$$\mu=\frac{d}{D}e^{-\xi_1}F_9\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)-\frac{b}{D}F_{10}\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)，\quad v=\frac{a}{D}e^{-\xi_2}G_{10}\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)-\frac{c}{D}G_9\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)，$$

其中 $F_9'\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)=G_9'\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)=e^{\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)}$， $F_{10}'\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)=G_{10}'\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)=e^{\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)}$， 此时 $g=p_1\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)+p_2\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)=p_3\theta_2\left(z_2+e^{\xi_1}z_1\right)+p_4\theta_3\left(z_2+e^{\xi_2}z_1\right)-p_3\xi_1-p_4\xi_2$。

情形 3.3.2 若 α^1 与 β^1 及 α^2 与 β^2 间的差值为常数，令 $\alpha^1-\beta^1=\xi_1$， $\alpha^2-\beta^2=\xi_2$， 此时 $\beta^1_{z_1}=\alpha^1_{z_1}$， $\beta^1_{z_2}=\alpha^1_{z_2}$， $\beta^2_{z_1}=\alpha^2_{z_1}$， $\beta^2_{z_2}=\alpha^2_{z_2}$，(3.5)、(3.6)式可变形得：

$$\left(d\alpha^1_{z_2}+be^{-\xi_1}\alpha^1_{z_1}\right)e^{\alpha^1}-\left(d\alpha^2_{z_1}+be^{-\xi_2}\alpha^2_{z_2}\right)e^{\alpha^2}=0，$$

$$\left(c\alpha^1_{z_1}+ae^{-\xi_1}\alpha^1_{z_2}\right)e^{\alpha^1}-\left(c\alpha^2_{z_2}+ae^{-\xi_2}\alpha^2_{z_1}\right)e^{\alpha^2}=0。$$

由于 $\alpha^1-\alpha^2$ 不为常数，故

$$d\alpha^1_{z_2}+be^{-\xi_1}\alpha^1_{z_1}=0，\quad c\alpha^1_{z_1}+ae^{-\xi_1}\alpha^1_{z_2}=0，\quad d\alpha^2_{z_1}+be^{-\xi_2}\alpha^2_{z_2}=0，\quad c\alpha^2_{z_2}+ae^{-\xi_2}\alpha^2_{z_1}=0，$$

即

$$\alpha^1_{z_1}+\frac{d}{be^{-\xi_1}}\alpha^1_{z_2}=0，\quad \alpha^1_{z_1}+\frac{ae^{-\xi_1}}{c}\alpha^1_{z_2}=0，\quad \alpha^2_{z_1}+\frac{be^{-\xi_2}}{d}\alpha^2_{z_2}=0，\quad \alpha^2_{z_1}+\frac{c}{ae^{-\xi_2}}\alpha^2_{z_2}=0，$$

故而 $\alpha^1=\varphi_2\left(t_1\right)$， $\alpha^2=\varphi_3\left(t_2\right)$，其中 $\varphi_4\left(t_1\right)$ 是关于 $t_1=z_2-\dfrac{d}{be^{-\xi_1}}z_1=z_2-\dfrac{ae^{-\xi_1}}{c}z_1$ 的多项式， $\varphi_3\left(t_2\right)$ 是关于 $t_2=z_2-\dfrac{be^{-\xi_2}}{d}z_1=z_2-\dfrac{c}{ae^{-\xi_2}}z_1$ 的多项式，结合(3.3)、(3.4)式得：

$$\mu_{z_1}=\frac{d}{D}e^{\varphi_2(t_1)}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}e^{\varphi_3(t_2)}，\quad \mu_{z_2}=\frac{d}{D}e^{\varphi_3(t_2)}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}e^{\varphi_2(t_1)}，$$

$$v_{z_1}=\frac{a}{D}e^{-\xi_1}e^{\varphi_2(t_1)}-\frac{c}{D}e^{\varphi_3(t_2)}，\quad v_{z_2}=\frac{a}{D}e^{-\xi_2}e^{\varphi_3(t_2)}-\frac{c}{D}e^{\varphi_2(t_1)}，$$

进一步求积分得

$$\mu=-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}F_{11}(t_1)+\frac{d}{D}F_{12}(t_2)\text{，}\quad v=\frac{a}{D}e^{-\xi_2}G_{12}(t_2)-\frac{c}{D}G_{11}(t_1)\text{，}$$

其中 $F_{11}'(t_1)=G_{11}'(t_1)=e^{\varphi_2(t_1)}$，$F_{12}'(t_2)=G_{12}'(t_2)=e^{\varphi_3(t_2)}$，此时 $g=(p_1+p_2)\varphi_2(t_1)-p_2\xi_1=(p_3+p_4)\varphi_3(t_2)-p_4\xi_2$。

情形 3.3.3 若 α^1 与 β^2 及 α^2 与 β^1 间的差值为常数，不妨设 $\alpha^1-\beta^2=\xi_1$，$\alpha^2-\beta^1=\xi_2$，此时 $\beta^2_{z_1}=\alpha^1_{z_1}$，$\beta^2_{z_2}=\alpha^1_{z_2}$，$\beta^1_{z_1}=\alpha^2_{z_1}$，$\beta^1_{z_2}=\alpha^2_{z_2}$，由(3.5)、(3.6)式可进一步变形得：

$$\left(d-be^{-\xi_1}\right)\alpha^1_{z_2}e^{\alpha^1}+\left(be^{-\xi_2}-d\right)\alpha^2_{z_1}e^{\alpha^2}=0\text{，}$$

$$\left(c-ae^{-\xi_1}\right)\alpha^1_{z_1}e^{\alpha^1}+\left(ae^{-\xi_2}-c\right)\alpha^2_{z_2}e^{\alpha^2}=0.$$

由于 $\alpha^1-\alpha^2$ 为非常数，故此时

$$\left(c-ae^{-\xi_1}\right)\alpha^1_{z_1}=0\text{，}\quad\left(d-be^{-\xi_1}\right)\alpha^1_{z_2}=0\text{，}$$

$$\left(be^{-\xi_2}-d\right)\alpha^2_{z_1}=0\text{，}\quad\left(ae^{-\xi_2}-c\right)\alpha^2_{z_2}=0\text{，}$$

显然 $d-be^{-\xi_1}$ 与 $c-ae^{-\xi_1}$、$be^{-\xi_2}-d$ 与 $ae^{-\xi_2}-c$ 不可同时为零，否则 $D=ad-bc=0$，矛盾。同样的 $d-be^{-\xi_1}$ 与 $c-ae^{-\xi_1}$、$be^{-\xi_2}-d$ 与 $ae^{-\xi_2}-c$ 不可同时为非零常数，否则 $\alpha^1_{z_1}=\alpha^1_{z_2}=0$，$\alpha^2_{z_1}=\alpha^2_{z_2}=0$，即 α^1,α^2 为常数，矛盾。

(i) 若 $d-be^{-\xi_1}=0$，$be^{-\xi_2}-d=0$，则 $c-ae^{-\xi_1}\neq0$，$ae^{-\xi_2}-c\neq0$，此时 $\alpha^1_{z_1}=0$，$\alpha^2_{z_2}=0$，即得 $\alpha^1=\varphi_3(z_2)$，$\alpha^2=\varphi_4(z_1)$，此时结合(3.3)式进一步得到：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\varphi_3(z_2)}=0\text{，}\quad\mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)e^{\varphi_4(z_1)}=0\text{，}$$

即 u 为常数，矛盾。

(ii) 若 $d-be^{-\xi_1}\neq0$，$be^{-\xi_2}-d=0$，则 $c-ae^{-\xi_1}=0$，$ae^{-\xi_2}-c\neq0$，此时 $\alpha^1_{z_2}=0$，$\alpha^2_{z_2}=0$，即 $\alpha^1=\phi_3(z_1)$，$\alpha^2=\phi_4(z_1)$，此时 $\beta^1=\phi_4(z_1)-\xi_2$，$\beta^2=\phi_3(z_1)-\xi_1$，由结合(3.3)、(3.4)式得：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\phi_3(z_1)}\text{，}\quad\mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)e^{\phi_4(z_1)}=0\text{，}$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)e^{\phi_4(z_1)}\text{，}\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\phi_3(z_1)}=0\text{，}$$

积分进一步求得

$$\mu=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)F_{13}(z_1)\text{，}\quad v=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)G_{13}(z_1)\text{，}$$

其中 $F_{13}'(z_1)=e^{\phi_3(z_1)}$，$G_{13}'(z_1)=e^{\phi_4(z_1)}$，此时 $g=p_1\phi_3(z_1)+p_2\phi_4(z_1)-p_2\xi_2=p_4\phi_3(z_1)+p_3\phi_4(z_1)-p_4\xi_1$。

(iii) 若 $d-be^{-\xi_1}=0$，$be^{-\xi_2}-d\neq0$，此时 $c-ae^{-\xi_1}\neq0$，$ae^{-\xi_2}-c=0$，推得 $\alpha^1_{z_1}=0$，$\alpha^2_{z_1}=0$，故此时 $\alpha^1=\theta_4(z_2)$，$\alpha^2=\theta_5(z_2)$，$\beta^1=\theta_5(z_2)-\xi_2$，$\beta^2=\theta_4(z_2)-\xi_1$，代入(3.3)、(3.4)式中得：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\theta_4(z_2)}=0\text{，}\quad\mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)e^{\theta_5(z_2)}\text{，}$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)e^{\theta_5(z_2)}=0\text{，}\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\theta_4(z_2)}\text{，}$$

对上述式子求积分得 $\mu=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_2}\right)G_{14}\left(z_2\right)$，$v=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)F_{14}\left(z_2\right)$，其中 $F_{14}'\left(z_2\right)=e^{\theta_4\left(z_2\right)}$，$G_{14}'\left(z_2\right)=e^{\theta_5\left(z_2\right)}$，此时 $g=p_1\theta_4\left(z_2\right)+p_2\theta_5\left(z_2\right)-p_2\xi_2=p_4\theta_4\left(z_2\right)+p_3\theta_5\left(z_2\right)-p_4\xi_1$。

(iv) 若 $d-be^{-\xi_1}\neq 0$，$be^{-\xi_2}-d\neq 0$，则 $c-ae^{-\xi_1}=0$，$ae^{-\xi_2}-c=0$，此时 $\alpha_{z_2}^1=0$，$\alpha_{z_1}^2=0$，即 $\alpha^1=\psi_4\left(z_1\right)$，$\alpha^2=\psi_5\left(z_2\right)$，故而 $\beta^1=\psi_5\left(z_2\right)-\xi_2$，$\beta^2=\psi_4\left(z_1\right)-\xi_1$，结合(3.4)式得：

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_2}-\frac{c}{D}\right)e^{\psi_5\left(z_2\right)}=0,\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\psi_4\left(z_1\right)}=0,$$

即 v 为常数，矛盾。

情形 3.4 若 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 两两间的差值存在三个常数，此时可分两种情况讨论式(3.5)及(3.6)。

情形 3.4.1 若 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 中仅三个多项式间相差一个常数，不失一般性，假设 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1$ 间相差一个常数，由引理 2.3 得 $\beta_{z_1}^2=\beta_{z_2}^2=0$，即 β^2 为常数，矛盾。

情形 3.4.2 若 $\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2$ 中四个多项式均相差一个常数，不妨设 $\alpha^1-\beta^2=\xi_1$，$\alpha^2-\beta^2=\xi_2$，$\beta^1-\beta^2=\xi_3$，此时式(3.5)、(3.6)可变形得：

$$\left(be^{\xi_3}-de^{\xi_2}\right)\alpha_{z_1}^1+\left(de^{\xi_1}-b\right)\alpha_{z_2}^1=0, \tag{3.21}$$

$$\left(ce^{\xi_1}-a\right)\alpha_{z_1}^1+\left(ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}\right)\alpha_{z_2}^1=0. \tag{3.22}$$

由于 $D=ad-bc\neq 0$，故此时 $be^{\xi_3}-de^{\xi_2}$ 与 $ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}$ 不同时为零，且 $de^{\xi_1}-b$ 与 $ce^{\xi_1}-a$ 不同时为零，讨论以下情况。

(i) $be^{\xi_3}-de^{\xi_2}=0$，$de^{\xi_1}-b=0$，则 $ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}\neq 0$，$ce^{\xi_1}-a\neq 0$，结合(3.21)、(3.22)式可得：

$$\alpha_{z_1}^1+\frac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}\alpha_{z_2}^1=0,\quad \alpha_{z_1}^1+\frac{ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}}{ce^{\xi_1}-a}\alpha_{z_2}^1=0,$$

即 $\alpha^1=\varphi_5\left(t\right)$，其中 $\varphi_5\left(t\right)$ 是关于 $t=z_2-\frac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}z_1=z_2-\frac{ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}}{ce^{\xi_1}-a}z_1$ 的多项式，此时 $\alpha^2=\varphi_5\left(t\right)+\xi_2-\xi_1$，$\beta^1=\varphi_5\left(t\right)+\xi_3-\xi_1$，$\beta^2=\varphi_5\left(t\right)-\xi_1$，由(3.3)式可知：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\varphi_5(t)}=0,\quad \mu_{z_2}=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)e^{\varphi_5(t)}=0,$$

即 u 为常数，矛盾。

(ii) 若 $be^{\xi_3}-de^{\xi_2}=0$，$de^{\xi_1}-b\neq 0$，则 $ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}\neq 0$，我们断言 $ce^{\xi_1}-a=0$，否则 $\alpha_{z_1}^1=\alpha_{z_2}^1=0$，矛盾。结合(3.21)、(3.22)可知 $\alpha_{z_2}^1=0$，此时

$$\alpha^1=\phi_5\left(z_1\right),\quad \alpha^2=\phi_5\left(z_1\right)+\xi_2-\xi_1,\quad \beta^1=\phi_5\left(z_1\right)+\xi_3-\xi_1,\quad \beta^2=\phi_5\left(z_1\right)-\xi_1,$$

根据(3.3)、(3.4)可得：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\phi_5\left(z_1\right)},\quad u_{z_2}=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)e^{\phi_5\left(z_1\right)}=0,$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_2-\xi_1}\right)e^{\phi_5\left(z_1\right)},\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\phi_5\left(z_1\right)}=0,$$

对上述式子求积分解得

$$\mu=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)F_{15}\left(z_1\right),\quad v=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_2-\xi_1}\right)G_{15}\left(z_1\right),$$

其中 $F_{15}'\left(z_1\right)=G_{15}'\left(z_1\right)=e^{\phi_5\left(z_1\right)}$，此时 $g=\left(p_1+p_2\right)\phi_5\left(z_1\right)+p_2\left(\xi_3-\xi_1\right)=\left(p_3+p_4\right)\phi_5\left(z_1\right)+p_3\left(\xi_2-\xi_1\right)-p_4\xi_1$。

(iii) 若 $de^{\xi_1}-b=0$，$be^{\xi_3}-de^{\xi_2}\neq 0$，则 $ce^{\xi_1}-a\neq 0$，显然 $ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}=0$，否则 $\alpha_{z_1}^1=\alpha_{z_2}^1=0$，与情况 3 假设矛盾。进而由(3.21)、(3.22)推得 $\alpha_{z_1}^1=0$，此时 $\alpha^1=\varphi_6\left(z_2\right)$，且满足

$$\alpha^2=\varphi_6\left(z_2\right)+\xi_2-\xi_1,\quad \beta^1=\varphi_6\left(z_2\right)+\xi_3-\xi_1,\quad \beta^2=\varphi_6\left(z_2\right)-\xi_1。$$

结合(3.3)、(3.4)式可知：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\varphi_6\left(z_2\right)}=0,\quad u_{z_2}=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)e^{\varphi_6\left(z_2\right)},$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_2-\xi_1}\right)e^{\varphi_6\left(z_2\right)}=0,\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\varphi_6\left(z_2\right)},$$

对上述式子求积分解得

$$\mu=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)F_{16}\left(z_2\right),\quad v=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)G_{16}\left(z_2\right),$$

其中 $F_{16}'\left(z_2\right)=G_{16}'\left(z_2\right)=e^{\varphi_6\left(z_2\right)}$，此时 $g=\left(p_1+p_2\right)\varphi_6\left(z_2\right)+p_2\left(\xi_3-\xi_1\right)=\left(p_3+p_4\right)\varphi_6\left(z_2\right)+p_3\left(\xi_2-\xi_1\right)-p_4\xi_1$。

(iv) 若 $de^{\xi_1}-b\neq 0$，$be^{\xi_3}-de^{\xi_2}\neq 0$。

当 $ce^{\xi_1}-a\neq 0$，$ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}=0$ 时，$\alpha_{z_1}^1=\alpha_{z_2}^1=0$，即 α^1 为常数，矛盾。当 $ce^{\xi_1}-a=0$，$ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}\neq 0$ 时，同理推得矛盾。当 $ce^{\xi_1}-a=0$，$ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}=0$ 时，结合(3.21)、(3.22)知：

$$\alpha_{z_1}^1+\frac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}\alpha_{z_2}^1=0,$$

此时 $\alpha^1=\phi_6\left(t\right)$，其中 $\varphi_1\left(t\right)$ 是关于 $t=z_2-\dfrac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}z_1$ 的多项式，此时 $\alpha^2=\phi_6\left(t\right)+\xi_2-\xi_1$，$\beta^1=\phi_6\left(t\right)+\xi_3-\xi_1$，$\beta^2=\phi_6\left(t\right)-\xi_1$，代入(3.4)中得

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_2-\xi_1}\right)e^{\phi_6\left(t\right)}=0,\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\phi_6\left(t\right)}=0,$$

即 v 为常数，矛盾。

当 $ce^{\xi_1}-a\neq 0$，$ce^{\xi_2}+ae^{\xi_3}\neq 0$ 时，$\alpha_{z_1}^1+\dfrac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}\alpha_{z_2}^1=0$，$\alpha_{z_1}^1+\dfrac{ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}}{ce^{\xi_1}-a}\alpha_{z_2}^1=0$，此时 $\alpha^1=\theta_6\left(t\right)$，其中 $\theta_6\left(t\right)$ 是关于 $t=z_2-\dfrac{de^{\xi_1}-b}{be^{\xi_3}-de^{\xi_2}}z_1=z_2-\dfrac{ae^{\xi_3}-ce^{\xi_2}}{ce^{\xi_1}-a}z_1$ 的多项式，此时 $\beta^2=\theta_6\left(t\right)-\xi_1$，$\alpha^2=\theta_6\left(t\right)+\xi_2-\xi_1$，$\beta^1=\theta_6\left(t\right)+\xi_3-\xi_1$，结合(3.3)、(3.4)得：

$$\mu_{z_1}=\left(\frac{d}{D}-\frac{b}{D}e^{-\xi_1}\right)e^{\theta_6\left(t\right)},\quad u_{z_2}=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)e^{\theta_6\left(t\right)},$$

$$v_{z_1}=\left(\frac{a}{D}e^{\xi_3-\xi_1}-\frac{c}{D}e^{\xi_2-\xi_1}\right)e^{\theta_6\left(t\right)},\quad v_{z_2}=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)e^{\theta_6\left(t\right)},$$

对上述式子积分得

$$\mu=\left(\frac{d}{D}e^{\xi_2-\xi_1}-\frac{b}{D}e^{\xi_3-\xi_1}\right)F_{17}(t),\quad v=\left(\frac{a}{D}e^{-\xi_1}-\frac{c}{D}\right)G_{17}(t),$$

其中 $F_{17}'(t)=G_{17}'(t)=e^{\theta_6(t)}$，此时 $g=(p_1+p_2)\theta_6(t)+p_2(\xi_3-\xi_1)=(p_3+p_4)\theta_6(t)+p_3(\xi_2-\xi_1)-p_4\xi_1$。

基金项目

广东省自然科学基金资助(NO.2021A1515010062)。

参考文献

[1] Iyer, G. (1939) On Certain Functional Equations. *The Journal of the Indian Mathematical Society*, **3**, 312-315.

[2] Khavinson, D. (1995) A Note on Entire Solutions of the Eiconal Equation. *The American Mathematical Monthly*, **102**, 159-161. https://doi.org/10.1080/00029890.1995.11990551

[3] Saleeby, E.G. (1999) Entire and Meromorphic Solutions of Fermat Type Partial Differential Equations. *Analysis*, **19**, 369-376. https://doi.org/10.1524/anly.1999.19.4.369

[4] Xu, L. and Cao, T. (2018) Solutions of Complex Fermat-Type Partial Difference and Differential-Difference Equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, Article No. 227. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1274-x

[5] Xu, H.Y., Liu, S.Y. and Li, Q.P. (2020) Entire Solutions for Several Systems of Nonlinear Difference and Partial Differential-Difference Equations of Fermat-Type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **483**, Article 123641. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123641

[6] Li, B.Q. (2004) On Entire Solutions of Fermat Type Partial Differential Equations. *International Journal of Mathematics*, **15**, 473-485. https://doi.org/10.1142/s0129167x04002399

[7] Lü, F. (2020) Entire Solutions of a Variation of the Eikonal Equation and Related PDEs. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **63**, 697-708. https://doi.org/10.1017/s0013091520000103

[8] Xu, H.Y., Xu, Y.H. and Liu, X.L. (2023) On Solutions for Several Systems of Complex Nonlinear Partial Differential Equations with Two Variables. *Analysis and Mathematical Physics*, **13**, Article No. 47. https://doi.org/10.1007/s13324-023-00811-z

[9] Ronkin, L. (1974) Introduction to the Theory of Entire Functions of Several Variables. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/mmono/044

[10] Stoll, W. (1974) Holomorphic Functions of Finite Order in Several Complex Variables. American Mathematical Society.

[11] Pólya, G. (1926) On an Integral Function of an Integral Function. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 12-15. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-1.1.12

[12] Hu, P., Li, P. and Yang, C. (2003) Uniqueness of Meromorphic Mappings. In: Hu, P., Li, P. and Yang, C., Eds., *Unicity of Meromorphic Mappings*, Springer, 309-378. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3775-2_4